Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

V. Anwendung auf algebraische Funktionen

Später wird die Reihe für arc sin y auf rein arithmetischem Wege entwickelt werden.

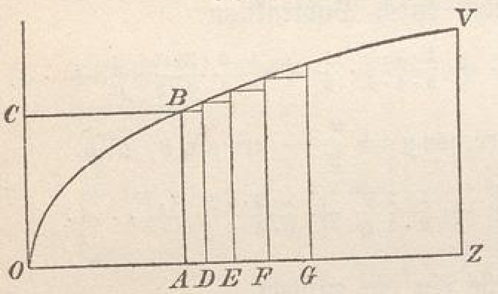
Man merke noch

$$\text{arc}\sin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{32}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{128}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}\right)+\cdots].$$

V. Anwendung auf algebraische Funktionen.

27) Quadratur der Kurven $y=x^p$ für beliebiges reelles p. Figur 140 stellt ein Quadrat $OABC$ von der Seite 1 und eine Parabel höherer Ordnung von der Gleichung $y=x^p$ dar, wo jedoch p eine gebrochene positive oder negative Zahl sein soll. Die Fläche $AZVB$ soll berechnet werden. OZ soll vorläufig unbestimmt bleiben. Jetzt sei $\frac{m}{n}$ ein beliebiger echter Bruch. Man

Fig. 140.



mache $OD=\left(1+\frac{m}{n}\right)$, $OE=\left(1+\frac{m}{n}\right)^2$, $OF=\left(1+\frac{m}{n}\right)^3$, und fahre so fort bis $OZ=\left(1+\frac{m}{n}\right)^n$, so daß man durch die entsprechenden Ordinaten n Flächenstreifen erhält, die man wie in der Figur als Rechtecke auffasse.

Die Grundlinien der Rechtecke sind der Reihe nach: $\frac{m}{n}$,

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^2-\left(1+\frac{m}{n}\right)=\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(1+\frac{m}{n}-1\right)=\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right),$$

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^3-\left(1+\frac{m}{n}\right)^2=\left(1+\frac{m}{n}\right)^2\left(1+\frac{m}{n}-1\right)=\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)^2,$$

und so geht es weiter bis $\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n-1}$.

Die Höhen sind der Reihe nach

$$1,\ \left(1+\frac{m}{n}\right)^p,\left[\left(1+\frac{m}{n}\right)^2\right]^p=\left(1+\frac{m}{n}\right)^{2p},\left(1+\frac{m}{n}\right)^{3p},\cdots,\left(1+\frac{m}{n}\right)^{(n-1)p}.$$

Das letzte Lot $\left(1+\frac{m}{n}\right)^{np}$ bleibt unbenutzt.

Die Inhaltssumme der Rechtecke ist also

$$\frac{m}{n}\left[1+\left(1+\frac{m}{n}\right)^{p+1}+\left(1+\frac{m}{n}\right)^{2(p+1)}+\cdots+\left(1+\frac{m}{n}\right)^{(n-1)(p+1)}\right].$$

Dies ist eine geometrische Reihe von n Gliedern und von der Form

$$\frac{m}{n}[1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}] = \frac{m}{n} \cdot \frac{1 - z^n}{1 - z},$$

so daß die Summe der Rechtecksinhalte wird

$$\frac{m}{n} \frac{1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n(p+1)}}{1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{p+1}}$$

oder

$$\frac{1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n(p+1)}}{\frac{n}{m}\left[1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{p+1}\right]}.$$

Der Nenner giebt, nach der binomischen Reihe für gebrochene Exponenten entwickelt,

$$\frac{n}{m}\left[1 - 1 - \frac{p+1}{1}\frac{m}{n} - \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2}\frac{m^2}{n^2} - \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{m^3}{n^3} - \cdots\right]$$

$$= -\frac{p+1}{1} - \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2}\frac{m}{n} - \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{m^2}{n^2} - \cdots.$$

Denkt man sich nun m endlich, aber n unendlich groß, so fallen die Glieder dieser ohnehin schnell konvergierenden Reihe fort, und der Nenner reduziert sich auf $-(p+1)$. Zugleich aber geht der Zähler über in $1 - e^{m(p+1)}$, und da zugleich die Treppenräume über den unendlich zahlreich gewordenen Flächenräumen verschwunden sind, so ist die Fläche $AZVB$ geworden:

$$F = \frac{1 - e^{m(p+1)}}{-(p+1)} = \frac{e^{m(p+1)} - 1}{p+1}. \tag{1}$$

Nun war $OZ = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n = e^m$, also die Abscisse $x_1 = e^m$.

