# Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1895**

a) Quadratur der Kurven y = xp für beliebiges rationales p

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Später wird die Reihe für arc sin $y$ auf rein arithmetischem Wege entwickelt werden.

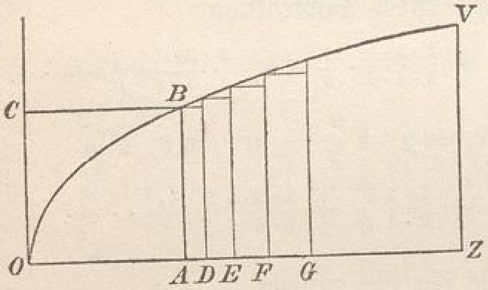
Man merke noch

$$\operatorname{arc}\sin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{32}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{128}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}\right)+\cdots].$$

## V. Anwendung auf algebraische Funktionen.

27) Quadratur der Kurven $y = x^p$ für beliebiges reelles $p$. Figur 140 stellt ein Quadrat $OABC$ von der Seite 1 und eine Parabel höherer Ordnung von der Gleichung $y = x^p$ dar, wo jedoch $p$ eine gebrochene positive oder negative Zahl sein soll. Die Fläche $AZVB$ soll berechnet werden. $OZ$ soll vorläufig unbestimmt bleiben. Jetzt sei $\frac{m}{n}$ ein beliebiger echter Bruch. Man

Fig. 140.




mache $OD = \left(1+\frac{m}{n}\right)$, $OE = \left(1+\frac{m}{n}\right)^2$, $OF = \left(1+\frac{m}{n}\right)^3$, und fahre so fort bis $OZ = \left(1+\frac{m}{n}\right)^n$, so daß man durch die entsprechenden Ordinaten $n$ Flächenstreifen erhält, die man wie in der Figur als Rechtecke auffasse.

Die Grundlinien der Rechtecke sind der Reihe nach: $\frac{m}{n}$,

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^2-\left(1+\frac{m}{n}\right)=\left(1+\frac{m}{n}\right)\left(1+\frac{m}{n}-1\right)=\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right),$$

$$\left(1+\frac{m}{n}\right)^3-\left(1+\frac{m}{n}\right)^2=\left(1+\frac{m}{n}\right)^2\left(1+\frac{m}{n}-1\right)=\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)^2,$$

und so geht es weiter bis $\frac{m}{n}\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n-1}$.

Die Höhen sind der Reihe nach

$$1,\ \left(1+\frac{m}{n}\right)^p,\ \left[\left(1+\frac{m}{n}\right)^2\right]^p=\left(1+\frac{m}{n}\right)^{2p},\ \left(1+\frac{m}{n}\right)^{3p},\ \cdots,\ \left(1+\frac{m}{n}\right)^{(n-1)p}.$$

Das letzte Lot $\left(1+\frac{m}{n}\right)^{np}$ bleibt unbenutzt.

Die Inhaltssumme der Rechtecke ist also

$$\frac{m}{n}\left[1+\left(1+\frac{m}{n}\right)^{p+1}+\left(1+\frac{m}{n}\right)^{2(p+1)}+\cdots+\left(1+\frac{m}{n}\right)^{(n-1)(p+1)}\right].$$

Dies ist eine geometrische Reihe von $n$ Gliedern und von der Form

$$\frac{m}{n}[1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}] = \frac{m}{n} \cdot \frac{1 - z^n}{1 - z},$$

so daß die Summe der Rechtecksinhalte wird

$$\frac{m}{n} \frac{1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n(p+1)}}{1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{p+1}}$$

oder

$$\frac{1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{n(p+1)}}{\frac{n}{m}\left[1 - \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{p+1}\right]}.$$

Der Nenner giebt, nach der binomischen Reihe für gebrochene Exponenten entwickelt,

$$\frac{n}{m}\left[1 - 1 - \frac{p+1}{1}\frac{m}{n} - \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2}\frac{m^2}{n^2} - \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{m^3}{n^3} - \cdots\right]$$
$$= -\frac{p+1}{1} - \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2}\frac{m}{n} - \frac{(p+1)p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{m^2}{n^2} - \ldots.$$

Denkt man sich nun $m$ endlich, aber $n$ unendlich groß, so fallen die Glieder dieser ohnehin schnell konvergierenden Reihe fort, und der Nenner reduziert sich auf $-(p+1)$. Zugleich aber geht der Zähler über in $1 - e^{m(p+1)}$, und da zugleich die Treppenräume über den unendlich zahlreich gewordenen Flächenräumen verschwunden sind, so ist die Fläche $AZVB$ geworden:

$$1) \qquad F = \frac{1 - e^{m(p+1)}}{-(p+1)} = \frac{e^{m(p+1)} - 1}{p+1}.$$

Nun war $OZ = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n = e^m$, also die Abscisse $x_1 = e^m$.

