Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

IV. Die Newtonsche Reihe und der binomische Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Im folgenden Abschnitte soll eine Potenzreihe von besonderer Wichtigkeit behandelt werden.

Sind die Konffizienten $a, b, c, d \ldots$ zum Teil imaginär oder komplex, so ändert dies an der Betrachtung nichts. Ist dagegen bei einer Reihe x komplex, so kann man den reellen und den imaginären Teil der Reihe für sich betrachten und für jeden die Konvergenz untersuchen. Statt dessen kann man aber auch untersuchen, für welchen absoluten Betrag von $x + yi$, d. h. für welches $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Reihe konvergent ist. Die Grenzwerte von z liegen, geometrisch dargestellt, auf einem um Null geschlagenen Kreise, der als der Konvergenzkreis bezeichnet wird. Genauere Untersuchungen über diese Dinge überschreiten das Ziel der Schule.

IV. Die Newtonsche Reihe und der binomische Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten.

23) Die Newtonsche Reihe und ihre Konvergenz.

In Teil II, Arithmetik Nr. 30, war für ganze, positive Exponenten n bewiesen worden, daß

$$1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots = (1+x)^n$$

ist, wobei die Reihe mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede abbricht.

Bildet man nun für ganz beliebiges p die sogenannte Newtonsche Reihe

$$1 + \frac{p}{1} x + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots,$$

so erstreckt sich diese im allgemeinen ins Unendliche, und es fragt sich, wann sie konvergent und wie groß dann ihre Summe ist.

Der Quotient des $(n+1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Gliedes ist

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} x^n : \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} x^{n-1}$$

oder

$$\frac{(p-n+1)}{n} x = -x + \frac{p+1}{n} x.$$

Für sehr großes n nähert sich dies dem Grenzwerte $-x$. Ist der absolute Betrag desselben angebbar kleiner als 1, so ist nach 18 d) die Reihe konvergent, ist er größer, so ist sie divergent. Der Zwischen-fall, daß er gleich 1 ist, soll hier nicht untersucht werden. Für uns reicht Folgendes aus:

Die Newtonsche Reihe ist konvergent, sobald der absolute Betrag von x angebbar kleiner als 1 ist.

Um die Reihe zu summieren, muß man zunächst gewisse Eigenschaften ihrer Koeffizienten kennen lernen, wobei man vorläufig zum binomischen Satze für ganze positive Exponenten zurückzukehren hat.

Sind n und ν ganze, positive Zahlen, und bezeichnet man die Binominalkoeffizienten der Reihe nach mit $n_1, n_2, n_3, \ldots$ bezw. $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$, so ist nach dem binomischen Satze

$$(1+x)^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + n_4 x^4 + \cdots,$$
$$(1+x)^\nu = 1 + \nu_1 x + \nu_2 x^2 + \nu_3 x^3 + \nu_4 x^4 + \cdots.$$

Durch Multiplikation erhält man daraus eine Formel für

$$(1+x)^n \cdot (1+x)^\nu = (1+x)^{n+\nu},$$

nämlich

$$(1+x)^{n+\nu} = 1 + (n_1 + \nu_1)\, x + (n_2 + n_1\nu_1 + \nu_2)\, x^2 + (n_3 + n_2\nu_1 + n_1\nu_2 + \nu_3)\, x^3 + \cdots,$$

während nach dem binomischen Satze bei entsprechender Bezeichnung der Koeffizienten zugleich ist:

$$(1+x)^{n+\nu} = 1 + (n+\nu)_1\, x + (n+\nu)_2\, x^2 + (n+\nu)_3\, x^3 + \cdots.$$

Die Koeffizienten der entsprechenden Potenzen von x müssen, da es sich nur um eine andere Schreibweise handelt, in beiden Gleichungen übereinstimmen. Schreibt man sie in ihrer eigentlichen Form, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$\frac{n}{1} + \frac{\nu}{1} = \frac{n+\nu}{1},$$

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{\nu}{1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2} = \frac{(n+\nu)(n+\nu-1)}{1\cdot 2},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\nu}{1} + \frac{n}{1}\cdot\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2} = \frac{(n+\nu)(n+\nu-1)(n+\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\nu}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{(n+\nu)(n+\nu-1)(n+\nu-2)(n+\nu-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

u. s. w.