Setzt man diesen Wert ein, so ergiebt sich die Fläche

$$\overset{x_1}{\underset{1}{F}} = \frac{x_1^{p+1} - 1}{p+1}. \tag{2}$$

Für ein größeres x_2 ist ebenso $\overset{x_2}{\underset{1}{F}} = \frac{x_2^{p+1} - 1}{p+1}$.

Durch Subtraktion erhält man als Fläche über $x_2 - x_1$

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_2^{p+1} - x_1^{p+1}}{p+1}. \tag{3}$$

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man von $x = 1$ nach links gehend die innerhalb des Quadrates liegende Diagrammfläche untersucht. Man hat nur $-\frac{m}{n}$ statt $+\frac{m}{n}$ in die Rechnung einzuführen, so daß es sich um die Abstände

$$1,\quad \left(1-\frac{m}{n}\right),\quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^2,\quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^3,\quad \cdots\quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^n$$

handelt.

Die Grundlinien der nach links an Breite abnehmenden Rechtecke sind dann

$$-\frac{m}{n},\quad -\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right),\quad -\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)^2,\quad \cdots\quad -\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-1}.$$

Die Höhen sind

$$1,\ \left(1-\frac{m}{n}\right)^p,\quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^{2p},\quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^{3p},\quad \cdots,\quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^{(n-1)p}.$$

Die Inhaltssumme der Rechtecke wird

$$-\frac{m}{n}\left[1+\left(1-\frac{m}{n}\right)^{p+1}+\left(1-\frac{m}{n}\right)^{2(p+1)}+\cdots+\left(1-\frac{m}{n}\right)^{(n-1)(p+1)}\right]$$

$$=-\frac{m}{n}\,\frac{1-\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n(p+1)}}{1-\left(1-\frac{m}{n}\right)^{p+1}}.$$

Die Wiederholung der früheren Behandlung mit $n=\infty$ giebt

$$F=\frac{1-e^{-m(p+1)}}{-(p+1)}=\frac{e^{-m(p+1)}-1}{p+1}.$$

Setzt man $OZ_1=\left(1-\frac{m}{n}\right)^n=e^{-m}=x_1$, so erhält man wieder die Formeln 2) und 3).

Mit Ausnahme des Exponenten $p=-1$, der auf die Fläche $\frac{x_2{}^0-x_1{}^0}{0}=\frac{0}{0}$ führt, was unbestimmt ist, sind damit die Diagramme für alle Parabeln höherer Ordnung $y=x^p$ berechnet. Der Fall -1, der auf die gleichseitige Hyperbel $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$ führt, ist aber schon vorher besonders behandelt worden.

Dieser Grenzfall scheidet zwei Gruppen von Parabeln höherer Ordnung von einander, für welche einerseits $p>-1$ und $p<-1$ ist.

a) Für $p>-1$ ist die von 1 bis 0 gehende Fläche, da $(p+1)$ positiv ist,

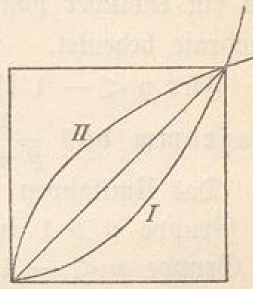
$$\overset{0}{\underset{1}{F}}=\frac{0^{p+1}-1}{p+1}=\frac{-1}{p+1},$$

also in entgegengesetzter Richtung genommen

4) $$\overset{1}{\underset{0}{F}} = \frac{1}{p+1},$$

d. h.: Für $p > -1$ schneidet die Parabel p^{ter} Ordnung den $(p+1)^{\text{ten}}$ Theil vom Quadrate ab.

Fig. 141.