Setzt man diesen Wert ein, so ergiebt sich die Fläche

$$2) \qquad \overset{x_1}{\underset{1}{F}} = \frac{x_1^{\,p+1} - 1}{p+1}.$$

Für ein größeres $x_2$ ist ebenso $\overset{x_2}{\underset{1}{F}} = \frac{x_2^{\,p+1} - 1}{p+1}$.

Durch Subtraktion erhält man als Fläche über $x_2 - x_1$

$$3) \qquad \overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_2^{\,p+1} - x_1^{\,p+1}}{p+1}.$$

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man von $x = 1$ nach links gehend die innerhalb des Quadrates liegende Diagrammfläche untersucht. Man hat nur $-\frac{m}{n}$ statt $+\frac{m}{n}$ in die Rechnung einzuführen, so daß es sich um die Abstände

$$1, \quad \left(1-\frac{m}{n}\right), \quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^2, \quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^3, \quad \cdots \quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^n$$

handelt.

Die Grundlinien der nach links an Breite abnehmenden Rechtecke sind dann

$$-\frac{m}{n}, \quad -\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right), \quad -\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)^2, \quad \cdots \quad -\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-1}.$$

Die Höhen sind

$$1, \quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^p, \quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^{2p}, \quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^{3p}, \quad \cdots, \quad \left(1-\frac{m}{n}\right)^{(n-1)p}.$$

Die Inhaltssumme der Rechtecke wird

$$-\frac{m}{n}\left[1+\left(1-\frac{m}{n}\right)^{p+1}+\left(1-\frac{m}{n}\right)^{2(p+1)}+\cdots+\left(1-\frac{m}{n}\right)^{(n-1)(p+1)}\right]$$

$$= -\frac{m}{n}\,\frac{1-\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n(p+1)}}{1-\left(1-\frac{m}{n}\right)^{p+1}}.$$

Die Wiederholung der früheren Behandlung mit $n = \infty$ giebt

$$F = \frac{1-e^{-m(p+1)}}{-(p+1)} = \frac{e^{-m(p+1)}-1}{p+1}.$$

Setzt man $OZ_1 = \left(1-\frac{m}{n}\right)^n = e^{-m} = x_1$, so erhält man wieder die Formeln 2) und 3).

Mit Ausnahme des Exponenten $p = -1$, der auf die Fläche $\frac{x_2{}^0 - x_1{}^0}{0} = \frac{0}{0}$ führt, was unbestimmt ist, sind damit die Diagramme für alle Parabeln höherer Ordnung $y = x^p$ berechnet. Der Fall $-1$, der auf die gleichseitige Hyperbel $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ führt, ist aber schon vorher besonders behandelt worden.

Dieser Grenzfall scheidet zwei Gruppen von Parabeln höherer Ordnung von einander, für welche einerseits $p > -1$ und $p < -1$ ist.

a) Für $p > -1$ ist die von 1 bis 0 gehende Fläche, da $(p+1)$ positiv ist,

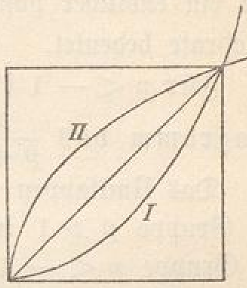
$$\overset{0}{\underset{1}{F}} = \frac{0^{p+1}-1}{p+1} = \frac{-1}{p+1},$$

also in entgegengesetzter Richtung genommen

4) $$\overset{1}{\underset{0}{F}} = \frac{1}{p+1},$$

d. h.: Für $p > -1$ schneidet die Parabel $p^{\text{ter}}$ Ordnung den $(p+1)^{\text{ten}}$ Theil vom Quadrate ab.

Fig. 141.




Dabei ist die Parabel nach rechts steigend, sobald $p > 0$ ist, dagegen nach rechts sinkend, sobald $-1 < p < 0$ ist. Im letzteren Falle beginnt sie mit der Ordinate $\infty$, und trotzdem ist die ins Unendliche reichende schraffierte Fläche vom Inhalte $\frac{1}{p+1}$. Die Grenze bildet die gleichseitige Hyperbel. Bei $p > +1$ ist die Parabel von unten gesehen konvex, bei $p$ positiv und $< 1$ ist sie konkav, bei $p = 1$ fällt sie mit der Diagonale zusammen.