An jeder dieser Gleichungen erkennt man auch durch Auswertung der rechten Seiten, daß sie identische sind.

Daß sie auch für gebrochene und negative n und ν identische sein müssen*), ergiebt sich durch folgende Überlegung. Ist n fest und ν veränderlich, so handelt es sich rechts und links der Reihe nach um Ausdrücke 1., 2., 3., 4., ... Grades in Bezug auf ν. Die Ausdrücke auf der linken Seite mögen daher der Reihe nach mit $f_1(\nu)$, $f_2(\nu)$, $f_3(\nu)\ldots$, die auf der rechten mit $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$ ... bezeichnet werden. Sie sind der Reihe nach in Bezug auf ν vom 1., 2., 3. Grade, und sind ganze rationale Funktionen von ν, die für alle positiven ganzzahligen Werte nach dem binomischen Satze für ganzzahlige positive Exponenten übereinstimmen. Daher stimmen z. B. $f_p(\nu)$ und $\varphi_p(\nu)$, die vom p^{ten} Grade sind, für mehr als $p+1$ Werte überein, sind also nach Abschnitt 2) vollkommen identisch und stimmen für alle denkbaren Werte von ν, für gebrochene, irrationale und sogar für imaginäre und komplexe überein.

Dies gilt zunächst für jedes feste, ganzzahlige, positive n, also beim Grade p für mehr als $p+1$ solcher Werte; folglich sind sie aus demselben Grunde identisch als ganze rationale Funktionen von n. Damit ist die volle Identität nachgewiesen. Die Gleichungen gelten also, wenn man sie rein mechanisch und ohne jede Beziehung auf den binomischen Lehrsatz bildet, nicht nur für ganze und positive n, sondern auch für gebrochene, negative, sogar auch für irrationale, imaginäre und komplexe n und ν.

24) Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes.

Man bilde rein mechanisch für beliebiges n und ν die Newtonschen Reihen

$$1+n_1x+n_2x^2+n_3x^3+n_4x^4+\cdots=B(n),$$
$$1+\nu_1x+\nu_2x^2+\nu_3x^3+\nu_4x^4+\cdots=B(\nu),$$

die unter der Voraussetzung $-1<x<+1$ konvergent sind, so daß ihre unbekannten Summen mit $B(n)$ und $B(\nu)$ bezeichnet werden dürfen.

Durch Multiplikation geht aus konvergenten Reihen wiederum eine konvergente Reihe hervor, deren Summe gleich dem Produkte der ursprünglichen Summen ist. Demnach ist hier

$$1+(n_1+\nu_1)x+(n_2+n_1\nu_1+\nu_2)x^2$$
$$+(n_3+n_2\nu_1+n_1\nu_2+\nu_3)x^3+\cdots=B(n)\cdot B(\nu).$$

*) Man hat dabei von der binomischen Entstehungsweise ganz abzusehen und die Gleichungen rein mechanisch hinzuschreiben.

Infolge der vorher bewiesenen Identitäten darf man (für beliebiges n und ν) für die linke Seite schreiben:

$$1 + (n+\nu)_1 x + (n+\nu)_2 x^2 + (n+\nu)_3 x^3 + \cdots,$$

was man analog mit $B(n+\nu)$ zu bezeichnen hat. **Folglich gilt für die betreffenden unbekannten Summen identisch die Gleichung**

$$1) \qquad B(n) \cdot B(\nu) = B(n+\nu),$$

in der man ohne weiteres das Additionstheorem der Potenzen gleicher Grundzahl wieder erkennt.

Sind also $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ ganz beliebige Zahlen, die zur mechanischen Bildung der Koeffizienten Newtonscher Reihen benutzt sind, so gilt für den Konvergenzfall $-1 < x < +1$ die Gleichung

$$2) \qquad B(\alpha) \cdot B(\beta) \cdot B(\gamma) \cdots = B(\alpha + \beta + \gamma + \cdots).$$

Setzt man hier $\alpha = \beta = \gamma = \cdots$, so folgt für beliebiges α, aber für ganzes positives n, die Formel

$$3) \qquad [B(\alpha)]^n = B(n\alpha).$$

Setzt man z. B. $\alpha = \frac{1}{n} \cdot m$, wo m und n ganze, positive Zahlen sind, so wird

$$\left[B\left(\frac{1}{n} \cdot m\right)\right]^n = B\left(n \frac{1}{n} m\right) = B(m).$$