Dabei ist die Parabel nach rechts steigend, sobald $p > 0$ ist, dagegen nach rechts sinkend, sobald $-1 < p < 0$ ist. Im letzteren Falle beginnt sie mit der Ordinate ∞, und trotzdem ist die ins Unendliche reichende schraffierte Fläche vom Inhalte $\frac{1}{p+1}$. Die Grenze bildet die gleichseitige Hyperbel. Bei $p > +1$ ist die Parabel von unten gesehen konvex, bei p positiv und < 1 ist sie konkav, bei $p = 1$ fällt sie mit der Diagonale zusammen.

Fig. 142.

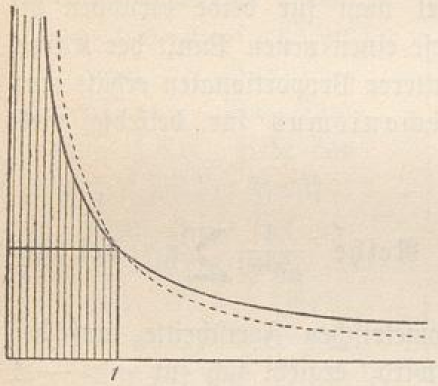
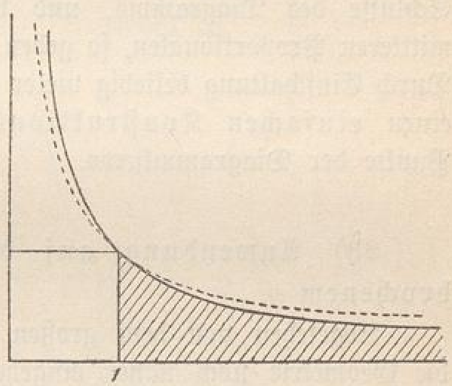


Fig. 143.



Für den gesamten Fall a) ist aber $\overset{\infty}{\underset{1}{F}} = \frac{\infty^{p+1} - 1}{p+1} = \infty$.

b) Für $p < -1$ ist $p + 1$ negativ, also

$$0^{p+1} = \frac{1}{0^{-(p+1)}} = \infty \quad \text{und} \quad \infty^{p+1} = \frac{1}{\infty^{-(p+1)}} = 0.$$

Folglich ist jetzt

$$\overset{0}{\underset{1}{F}} = \frac{0^{p+1} - 1}{p+1} = \frac{\infty - 1}{p+1} = \frac{\infty}{p+1} = -\infty,$$

weil der Nenner negativ ist, also

$$\overset{1}{\underset{0}{F}} = +\infty.$$

Dagegen ist die schraffierte Fläche (Figur 143)

$$\overset{\infty}{\underset{1}{F}} = \frac{\infty^{p+1} - 1}{p+1} = \frac{0-1}{p+1} = -\frac{1}{p+1},$$

was ein endlicher positiver Wert ist, und wieder das $\frac{1}{p+1}$-fache vom Quadrate bedeutet.

Für $p < -1$ ist also das von $x = 1$ bis $x = \infty$ gehende Diagramm das $\frac{1}{p+1}$-fache des Quadrates.

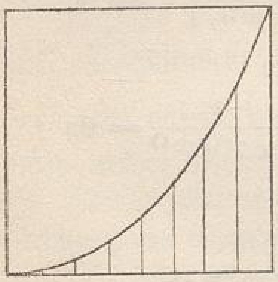
Das Umklappen um die Diagonale verwandelt bei positivem p die Gruppe $p > 1$ in die Gruppe $0 < p < 1$; bei negativem p die Gruppe $p < -1$ in die Gruppe $-1 < p < 0$. Dadurch bestätigen sich die gefundenen Resultate.

An Figur 140 wurde gezeigt, daß, wenn bei Parabeln höherer Ordnung die Abscissen eine geometrische Reihe bilden, die Ordinaten dasselbe thun. Kennt man also die Koordinaten am Anfange und Schlusse des Diagramms, und bildet man für beide Gruppen die mittleren Proportionalen, so geben diese einen neuen Punkt der Kurve. Durch Einschaltung beliebig vieler mittlerer Proportionalen erhält man einen einfachen Konstruktionsmechanismus für beliebig viele Punkte der Diagrammkurve.

28) Anwendung auf die Reihe $\frac{1}{n^{p+1}} \sum n^p$ bei gebrochenem p.

Abgesehen von dem großen geometrischen Fortschritte, auf den die Geometrie noch näher eingehen wird, ergiebt sich für $p > -1$ durch Einteilung der im Quadrate befindlichen Diagrammfläche in unendlich viele Streifen von gleicher Breite, daß die Formel

Fig. 144.



