Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

b) Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

An jeder dieser Gleichungen erkennt man auch durch Auswertung der rechten Seiten, daß sie identische sind.

Daß sie auch für gebrochene und negative n und ν identische sein müssen*), ergiebt sich durch folgende Überlegung. Ist n fest und ν veränderlich, so handelt es sich rechts und links der Reihe nach um Ausdrücke 1., 2., 3., 4., ... Grades in Bezug auf ν. Die Ausdrücke auf der linken Seite mögen daher der Reihe nach mit $f_1(\nu)$, $f_2(\nu)$, $f_3(\nu)$ ..., die auf der rechten mit $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$ ... bezeichnet werden. Sie sind der Reihe nach in Bezug auf ν vom 1., 2., 3. Grade, und sind ganze rationale Funktionen von ν, die für alle positiven ganzzahligen Werte nach dem binomischen Satze für ganzzahlige positive Exponenten übereinstimmen. Daher stimmen z. B. $f_p(\nu)$ und $\varphi_p(\nu)$, die vom p^{ten} Grade sind, für mehr als $p+1$ Werte überein, sind also nach Abschnitt 2) vollkommen identisch und stimmen für alle denkbaren Werte von ν, für gebrochene, irrationale und sogar für imaginäre und komplexe überein.

Dies gilt zunächst für jedes feste, ganzzahlige, positive n, also beim Grade p für mehr als $p+1$ solcher Werte; folglich sind sie aus demselben Grunde identisch als ganze rationale Funktionen von n. Damit ist die volle Identität nachgewiesen. Die Gleichungen gelten also, wenn man sie rein mechanisch und ohne jede Beziehung auf den binomischen Lehrsatz bildet, nicht nur für ganze und positive n, sondern auch für gebrochene, negative, sogar auch für irrationale, imaginäre und komplexe n und ν.

24) Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes.

Man bilde rein mechanisch für beliebiges n und ν die Newtonschen Reihen

$$1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + n_4 x^4 + \cdots = B(n),$$
$$1 + \nu_1 x + \nu_2 x^2 + \nu_3 x^3 + \nu_4 x^4 + \cdots = B(\nu),$$

die unter der Voraussetzung $-1 < x < +1$ konvergent sind, so daß ihre unbekannten Summen mit $B(n)$ und $B(\nu)$ bezeichnet werden dürfen.

Durch Multiplikation geht aus konvergenten Reihen wiederum eine konvergente Reihe hervor, deren Summe gleich dem Produkte der ursprünglichen Summen ist. Demnach ist hier

$$1 + (n_1 + \nu_1)x + (n_2 + n_1\nu_1 + \nu_2)x^2$$
$$+ (n_3 + n_2\nu_1 + n_1\nu_2 + \nu_3)x^3 + \cdots = B(n)\cdot B(\nu).$$

*) Man hat dabei von der binomischen Entstehungsweise ganz abzusehen und die Gleichungen rein mechanisch hinzuschreiben.

Infolge der vorher bewiesenen Identitäten darf man (für beliebiges n und ν) für die linke Seite schreiben:

$$1 + (n+\nu)_1 x + (n+\nu)_2 x^2 + (n+\nu)_3 x^3 + \cdots,$$

was man analog mit $B(n+\nu)$ zu bezeichnen hat. **Folglich gilt für die betreffenden unbekannten Summen identisch die Gleichung**

1) $$B(n) \cdot B(\nu) = B(n+\nu),$$

in der man ohne weiteres das Additionstheorem der Potenzen gleicher Grundzahl wieder erkennt.

Sind also $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ ganz beliebige Zahlen, die zur mechanischen Bildung der Koeffizienten Newtonscher Reihen benutzt sind, so gilt für den Konvergenzfall $-1 < x < +1$ die Gleichung

2) $$B(\alpha) \cdot B(\beta) \cdot B(\gamma) \cdots = B(\alpha + \beta + \gamma + \cdots).$$

Setzt man hier $\alpha = \beta = \gamma = \cdots$, so folgt für beliebiges α, aber für ganzes positives n, die Formel

3) $$[B(\alpha)]^n = B(n\alpha).$$

Setzt man z. B. $\alpha = \frac{1}{n} \cdot m$, wo m und n ganze, positive Zahlen sind, so wird

$$\left[B\left(\frac{1}{n} \cdot m\right)\right]^n = B\left(n \frac{1}{n} m\right) = B(m).$$

Für ganzes positives m ist aber $B(m) = (1+x)^m$, folglich ist

$$B\left(\frac{m}{n}\right) = [B(m)]^{\frac{1}{n}} = (1+x)^{\frac{m}{n}},$$

d. h.: **Die Gleichung**

$$1 + \frac{p}{1} x + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots = (1+x)^p$$

gilt bei $-1 < x < +1$ auch für den positiven, gebrochenen Exponenten $p = \frac{m}{n}$.

Setzt man in $B(\alpha) \cdot B(\beta) = B(\alpha + \beta)$ für β den Wert $-\alpha$ ein, so wird

$$B(\alpha) \cdot B(-\alpha) = B(\alpha - \alpha) = B(0) = (1+x)^0 = 1,$$

also ist

$$B(-\alpha) = \frac{1}{B(\alpha)}.$$

Ist nun α eine positive, gebrochene oder ganze Zahl, so ist $B(\alpha) = (1+x)^\alpha$, also

$$B(-\alpha) = \frac{1}{(1+x)^\alpha} = (1+x)^{-\alpha}.$$

Folglich: Die Gleichung

$$1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots = (1+x)^p$$

gilt bei $-1 < x < +1$ auch für den negativen (ganzen oder gebrochenen) Exponenten $p = -\alpha$.

Bemerkung. Auf den Fall, wo in $(1+x)^p$ der Exponent p irrational oder imaginär ist, braucht die Elementarmathematik nicht einzugehen. Die Potenz bedarf dann einer besonderen Definition, und diese wird durch die entsprechende Newtonsche Reihe gegeben, die dann neuen Untersuchungen zu unterwerfen ist.

25) Binomische Entwickelung irrationaler Ausdrücke.

Der binomische Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten gestattet eine derartige Fülle von Anwendungen, daß er als ein Haupthebel der neueren Mathematik bezeichnet werden darf. Zunächst finden die in Teil II über die Exponentialreihe, den Moivreschen Lehrsatz, über die Reihen für Cosinus und Sinus gegebenen Ausführungen ihre Abrundung durch das Aufheben der Beschränkung auf ganze positive n. Andere Anwendungen sind die jetzt folgenden.

Aufgabe. Die Ausdrücke $\sqrt{1+x}$ oder $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{1-x}$ oder $(1-x)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{1 \pm x}$ oder $(1 \pm x)^{\frac{1}{3}}$, sollen für $-1 < x < +1$ in Reihen entwickelt werden.

Auflösung 1.

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2}x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{1536}x^5 - \cdots.$$

Beispiel.

$$\sqrt{146} = \sqrt{144+2} = \sqrt{144}\sqrt{1+\tfrac{2}{144}} = 12\sqrt{1+\tfrac{1}{72}}$$

$$= 12\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{72} - \frac{1}{8}\,\frac{1}{72^2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{72^3} - \frac{5}{128} \cdot \frac{1}{72^4} + \cdots\right] = ?$$