Für ganzes positives m ist aber $B(m) = (1+x)^m$, folglich ist

$$B\left(\frac{m}{n}\right) = [B(m)]^{\frac{1}{n}} = (1+x)^{\frac{m}{n}},$$

d. h.: **Die Gleichung**

$$1 + \frac{p}{1} x + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots = (1+x)^p$$

gilt bei $-1 < x < +1$ auch für den positiven, gebrochenen Exponenten $p = \frac{m}{n}$.

Setzt man in $B(\alpha) \cdot B(\beta) = B(\alpha + \beta)$ für β den Wert $-\alpha$ ein, so wird

$$B(\alpha) \cdot B(-\alpha) = B(\alpha - \alpha) = B(0) = (1+x)^0 = 1,$$

also ist

$$B(-\alpha) = \frac{1}{B(\alpha)}.$$

Ist nun α eine positive, gebrochene oder ganze Zahl, so ist $B(\alpha) = (1+x)^\alpha$, also

$$B(-\alpha) = \frac{1}{(1+x)^\alpha} = (1+x)^{-\alpha}.$$

Folglich: Die Gleichung

$$1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots = (1+x)^p$$

gilt bei $-1 < x < +1$ auch für den negativen (ganzen oder gebrochenen) Exponenten $p = -\alpha$.

Bemerkung. Auf den Fall, wo in $(1+x)^p$ der Exponent p irrational oder imaginär ist, braucht die Elementarmathematik nicht einzugehen. Die Potenz bedarf dann einer besonderen Definition, und diese wird durch die entsprechende Newtonsche Reihe gegeben, die dann neuen Untersuchungen zu unterwerfen ist.

25) Binomische Entwickelung irrationaler Ausdrücke.

Der binomische Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten gestattet eine derartige Fülle von Anwendungen, daß er als ein Haupthebel der neueren Mathematik bezeichnet werden darf. Zunächst finden die in Teil II über die Exponentialreihe, den Moivreschen Lehrsatz, über die Reihen für Cosinus und Sinus gegebenen Ausführungen ihre Abrundung durch das Aufheben der Beschränkung auf ganze positive n. Andere Anwendungen sind die jetzt folgenden.

Aufgabe. Die Ausdrücke $\sqrt{1+x}$ oder $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{1-x}$ oder $(1-x)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{1 \pm x}$ oder $(1 \pm x)^{\frac{1}{3}}$, sollen für $-1 < x < +1$ in Reihen entwickelt werden.

Auflösung 1.

$$\begin{aligned}
&(1+x)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 \\
&\qquad + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2}x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{1536}x^5 - \cdots.
\end{aligned}$$

Beispiel.

$$\begin{aligned}
\sqrt{146} &= \sqrt{144+2} = \sqrt{144}\sqrt{1+\tfrac{2}{144}} = 12\sqrt{1+\tfrac{1}{72}} \\
&= 12\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{72} - \frac{1}{8}\,\frac{1}{72^2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{72^3} - \frac{5}{128} \cdot \frac{1}{72^4} + \cdots\right] = ?
\end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert sehr schnell. Weil die Vorzeichen abwechseln, liegt der wahre Wert stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Summenwerten s_n und s_{n+1}.

Auflösung 2.

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 - \tfrac{7}{1536}x^5 - \cdots.$$

Beispiel.

$$\sqrt{142} = \sqrt{144-2} = 12\sqrt{1-\tfrac{1}{72}}$$

$$= 12\left[1 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{72} - \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{72^2} - \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{1}{72^3} - \tfrac{5}{128}\cdot\tfrac{1}{72^4} - \cdots\right] = ?$$

Auflösung 3.

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3^2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + \tfrac{2\cdot 5}{3^3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4}\cdot\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

oder auch

$$= 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3\cdot 6}x^2 + \tfrac{2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdot 15}x^5 + \cdots$$

Ebenso

$$(1-x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3\cdot 6}x^2 - \tfrac{2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdot 15}x^5 - \cdots$$

Das wirkliche Wurzelausziehen ist also durch diese Reihen wesentlich erleichtert, namentlich in größerer Nähe von Zahlen, aus denen die Wurzel glatt ausgezogen werden kann.