$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$
$$(\text{für } n = \infty)$$

für jedes reelle p gilt, welches größer ist, als -1.

[Daß die Formel für $p < -1$ unbrauchbar ist, ergiebt sich schon daraus, daß dann links Positives, rechts Negatives steht. Dies geht auch daraus hervor, daß für $p < -1$ der Zähler eine endliche Summe giebt, während der Nenner gleich Null wird.]

So ist z. B.

$$\frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n^{\frac{1}{3}+1}}=\frac{1^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}+1}}=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4},$$

Dagegen

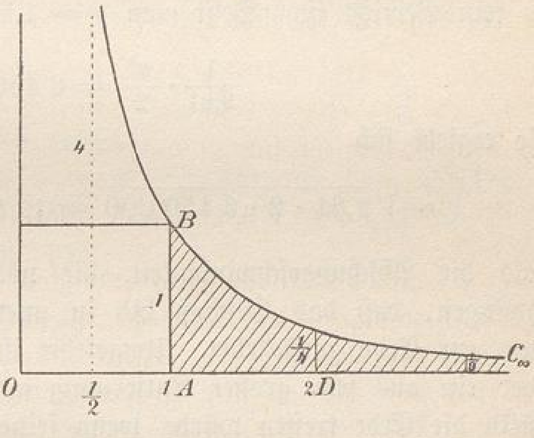
$$\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{n^{-\frac{1}{3}+1}}=\frac{1^{-\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}+\cdots+n^{-\frac{1}{3}}}{n^{-\frac{1}{3}+1}}$$

$$=\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}.$$

29) Anwendung auf die Gravitation.

Von besonderer Wichtigkeit ist geometrisch der Fall $p=-2$, denn nach Teil II Geom. Nr. 104 ist $y=x^{-2}$ die Gleichung der Gravitationskurve. Das Diagramm ABC_∞ giebt das Potential für den Punkt A an, wenn in O der anziehende Körper steht.

Fig. 145.



Ist O der Erdmittelpunkt, OA der Erdradius, und wiegt ein Körper an der Oberfläche in A 1 kg, wieviel Arbeit ist dann nötig, ihn in die Entfernungen 2, 3, 4, ... ∞ zu bringen?

Auflösung.

$$\overset{2}{\underset{1}{F}}=\frac{2^{-1}-1}{-2+1}=\frac{1-\frac{1}{2}}{2-1}=\frac{1}{2}$$

giebt die Hälfte des Quadrates. Letzteres bedeutet die Arbeit, die zur Überwindung eines Widerstandes von 1 kg längs des Weges 860 · 7500 m (Erdradius) nötig ist. Also ist zum Entfernen des Körpers bis zur Stelle D die Arbeit $\frac{1}{2}\cdot 860\cdot 7500 = 3\,225\,000$ mkg nötig.

Ebenso ist

$$\overset{3}{\underset{1}{F}} = \frac{3^{-1}-1}{-2+1} = \frac{\frac{1}{3}-1}{-1} = \frac{2}{3} \text{ des Quadrates.}$$

$$\overset{4}{\underset{1}{F}} = \frac{4^{-1}-1}{-2+1} = \frac{\frac{1}{4}-1}{-1} = \frac{3}{4} \text{ des Quadrates.}$$

Dies bedeutet 4 300 000 mkg bezw. 4 837 500 mkg Arbeit.

Endlich ist

$$\overset{\infty}{\underset{1}{F}} = \frac{-1}{-2+1} = 1,$$

d. h. gleich der Quadratfläche selbst. Das Fortschaffen des Körpers bis in unendliche Entfernung verlangt also 6 450 000 mkg Arbeit. (Potential der Anziehung zwischen Erd- und Kilogrammasse für die Erdoberfläche.)