Fig. 142.

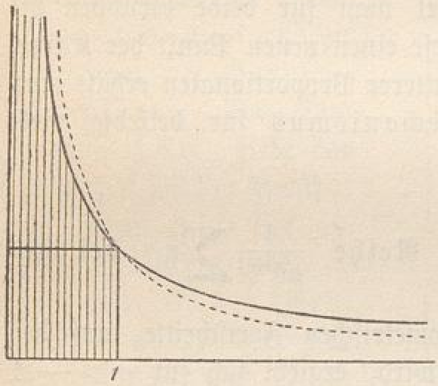
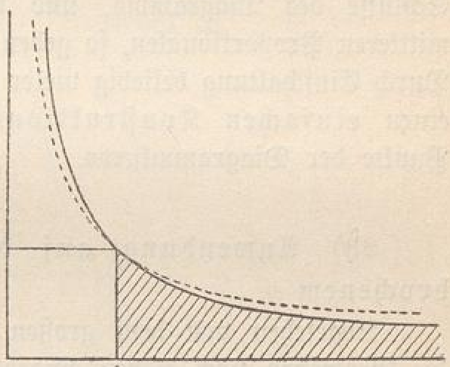



Fig. 143.




Für den gesamten Fall a) ist aber $\overset{\infty}{\underset{1}{F}} = \frac{\infty^{p+1} - 1}{p+1} = \infty.$

b) Für $p < -1$ ist $p + 1$ negativ, also

$$0^{p+1} = \frac{1}{0^{-(p+1)}} = \infty \quad \text{und} \quad \infty^{p+1} = \frac{1}{\infty^{-(p+1)}} = 0.$$

Folglich ist jetzt

$$\overset{0}{\underset{1}{F}} = \frac{0^{p+1} - 1}{p+1} = \frac{\infty - 1}{p+1} = \frac{\infty}{p+1} = -\infty,$$

weil der Nenner negativ ist, also

$$\overset{1}{\underset{0}{F}} = +\infty.$$

Dagegen ist die schraffierte Fläche (Figur 143)

$$\overset{\infty}{\underset{1}{F}} = \frac{\infty^{p+1} - 1}{p+1} = \frac{0-1}{p+1} = -\frac{1}{p+1},$$

was ein endlicher positiver Wert ist, und wieder das $\frac{1}{p+1}$-fache vom Quadrate bedeutet.

Für $p < -1$ ist also das von $x = 1$ bis $x = \infty$ gehende Diagramm das $\frac{1}{p+1}$-fache des Quadrates.

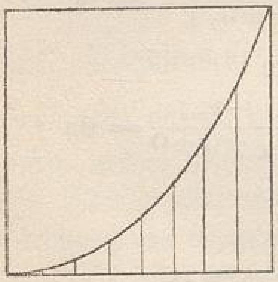
Das Umklappen um die Diagonale verwandelt bei positivem $p$ die Gruppe $p > 1$ in die Gruppe $0 < p < 1$; bei negativem $p$ die Gruppe $p < -1$ in die Gruppe $-1 < p < 0$. Dadurch bestätigen sich die gefundenen Resultate.

An Figur 140 wurde gezeigt, daß, wenn bei Parabeln höherer Ordnung die Abscissen eine geometrische Reihe bilden, die Ordinaten dasselbe thun. Kennt man also die Koordinaten am Anfange und Schlusse des Diagramms, und bildet man für beide Gruppen die mittleren Proportionalen, so geben diese einen neuen Punkt der Kurve. Durch Einschaltung beliebig vieler mittlerer Proportionalen erhält man einen einfachen Konstruktionsmechanismus für beliebig viele Punkte der Diagrammkurve.

28) Anwendung auf die Reihe $\frac{1}{n^{p+1}}\sum n^p$ bei gebrochenem $p$.

Abgesehen von dem großen geometrischen Fortschritte, auf den die Geometrie noch näher eingehen wird, ergiebt sich für $p > -1$ durch Einteilung der im Quadrate befindlichen Diagrammfläche in unendlich viele Streifen von gleicher Breite, daß die Formel

Fig. 144.



$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$
$$(\text{für } n = \infty)$$

für jedes reelle $p$ gilt, welches größer ist, als $-1$.

[Daß die Formel für $p < -1$ unbrauchbar ist, ergiebt sich schon daraus, daß dann links Positives, rechts Negatives steht. Dies geht auch daraus hervor, daß für $p < -1$ der Zähler eine endliche Summe giebt, während der Nenner gleich Null wird.]