Aufgabe. Bilde mit Hülfe dieser Resultate die Reihen für

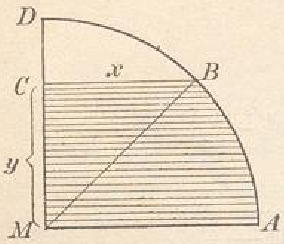
$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x};\ \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x};\ \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x};$$
$$\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}.$$

Aufgabe. Bilde die Reihen für $\frac{1}{\sqrt{1\pm x}} = (1\pm x)^{-\frac{1}{2}}$ für $\sqrt[3]{1\pm x} = (1\pm x)^{-\frac{1}{3}}$ u. s. w.

Man ist jetzt im Stande, für Kurven von der Gleichung $y = (a+bx)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}x\right)^n$, wo n auch negativ und gebrochen sein darf, die Flächenberechnung $\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}}$ und die Bestimmung der Tangentenrichtung für jeden Punkt durchzuführen.

26) Ableitung von Reihen für π, $\arcsin y$ und $\arccos y$ auf geometrischem Wege.

Fig. 139.



a) Figur 139 stellt einen Viertelkreis vom Radius 1 dar. Seine Gleichung ist $x^2 + y^2 = 1^2$, also ist der Querschnitt in Höhe y

$$x = \sqrt{1 - y^2} = (1 - y^2)^{\frac{1}{2}},$$

oder, in binomischer Reihenentwickelung,

$$x = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1!} y^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} y^4 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} y^6 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!} y^8 - \cdots.$$

Die Fläche $MABC$, d. h. die Fläche bis zur Höhe y, ist also nach der Summenformel

$$1)\quad \overset{y}{\underset{0}{F}} = \frac{y}{1} - \frac{\frac{1}{2}}{1!}\frac{y^3}{3} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\frac{y^5}{5} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\frac{y^7}{7} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}\frac{y^9}{9} - \cdots.$$

Die Fläche, bis zur Höhe 1 genommen, ist gleich $\frac{\pi}{4}$, also hat man die Reihe

$$2)\quad \frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1 \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2!} \cdot \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{3!} \cdot \frac{1}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4!} \cdot \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{5!} \cdot \frac{1}{11} - \cdots$$

oder auch

$$2^*)\quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{1}{11} - \cdots$$

b) Dagegen ist

$$\text{Sektor } MAB = MABC - MBC = \overset{y}{\underset{0}{F}} - y\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[2\overset{y}{\underset{0}{F}} - y\sqrt{1-y^2}\right],$$

also

$$\text{Sektor } MAB$$

$$= \frac{y}{2}\left[\frac{2}{1} - \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1!}\frac{y^2}{3} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\frac{y^4}{5} - \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\frac{y^6}{7} + \cdots\right]$$

$$- \frac{y}{2}\left[1 - \frac{\frac{1}{2}}{1!}y^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^4 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^6 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{y^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{y^9}{9} + \cdots\right].$$

Nun ist aber Sektor $MAB = \widehat{AB} \cdot \frac{r}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin y$. Gleichsetzung giebt

3) $$\operatorname{arc} \sin y$$
$$= \frac{y^1}{1} + \frac{1}{2} \frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{y^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{y^9}{9} + \cdots.$$

Schon die Anschauung zeigt, daß y nicht > 1 genommen werden darf.

Ohne besondere Konvergenzuntersuchung leuchtet geometrisch ein, daß für $y = 1$ die Reihe noch konvergiert. Dabei handelt es sich um $\frac{\pi}{2}$, und zwar ist

4) $$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} + \cdots.$$

Aus 2*) und 4*) folgt noch durch Subtraktion

5) $$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{11} + \cdots.$$

Nach derselben Figur ist $\operatorname{arc} \cos y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin y$, also

6) $$\operatorname{arc} \cos y = \frac{\pi}{2} - \left[y + \frac{1}{2} \frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{y^7}{7} + \cdots \right].$$

Setzt man für $\frac{\pi}{2}$ seine Reihe ein, so entsteht

7) $$\operatorname{arc} \cos y = (1 - y) + \frac{1}{2} \frac{1 - y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1 - y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1 - y^7}{7} + \cdots$$

Die Konvergenzgrenzen sind dieselben wie vorher.