Nun hat aber ein mit der Geschwindigkeit v fortgeschleuderter Körper die Arbeitswucht (lebendige Kraft) $m \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{q}{9{,}81} \cdot \frac{v^2}{2}$, wenn q sein Gewicht ist. Setzt man $q = 1$ kg:

$$\frac{1}{9{,}81} \cdot \frac{v^2}{2} = 6\,450\,000,$$

so ergiebt sich

$$v = \sqrt{9{,}81 \cdot 2 \cdot 6\,450\,000} = 11\,249 \text{ m} = \sim 1\tfrac{1}{2} \text{ Meile}$$

als die Abschußgeschwindigkeit, die nötig sein würde, um zu erzwingen, daß das Geschoß bis in unendliche Entfernung geht und nie zur Erde zurückkehrt. Umgekehrt ist es die Geschwindigkeit, mit der ein aus sehr großer Entfernung auf die Erde fallender Meteorstein die Erde treffen würde, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit Null war. Division durch 425 würde die Anzahl von Calorien geben, die dabei höchstens entwickelt werden können, nämlich 15 177. Ähnliche Aufgaben lassen sich für den Sonnenkörper lösen*).

Durch die Betrachtung der Kurven $y = x^{-2}$ wird also der Einblick in kosmologische und astronomische Verhältnisse gewonnen, der zum Verständnis wichtiger Forschungsresultate der neueren Zeit führt.

---

*) Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gr} = 86{,}41$ Meilen; Anzahl der Calorien für jedes kg fallender Masse 49 412 000. Ist also die Sonne durch allmählichen Zusammensturz kosmischer Massen entstanden, so erscheint ihr hoher Wärmegrad trotz der Ausstrahlung als etwas ganz Natürliches.

30) Anwendung auf adiabatische Expansions- und Kompressions-Diagramme.

Eine der wichtigsten Parabeln höherer Ordnung ist die adiabatische*) Expansionskurve, d. h. die Diagrammkurve für die Expansionsarbeit abgesperrter Gase unter der Bedingung, daß Wärme weder durch die Cylinderwände hindurch verloren geht, noch künstlich von außen hereingebracht wird. Der Dampf arbeitet also unter Arbeitsleistung und kühlt sich dabei ab, weil auf je 425 mkg geleisteter Arbeit eine Calorie verloren geht. Die Spannung nimmt also schneller ab als bei Zugrundelegung des Mariotteschen Gesetzes (konstante Temperatur).

Es handelt sich bei dem adiabatischen Zustande um das Poissonsche oder potenzierte Mariottesche Gesetz $\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^m$, wo m für atmosphärische Luft den Wert 1,41, für gesättigte Dämpfe durchschnittlich $1{,}125 = \frac{9}{8}$ hat. Die Spannungen verhalten sich also umgekehrt wie die entsprechend potenzierten Volumina. Das physikalische Gesetz läßt sich elementar nachweisen.

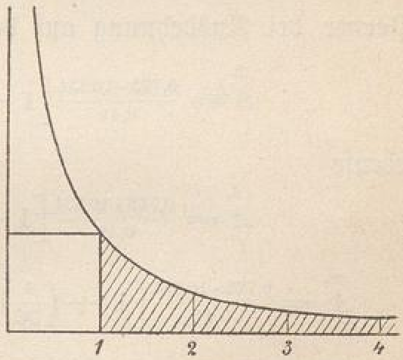
Die adiabatische Kurve hat also eine Gleichung von der Form

$$\frac{y}{y_1} = \left(\frac{x_1}{x}\right)^{1,41}, \quad \text{oder} \quad y = (y_1 {x_1}^{1,41}) x^{-1,41}.$$

(Statt 1,41 gegebenenfalls 1,125 gesetzt.)

Aufgabe. Die Kurve $y = x^{-1,41}$ hat an den Stellen $x = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ welche Ordinaten? Von 1 ab gerechnet ist das Diagramm bis 2, 3, 4, ... wie groß?

Fig. 146.



Auflösung. $y = \infty, 1, 0{,}3761, 0{,}21245, 0{,}14161.$

$$\overset{\infty}{\underset{1}{F}} = -\frac{1}{1+p} = -\frac{1}{-1{,}41+1} = \frac{1}{0{,}41} = 2{,}439,$$

$$\overset{\infty}{\underset{2}{F}} = -\frac{2^{-1,41+1}}{-1{,}41+1} = \frac{1}{0{,}41 \cdot 2^{0,41}} = 1{,}8362,$$

$$\overset{2}{\underset{1}{F}} = 2{,}439 - 1{,}8362 = 0{,}603.$$

Entsprechend sind die anderen Fragen zu lösen.

