



Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

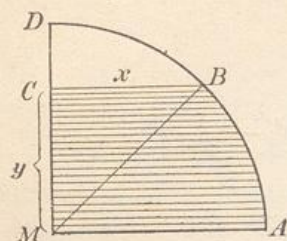
Leipzig, 1895

d) Anleitung von Reihen für π , $\arcsin y$ und $\arccos y$ auf geometrischem Wege

[urn:nbn:de:hbz:466:1-93638](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-93638)

26) Ableitung von Reihen für π , $\arcsin y$ und $\arccos y$ auf geometrischem Wege.

Fig. 139.



a) Figur 139 stellt einen Viertelkreis vom Radius 1 dar. Seine Gleichung ist $x^2 + y^2 = 1^2$, also ist der Querschnitt in Höhe y

$$x = \sqrt{1 - y^2} = (1 - y^2)^{\frac{1}{2}},$$

oder, in binomischer Reihenentwicklung,

$$x = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} y^4 - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} y^6 + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!} y^8 - \dots$$

Die Fläche $MABC$, d. h. die Fläche bis zur Höhe y , ist also nach der Summenformel

$$1) \quad \int_0^y x \, dy = \frac{y}{1} - \frac{1}{1!} \frac{y^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} \frac{y^5}{5} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} \frac{y^7}{7} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!} \frac{y^9}{9} - \dots$$

Die Fläche, bis zur Höhe 1 genommen, ist gleich $\frac{\pi}{4}$, also hat man die Reihe

$$2) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1 \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2!} \cdot \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1 \cdot 3}{3!} \cdot \frac{1}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4!} \cdot \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{5!} \cdot \frac{1}{11} - \dots$$

oder auch

$$2*) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{1}{11} - \dots$$

b) Dagegen ist

$$\text{Sektor } MAB = MABC - MBC = \int_0^y x \, dy - y \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left[2 \int_0^y x \, dy - y \sqrt{1-y^2} \right],$$

also

Sektor MAB

$$\begin{aligned} &= \frac{y}{2} \left[\frac{2}{1} - \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1!} y^2 + \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} y^4 - \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}-1\right) \left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} y^6 + \dots \right] \\ &- \frac{y}{2} \left[1 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} y^4 - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right) \left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} y^6 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{y^1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{y^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{y^9}{9} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Nun ist aber Sektor $MAB = \widehat{AB} \cdot \frac{r}{2} = \frac{1}{2} \text{ arc sin } y$. Gleichsetzung giebt

$$3) \quad \text{arc sin } y = \frac{y^1}{1} + \frac{1}{2} \frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{y^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{y^9}{9} + \dots$$

Schon die Anschauung zeigt, daß y nicht > 1 genommen werden darf.

Ohne besondere Konvergenzuntersuchung leuchtet geometrisch ein, daß für $y = 1$ die Reihe noch konvergiert. Dabei handelt es sich um $\frac{\pi}{2}$, und zwar ist

$$4) \quad \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} + \dots$$

Aus 2*) und 4*) folgt noch durch Subtraktion

$$5) \quad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{11} + \dots$$

Nach derselben Figur ist $\text{arc cos } y = \frac{\pi}{2} - \text{arc sin } y$, also

$$6) \quad \text{arc cos } y = \frac{\pi}{2} - \left[y + \frac{1}{2} \frac{y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{y^7}{7} + \dots \right].$$

Setzt man für $\frac{\pi}{2}$ seine Reihe ein, so entsteht

$$7) \quad \text{arc cos } y = (1 - y) + \frac{1}{2} \frac{1 - y^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1 - y^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1 - y^7}{7} + \dots$$

Die Konvergenzgrenzen sind dieselben wie vorher.

[Nun ist ferner

$$\widehat{AB} = \text{arc tan } \frac{y}{x} = \text{arc tan } \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = \text{arc sin } y,$$

also

$$\text{arc tan } \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = y \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \frac{y^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{y^4}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{y^6}{7} + \dots \right].$$

Setzt man also $\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = z$, d. h. $y = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$, so erhält man

$$\text{arc tan } z = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{z^2}{3(1 + z^2)} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \frac{z^4}{(1 + z^2)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \frac{z^6}{(1 + z^2)^3} + \dots \right].$$

An Stelle dieser Reihe, die sich nur unbequem umwandeln läßt, wird jedoch später eine weit einfachere treten. Vorläufig möge sie zeigen, daß auch $\text{arc tan } z$ in einer nach ungeraden Potenzen aufsteigende Reihe entwickelt werden kann. Auch die letzte Reihe giebt für $z = 1$ eine brauchbare Entwicklung für $\frac{\pi}{4}$.

Später wird die Reihe für $\arcsin y$ auf rein arithmetischem Wege entwickelt werden.

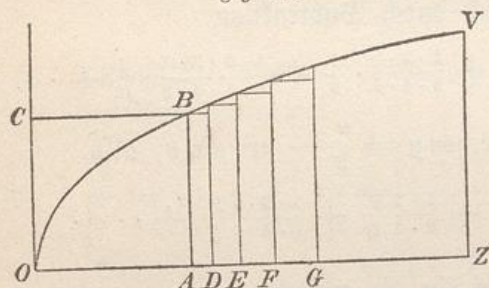
Man merke noch

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{32} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 5} \right) + \frac{1}{128} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \right) + \dots$$

V. Anwendung auf algebraische Funktionen.

27) Quadratur der Kurven $y = x^p$ für beliebiges reelles p .
Figur 140 stellt ein Quadrat $OABC$ von der Seite 1 und

Fig. 140.



eine Parabel höherer Ordnung von der Gleichung $y = x^p$ dar, wo jedoch p eine gebrochene positive oder negative Zahl sein soll. Die Fläche $AZVB$ soll berechnet werden. OZ soll vorläufig unbestimmt bleiben. Setzt sei $\frac{m}{n}$ ein beliebiger echter Bruch. Man

mache $OD = \left(1 + \frac{m}{n}\right)$, $OE = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^2$, $OF = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^3$, und fahre so fort bis $OZ = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n$, so daß man durch die entsprechenden Ordinaten n Flächenstreifen erhält, die man wie in der Figur als Rechtecke auffasse.

Die Grundlinien der Rechtecke sind der Reihe nach: $\frac{m}{n}$,

$$\left(1 + \frac{m}{n}\right)^2 - \left(1 + \frac{m}{n}\right) = \left(1 + \frac{m}{n}\right) \left(1 + \frac{m}{n} - 1\right) = \frac{m}{n} \left(1 + \frac{m}{n}\right),$$

$$\left(1 + \frac{m}{n}\right)^3 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{m}{n} - 1\right) = \frac{m}{n} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^2,$$

und so geht es weiter bis $\frac{m}{n} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n-1}$.

Die Höhen sind der Reihe nach

$$1, \left(1 + \frac{m}{n}\right)^p, \left[\left(1 + \frac{m}{n}\right)^2\right]^p = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{2p}, \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{3p}, \dots, \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{(n-1)p}.$$

Das letzte Lot $\left(1 + \frac{m}{n}\right)^{np}$ bleibt unbenußt.

Die Inhaltssumme der Rechtecke ist also

$$\frac{m}{n} \left[1 + \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{p+1} + \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{2(p+1)} + \dots + \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{(n-1)(p+1)} \right].$$