[Nun ist ferner

$$\widehat{AB} = \operatorname{arc} \tan \frac{y}{x} = \operatorname{arc} \tan \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = \operatorname{arc} \sin y,$$

also

$$\operatorname{arc} \tan \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = y \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \frac{y^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{y^4}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{y^6}{7} + \cdots \right].$$

Setzt man also $\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = z$, d. h. $y = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$, so erhält man

$$\operatorname{arc} \tan z$$
$$= \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{z^2}{3(1 + z^2)} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^4}{5(1 + z^2)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{z^6}{7(1 + z^2)^3} + \cdots \right].$$

An Stelle dieser Reihe, die sich nur unbequem umwandeln läßt, wird jedoch später eine weit einfachere treten. Vorläufig möge sie zeigen, daß auch $\operatorname{arc} \tan z$ in einer nach ungeraden Potenzen aufsteigende Reihe entwickelt werden kann. Auch die letzte Reihe giebt für $z = 1$ eine brauchbare Entwickelung für $\frac{\pi}{4}$.

Später wird die Reihe für $\operatorname{arc}\sin y$ auf rein arithmetischem Wege entwickelt werden.

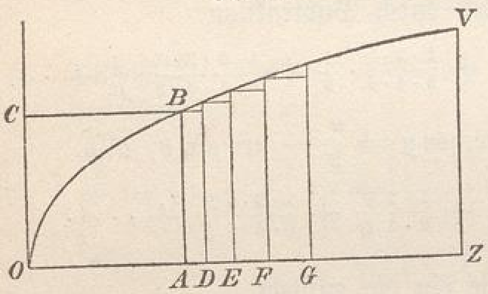
Man merke noch

$$\operatorname{arc}\sin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{32}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{128}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}\right)+\cdots].$$

V. Anwendung auf algebraische Funktionen.

27) Quadratur der Kurven $y=x^p$ für beliebiges reelles p. Figur 140 stellt ein Quadrat $OABC$ von der Seite 1 und eine Parabel höherer Ordnung von der Gleichung $y=x^p$ dar, wo jedoch p eine gebrochene positive oder negative Zahl sein soll. Die Fläche $AZVB$ soll berechnet werden. OZ soll vorläufig unbestimmt bleiben. Jetzt sei $\frac{m}{n}$ ein beliebiger echter Bruch. Man mache $OD=\left(1+\frac{m}{n}\right)$, $OE=\left(1+\frac{m}{n}\right)^2$, $OF=\left(1+\frac{m}{n}\right)^3$, und fahre so fort bis $OZ=\left(1+\frac{m}{n}\right)^n$, so daß man durch die entsprechenden Ordinaten n Flächenstreifen erhält, die man wie in der Figur als Rechtecke auffasse.

Fig. 140.



Die Grundlinien der Rechtecke sind der Reihe nach: $\frac{m}{n}$,

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^2-\left(1+\frac{m}{n}\right)=\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(1+\frac{m}{n}-1\right)=\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right),$$

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^3-\left(1+\frac{m}{n}\right)^2=\left(1+\frac{m}{n}\right)^2\left(1+\frac{m}{n}-1\right)=\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)^2,$$

und so geht es weiter bis $\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n-1}$.

Die Höhen sind der Reihe nach

$$1,\ \left(1+\frac{m}{n}\right)^p,\ \left[\left(1+\frac{m}{n}\right)^2\right]^p=\left(1+\frac{m}{n}\right)^{2p},\ \left(1+\frac{m}{n}\right)^{3p},\cdots,\left(1+\frac{m}{n}\right)^{(n-1)p}.$$

Das letzte Lot $\left(1+\frac{m}{n}\right)^{np}$ bleibt unbenutzt.

Die Inhaltssumme der Rechtecke ist also

$$\frac{m}{n}\left[1+\left(1+\frac{m}{n}\right)^{p+1}+\left(1+\frac{m}{n}\right)^{2(p+1)}+\cdots+\left(1+\frac{m}{n}\right)^{(n-1)(p+1)}\right].$$