*) α = nicht, $\delta\iota\alpha$ = durch, $\beta\alpha\acute{\iota}\nu\omega$ = gehen. Es handelt sich um „Nichtdurchgang" von Wärme durch die Cylinderwände.

Aufgabe. Wie groß ist das Diagramm der Adiabate von x_1 bis x_2?

Auflösung.

$$\overset{x_2}{\underset{x^1}{F}} = (y_1 x_1^{1,41}) \frac{x_2^{-1,41+1} - x_1^{-1,41+1}}{-1,41+1} = x_1^{1,41} y_1 \frac{x_1^{-0,41} - x_2^{-0,41}}{0,41}$$

$$= x_1^{1,41-0,41} \cdot y_1 \frac{1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-0,41}}{0,41}$$

oder endlich

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_1 y_1}{0,41}\left[1 - \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0,41}\right].$$

Beispiele.

Aufgabe. Ein Kilogramm atmosphärischer Luft von einer Atmosphäre Spannung und von Null Grad Celsius dehne sich adiabatisch unter voller Arbeitsleistung auf das doppelte, dreifache, vierfache, unendlichfache des Volumens aus. Wieviel Arbeit wird dabei geleistet?

Auflösung. Ein Kilogramm Luft von solchem Zustande nimmt den Raum 0,773 cbm ein und giebt auf 1 qm Druckfläche 10 334 kg Druck. Denkt man sich die Kolbenfläche des Cylinders als 1 qm, also den Anfangsdruck y_1 als 10 334 kg, und die Entfernung x_1 des Kolbens vom Cylinderboden als 0,773 m, so hat man bei Ausdehnung auf das doppelte Volumen ($x_2 = 2 \cdot 0773$):

$$\text{Arbeit} = \frac{x_1 y_1}{0,41}\left[1 - \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0,41}\right] = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{0,41}\right] = 4819,7 \text{ mkg}.$$

Ferner bei Ausdehnung auf das dreifache Volumen:

$$\overset{3}{\underset{1}{A}} = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^{0,41}\right] = 7065,8 \text{ mkg};$$

ebenso

$$\overset{4}{\underset{1}{A}} = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{0,41}\right] = 8447,1 \text{ mkg};$$

$$\overset{\infty}{\underset{1}{A}} = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1 - \left(\frac{1}{\infty}\right)^{0,41}\right] = \frac{0,773 \cdot 10\,334}{0,41} = 19\,484 \text{ mkg}.$$

Bemerkungen. Die Schlußspannungen sind nach der Formel $\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{1,41}$ der Reihe nach $p_2 = 0,3761$ Atm., $p_3 = 0,21245$ Atm., $p_4 = 0,14161$ Atm., $p_\infty = 0$ Atm. Die Physik lehrt, daß auf je 425 mkg geleisteter Arbeit 1 Calorie verloren geht, und daß die Luft die Kapazität $C_v = 0,16851$ hat, d. h. daß 0,16851 Calorie nötig sind, um 1 kg Luft um 1^0 zu erwärmen. Bei der Ausdehnung auf das ∞-fache Volumen gehen also $\frac{19\,484}{425}$ Calorien verloren und die Temperaturerniedrigung beträgt $\frac{19\,484}{425 \cdot 0{,}16851}$ Grad Celsius, d. h. die Luft kommt auf den absoluten Nullpunkt, etwa -273^0 C. In ähnlicher Weise sind die Schlußtemperaturen bei den übrigen Fällen zu berechnen. So erkennt man z. B., daß Luft, die ein Gebirge übersteigt, infolge der beim Steigen stattfindenden Ausdehnung und der aus letzterer folgenden Arbeitsleistung sich ganz erheblich abkühlt.

Setzt man in die Arbeitsformel statt des Exponenten 0,41 den Exponenten $1{,}125 - 1 = 0{,}125 = \frac{1}{8}$ ein, so erhält man die Arbeitsleistung des Wasserdampfes in der Dampfmaschine. Schlußspannung und Schlußtemperatur ergeben sich ebenfalls (letztere mit Hülfe des entsprechenden C_v), allerdings unter der Voraussetzung, daß keine Kondensation stattfindet.

