Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

a) Die Newtonsche Reihe und ihre Konvergenz

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Im folgenden Abschnitte soll eine Potenzreihe von besonderer Wichtigkeit behandelt werden.

Sind die Konffizienten a, b, c, d ... zum Teil imaginär oder komplex, so ändert dies an der Betrachtung nichts. Ist dagegen bei einer Reihe x komplex, so kann man den reellen und den imaginären Teil der Reihe für sich betrachten und für jeden die Konvergenz untersuchen. Statt dessen kann man aber auch untersuchen, für welchen absoluten Betrag von $x + yi$, d. h. für welches $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Reihe konvergent ist. Die Grenzwerte von z liegen, geometrisch dargestellt, auf einem um Null geschlagenen Kreise, der als der Konvergenzkreis bezeichnet wird. Genauere Untersuchungen über diese Dinge überschreiten das Ziel der Schule.

IV. Die Newtonsche Reihe und der binomische Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten.

23) Die Newtonsche Reihe und ihre Konvergenz.

In Teil II, Arithmetik Nr. 30, war für ganze, positive Exponenten n bewiesen worden, daß

$$1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots = (1+x)^n$$

ist, wobei die Reihe mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede abbricht.

Bildet man nun für ganz beliebiges p die sogenannte Newtonsche Reihe

$$1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots,$$

so erstreckt sich diese im allgemeinen ins Unendliche, und es fragt sich, wann sie konvergent und wie groß dann ihre Summe ist.

Der Quotient des $(n+1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Gliedes ist

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}x^n : \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}x^{n-1}$$

oder

$$\frac{(p-n+1)}{n}x = -x + \frac{p+1}{n}x.$$

Für sehr großes n nähert sich dies dem Grenzwerte $-x$. Ist der absolute Betrag desselben angebbar kleiner als 1, so ist nach 18 d) die Reihe konvergent, ist er größer, so ist sie divergent. Der Zwischenfall, daß er gleich 1 ist, soll hier nicht untersucht werden. Für uns reicht Folgendes aus:

Die Newtonsche Reihe ist konvergent, sobald der absolute Betrag von x angebbar kleiner als 1 ist.

Um die Reihe zu summieren, muß man zunächst gewisse Eigenschaften ihrer Koeffizienten kennen lernen, wobei man vorläufig zum binomischen Satze für ganze positive Exponenten zurückzukehren hat.

Sind n und ν ganze, positive Zahlen, und bezeichnet man die Binominalkoeffizienten der Reihe nach mit $n_1, n_2, n_3, \ldots$ bezw. $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$, so ist nach dem binomischen Satze

$$(1 + x)^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + n_4 x^4 + \cdots,$$
$$(1 + x)^\nu = 1 + \nu_1 x + \nu_2 x^2 + \nu_3 x^3 + \nu_4 x^4 + \cdots.$$

Durch Multiplikation erhält man daraus eine Formel für

$$(1 + x)^n \cdot (1 + x)^\nu = (1 + x)^{n+\nu},$$

nämlich

$$(1 + x)^{n+\nu} = 1 + (n_1 + \nu_1)\, x + (n_2 + n_1 \nu_1 + \nu_2)\, x^2 + (n_3 + n_2 \nu_1 + n_1 \nu_2 + \nu_3)\, x^3 + \cdots,$$

während nach dem binomischen Satze bei entsprechender Bezeichnung der Koeffizienten zugleich ist:

$$(1 + x)^{n+\nu} = 1 + (n + \nu)_1\, x + (n + \nu)_2\, x^2 + (n + \nu)_3\, x^3 + \cdots.$$

Die Koeffizienten der entsprechenden Potenzen von x müssen, da es sich nur um eine andere Schreibweise handelt, in beiden Gleichungen übereinstimmen. Schreibt man sie in ihrer eigentlichen Form, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$\frac{n}{1} + \frac{\nu}{1} = \frac{n + \nu}{1},$$

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n}{1} \cdot \frac{\nu}{1} + \frac{\nu(\nu - 1)}{1 \cdot 2} = \frac{(n + \nu)(n + \nu - 1)}{1 \cdot 2},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\nu}{1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2} = \frac{(n+\nu)(n+\nu-1)(n+\nu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\nu}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n}{1} \cdot \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{(n+\nu)(n+\nu-1)(n+\nu-2)(n+\nu-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

u. s. w.

An jeder dieser Gleichungen erkennt man auch durch Auswertung der rechten Seiten, daß sie identische sind.

Daß sie auch für gebrochene und negative n und ν identische sein müssen*), ergiebt sich durch folgende Überlegung. Ist n fest und ν veränderlich, so handelt es sich rechts und links der Reihe nach um Ausdrücke 1., 2., 3., 4., ... Grades in Bezug auf ν. Die Ausdrücke auf der linken Seite mögen daher der Reihe nach mit $f_1(\nu), f_2(\nu), f_3(\nu) \ldots$, die auf der rechten mit $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$ ... bezeichnet werden. Sie sind der Reihe nach in Bezug auf ν vom 1., 2., 3. Grade, und sind ganze rationale Funktionen von ν, die für alle positiven ganzzahligen Werte nach dem binomischen Satze für ganzzahlige positive Exponenten übereinstimmen. Daher stimmen z. B. $f_p(\nu)$ und $\varphi_p(\nu)$, die vom p^{ten} Grade sind, für mehr als $p+1$ Werte überein, sind also nach Abschnitt 2) vollkommen identisch und stimmen für alle denkbaren Werte von ν, für gebrochene, irrationale und sogar für imaginäre und komplexe überein.

Dies gilt zunächst für jedes feste, ganzzahlige, positive n, also beim Grade p für mehr als $p+1$ solcher Werte; folglich sind sie aus demselben Grunde identisch als ganze rationale Funktionen von n. Damit ist die volle Identität nachgewiesen. Die Gleichungen gelten also, wenn man sie rein mechanisch und ohne jede Beziehung auf den binomischen Lehrsatz bildet, nicht nur für ganze und positive n, sondern auch für gebrochene, negative, sogar auch für irrationale, imaginäre und komplexe n und ν.

24) Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes.

Man bilde rein mechanisch für beliebiges n und ν die Newtonschen Reihen

$$1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + n_4 x^4 + \cdots = B(n),$$
$$1 + \nu_1 x + \nu_2 x^2 + \nu_3 x^3 + \nu_4 x^4 + \cdots = B(\nu),$$

die unter der Voraussetzung $-1 < x < +1$ konvergent sind, so daß ihre unbekannten Summen mit $B(n)$ und $B(\nu)$ bezeichnet werden dürfen.

Durch Multiplikation geht aus konvergenten Reihen wiederum eine konvergente Reihe hervor, deren Summe gleich dem Produkte der ursprünglichen Summen ist. Demnach ist hier

$$1 + (n_1 + \nu_1)\, x + (n_2 + n_1 \nu_1 + \nu_2)\, x^2$$
$$+ (n_3 + n_2 \nu_1 + n_1 \nu_2 + \nu_3)\, x^3 + \cdots = B(n) \cdot B(\nu).$$

*) Man hat dabei von der binomischen Entstehungsweise ganz abzusehen und die Gleichungen rein mechanisch hinzuschreiben.