Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

c) Binomische Entwicklung irrationaler Ausdrücke

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Folglich: Die Gleichung

$$1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots = (1+x)^p$$

gilt bei $-1 < x < +1$ auch für den negativen (ganzen oder gebrochenen) Exponenten $p = -\alpha$.

Bemerkung. Auf den Fall, wo in $(1+x)^p$ der Exponent p irrational oder imaginär ist, braucht die Elementarmathematik nicht einzugehen. Die Potenz bedarf dann einer besonderen Definition, und diese wird durch die entsprechende Newtonsche Reihe gegeben, die dann neuen Untersuchungen zu unterwerfen ist.

25) Binomische Entwickelung irrationaler Ausdrücke.

Der binomische Lehrsatz für gebrochene und negative Exponenten gestattet eine derartige Fülle von Anwendungen, daß er als ein Haupthebel der neueren Mathematik bezeichnet werden darf. Zunächst finden die in Teil II über die Exponentialreihe, den Moivreschen Lehrsatz, über die Reihen für Cosinus und Sinus gegebenen Ausführungen ihre Abrundung durch das Aufheben der Beschränkung auf ganze positive n. Andere Anwendungen sind die jetzt folgenden.

Aufgabe. Die Ausdrücke $\sqrt{1+x}$ oder $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{1-x}$ oder $(1-x)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{1 \pm x}$ oder $(1 \pm x)^{\frac{1}{3}}$, sollen für $-1 < x < +1$ in Reihen entwickelt werden.

Auflösung 1.

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2}x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{1536}x^5 - \cdots.$$

Beispiel.

$$\sqrt{146} = \sqrt{144+2} = \sqrt{144}\sqrt{1 + \frac{2}{144}} = 12\sqrt{1 + \frac{1}{72}}$$

$$= 12\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{72} - \frac{1}{8}\,\frac{1}{72^2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{72^3} - \frac{5}{128} \cdot \frac{1}{72^4} + \cdots\right] = ?$$

Die Reihe konvergiert sehr schnell. Weil die Vorzeichen abwechseln, liegt der wahre Wert stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Summenwerten s_n und s_{n+1}.

Auflösung 2.

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 - \tfrac{7}{1536}x^5 - \cdots.$$

Beispiel.

$$\sqrt{142} = \sqrt{144-2} = 12\sqrt{1-\tfrac{1}{72}}$$

$$= 12\left[1 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{72} - \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{72^2} - \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{1}{72^3} - \tfrac{5}{128}\cdot\tfrac{1}{72^4} - \cdots\right] = ?$$

Auflösung 3.

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3^2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2} + \tfrac{2\cdot 5}{3^3}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4}\cdot\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

oder auch

$$= 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3\cdot 6}x^2 + \tfrac{2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdot 15}x^5 + \cdots$$

Ebenso

$$(1-x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{3\cdot 6}x^2 - \tfrac{2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 - \tfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdot 15}x^5 - \cdots$$

Das wirkliche Wurzelausziehen ist also durch diese Reihen wesentlich erleichtert, namentlich in größerer Nähe von Zahlen, aus denen die Wurzel glatt ausgezogen werden kann.

Aufgabe. Bilde mit Hülfe dieser Resultate die Reihen für

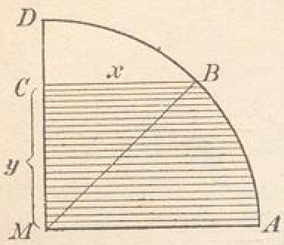
$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x};\ \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x};\ \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x};$$
$$\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}.$$

Aufgabe. Bilde die Reihen für $\frac{1}{\sqrt{1\pm x}} = (1\pm x)^{-\frac{1}{2}}$ für $\sqrt[3]{1\pm x} = (1\pm x)^{-\frac{1}{3}}$ u. s. w.

Man ist jetzt im Stande, für Kurven von der Gleichung $y=(a+bx)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}x\right)^n$, wo n auch negativ und gebrochen sein darf, die Flächenberechnung $\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}}$ und die Bestimmung der Tangentenrichtung für jeden Punkt durchzuführen.

26) Ableitung von Reihen für π, $\arcsin y$ und $\arccos y$ auf geometrischem Wege.

Fig. 139.



a) Figur 139 stellt einen Viertelkreis vom Radius 1 dar. Seine Gleichung ist $x^2 + y^2 = 1^2$, also ist der Querschnitt in Höhe y

$$x = \sqrt{1 - y^2} = (1 - y^2)^{\frac{1}{2}},$$

oder, in binomischer Reihenentwickelung,

$$x = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1!}y^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^4 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^6 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}y^8 - \cdots.$$

Die Fläche $MABC$, d. h. die Fläche bis zur Höhe y, ist also nach der Summenformel

$$1)\quad \overset{y}{\underset{0}{F}} = \frac{y}{1} - \frac{\frac{1}{2}}{1!}\frac{y^3}{3} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\frac{y^5}{5} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\frac{y^7}{7} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}\frac{y^9}{9} - \cdots.$$

Die Fläche, bis zur Höhe 1 genommen, ist gleich $\frac{\pi}{4}$, also hat man die Reihe

$$2)\quad \frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1\cdot 1}{2!}\cdot\frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1\cdot 3}{3!}\cdot\frac{1}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!}\cdot\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{5!}\cdot\frac{1}{11} - \cdots$$

oder auch

$$2^*)\quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{1}{11} - \cdots$$

b) Dagegen ist

$$\text{Sektor } MAB = MABC - MBC = \overset{y}{\underset{0}{F}} - y\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[2\overset{y}{\underset{0}{F}} - y\sqrt{1-y^2}\right],$$

also

$$\text{Sektor } MAB$$
$$= \frac{y}{2}\left[\frac{2}{1} - \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1!}\frac{y^2}{3} + \frac{2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\frac{y^4}{5} - \frac{2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\frac{y^6}{7} + \cdots\right]$$
$$- \frac{y}{2}\left[1 - \frac{\frac{1}{2}}{1!}y^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^4 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^6 + \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{y^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{y^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{y^9}{9} + \cdots\right].$$