Aufgabe. Ein Kilogramm Luft von 0^0 C. und 1 Atm. Spannung werde auf $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ des Volumens zusammengepreßt. Wieviel Arbeit ist nötig, wie groß ist die Schlußtemperatur und wie groß die Schlußspannung?

Auflösung. In der Arbeitsformel sind nur die Zeichen zu wechseln, da es sich um negative gewonnene Arbeit handelt. Also:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{A}} = \frac{x_1 y_1}{0{,}41}\left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0{,}41} - 1\right].$$

Folglich erhält man in den genannten Fällen als Arbeit:

$$\overset{\frac{1}{2}v}{\underset{v}{A}} = \frac{0{,}773 \cdot 10\,334}{0{,}41}\left[2^{0{,}41} - 1\right] = 6404{,}3 \text{ mkg},$$

$$\overset{\frac{1}{3}v}{\underset{v}{A}} = \frac{0{,}773 \cdot 10\,334}{0{,}41}\left[3^{0{,}41} - 1\right] = 11\,086 \text{ mkg}$$

$$\overset{\frac{1}{4}v}{\underset{v}{A}} = 14\,913 \text{ mkg}.$$

Die Schlußspannungen ergeben sich als 2,6574, 4,7070, 7,0615 Atm.

Die Schlußtemperaturen als $89^0{,}423$ C., $154^0{,}80$ C., $208^0{,}5$ C.

Bei Dampfmaschinen, Heißluft- und Druckluftmaschinen handelt es sich wiederum um die Volldruckarbeit V, die Expansionsarbeit $\frac{V}{0{,}41}\left[1-\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{m-1}\right]$ und um die Gegenarbeit G der Atmosphäre oder des Kondensators. Die Anzahl der Pferdestärken erhält man wieder durch Multiplikation mit $\frac{2n}{60 \cdot 75} = \frac{n}{2250}$. (Vergl. Seite 139 bis 141.)

Beispiel. Eine doppeltwirkende Druckluftmaschine arbeite mit 5 Atm. Anfangsdruck. Der Kolben habe 0,4 m Durchmesser und 0,8 m Hub. Die Tourenzahl sei 100. (Der Widerstand von 1 Atm. ist zu überwinden.) Wieviel leistet sie bei verschiedenen Füllungsgraden?

Auflösung.

Bei	ganzer	Füllung (Volldruckarbeit)	184	Pferdestärken.
"	$\frac{1}{2}$	"	138,91	"
"	$\frac{1}{3}$	"	98,84	"
"	$\frac{1}{4}$	"	72,57	"

Dieselbe Aufgabe für Dämpfe $\left(m = 1{,}125 = \frac{9}{8}\right)$ bei Auspuffmaschinen.

Auflösung. Volldruck wie vorher. $\frac{1}{2}$ Füllung 145,9 Pferdestärken. $\frac{1}{3}$ Füllung 109,78 Pferdestärken. $\frac{1}{4}$ Füllung 85,01 Pferdestärken.

Dieselbe Aufgabe für Dampfmaschine mit Kondensator von $\frac{1}{12}$ Atmosphäre mittlerem Gegendruck.

Auflösung. Volldruck: 227,02 Pferdestärken. $\frac{1}{2}$ Füllung 188,24 Pferdestärken. $\frac{1}{3}$ Füllung 152,11 Pferdestärken. $\frac{1}{4}$ Füllung 127,33 Pferdestärken.

Aufgabe. Bei einer Gebläsemaschine soll Luft auf 1,2 Atmosphären zusammengepreßt und dann in die Kanäle getrieben werden. Die Kolbenfläche sei 1 qm, der Gesamthub 1 m, die Tourenzahl 60. Wie viele Pferdestärken sind theoretisch nötig?

Auflösung. 25,8 Pferdestärken.

31) Bemerkungen über algebraische Funktionen.

Handelt es sich jetzt um Funktionen, die folgendem Beispiele entsprechen,

$$y = \cdots + d_1 x^{-\frac{9}{8}} + c_1 x^{-1} + b_1 x^{-\frac{5}{6}} + a + b x^{\frac{1}{2}} + c x^{\frac{2}{3}} + d x^4 + \cdots,$$

so ist für diese $\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}}$ leicht zu bilden, nämlich für das Beispiel

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = - \cdots + \frac{d_1}{-\frac{9}{8}+1}\left(x_2^{-\frac{9}{8}+1} - x_1^{-\frac{9}{8}+1}\right) + c_1\left({}^e\lg x_2 - {}^e\lg x_1\right)$$

$$+ \frac{b_1}{-\frac{5}{6}+1}\left(x_2^{-\frac{5}{6}+1} - x_1^{-\frac{5}{6}+1}\right) + \frac{c}{\frac{2}{3}+1}\left(x_2^{\frac{2}{3}+1} - x_1^{\frac{2}{3}+1}\right) + \cdots,$$

nur darf in diesem Falle die Stelle $x = 0$ nicht im Diagramme liegen, weil dort die beiden ersten Posten unendlich Großes geben. Dagegen würde bei dem 3. Posten diese Vorsicht nicht nötig sein, weil $-\frac{5}{6} > -1$ ist. Es giebt also bedenkliche und nichtbedenkliche Unendlichkeitsstellen. Die einen sind aus dem Diagramm auszuschließen, die anderen können mit eingerechnet werden. In allen Fällen aber ist es gut, die einzelnen Quadranten für sich zu berechnen, wenn die Gesamtfläche in sämtliche hineinragt.

Auch Funktionen von der Form

$$y = (a - x)^{p_1} + (b - 2x)^{p_2} + \left(a - \frac{3}{x}\right)^{p_3} + \cdots,$$

wo die p beliebige reelle Zahlen bedeuten, kann man jetzt behandeln, nur sind die Unendlichkeitsstellen darauf hin zu untersuchen, ob man sie einrechnen darf, oder nicht. In dem einen Falle dürfen sie im Diagramme liegen, im anderen nicht.

Damit hat die Lehre von den algebraischen Funktionen, d. h. denjenigen Funktionen, bei denen mit x nur algebraische Operationen vorgenommen werden, einen vorläufigen elementaren Abschluß erlangt. Unter algebraischen Operationen werden dabei nur Addition, Multiplikation, Potenzierung und Radicierung verstanden, wobei die Anzahl der Operationen eine endliche sein soll. Die Frage, ob Ausdrücke wie $x^{\sqrt{2}}$ (wo also der Exponent irrational und der Ausdruck wegen des unendlich großen Nenners des Exponenten unendlich vieldeutig ist) als algebraisch oder transcendent aufzufassen sind, soll hier nicht entschieden werden. Dagegen werden Ausdrücke, wie a^x als transcendente Funktionen bezeichnet. Ihre Untersuchung beruht im Wesentlichen darauf, sie wie e^x in unendlichen Reihen zu entwickeln, die nur ganze Potenzen von x enthalten, wie z. B.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

Wie also endlose Dezimalbrüche sowohl rational, als auch irrational und transcendent sein können, so sind auch unendliche Summen rationaler Funktionen entweder rational, wie die geometrische Reihe, oder irrational, wie gewisse binomische Reihen, oder transcendent, wie die Exponentialreihe. Die Analogie ist eine vollständige, ihre Untersuchung aber übersteigt das Ziel der Schule.

VI. Reihenentwickelungen für einige transcendente Funktionen.

32) Logarithmus.*)

Ist $z = {}^e\lg y$, so folgt $e^z = y$, oder da (für $n = \infty$) $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ ist, $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = y$. In Folgendem soll n stets als unendlich groß gedacht werden.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$z = \frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}},$$

also ist

$$^e\lg y = \frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Man setze nun $y = 1 + x$, dann ist

$$^e\lg (1 + x) = \frac{(1 + x)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Ist also $-1 < x < +1$, so darf man nach der binomischen Reihe entwickeln, und erhält, wenn man die unendlich kleine Größe $\frac{1}{n} = \delta$ setzt:

$$^e\lg (1 + x) = \frac{(1 + x)^\delta - 1}{\delta}$$

$$= \frac{1}{\delta}\left[\left(1^\delta + \frac{\delta}{1} x + \frac{\delta(\delta - 1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\delta(\delta - 1)(\delta - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots\right) - 1\right],$$

oder

$$^e\lg (1 + x) = x + \frac{\delta - 1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3$$
$$+ \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \cdots.$$

*) Fortsetzung von Teil II, Arithmetik, Abschnitt VI (Nr. 52).