Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

b) Anwendung auf die Reihe 1/np+1 Σ np bei gebrochenem p

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Dagegen ist die schraffierte Fläche (Figur 143)

$$\overset{\infty}{\underset{1}{F}} = \frac{\infty^{p+1} - 1}{p+1} = \frac{0-1}{p+1} = -\frac{1}{p+1},$$

was ein endlicher positiver Wert ist, und wieder das $\frac{1}{p+1}$-fache vom Quadrate bedeutet.

Für $p < -1$ ist also das von $x = 1$ bis $x = \infty$ gehende Diagramm das $\frac{1}{p+1}$-fache des Quadrates.

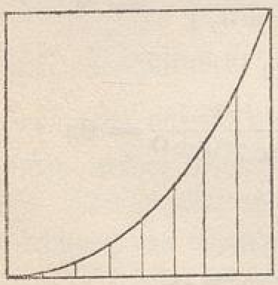
Das Umklappen um die Diagonale verwandelt bei positivem p die Gruppe $p > 1$ in die Gruppe $0 < p < 1$; bei negativem p die Gruppe $p < -1$ in die Gruppe $-1 < p < 0$. Dadurch bestätigen sich die gefundenen Resultate.

An Figur 140 wurde gezeigt, daß, wenn bei Parabeln höherer Ordnung die Abscissen eine geometrische Reihe bilden, die Ordinaten dasselbe thun. Kennt man also die Koordinaten am Anfange und Schlusse des Diagramms, und bildet man für beide Gruppen die mittleren Proportionalen, so geben diese einen neuen Punkt der Kurve. Durch Einschaltung beliebig vieler mittlerer Proportionalen erhält man einen einfachen Konstruktionsmechanismus für beliebig viele Punkte der Diagrammkurve.

28) Anwendung auf die Reihe $\frac{1}{n^{p+1}} \sum n^p$ bei gebrochenem p.

Abgesehen von dem großen geometrischen Fortschritte, auf den die Geometrie noch näher eingehen wird, ergiebt sich für $p > -1$ durch Einteilung der im Quadrate befindlichen Diagrammfläche in unendlich viele Streifen von gleicher Breite, daß die Formel

Fig. 144.



$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$
$$(\text{für } n = \infty)$$

für jedes reelle p gilt, welches größer ist, als -1.

[Daß die Formel für $p < -1$ unbrauchbar ist, ergiebt sich schon daraus, daß dann links Positives, rechts Negatives steht. Dies geht auch daraus hervor, daß für $p < -1$ der Zähler eine endliche Summe giebt, während der Nenner gleich Null wird.]

So ist z. B.

$$\frac{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n^{\frac{1}{3}+1}} = \frac{1^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+\cdots+n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}+1}} = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4},$$

Dagegen

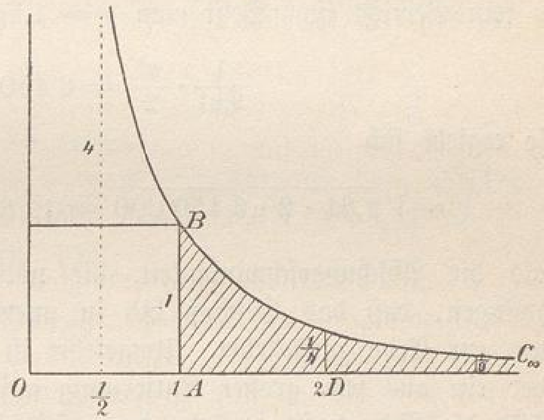
$$\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{n^{-\frac{1}{3}+1}} = \frac{1^{-\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}+\cdots+n^{-\frac{1}{3}}}{n^{-\frac{1}{3}+1}}$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

29) Anwendung auf die Gravitation.

Von besonderer Wichtigkeit ist geometrisch der Fall $p = -2$, denn nach Teil II Geom. Nr. 104 ist $y = x^{-2}$ die Gleichung der Gravitationskurve. Das Diagramm ABC_∞ giebt das Potential für den Punkt A an, wenn in O der anziehende Körper steht.

Fig. 145.



Ist O der Erdmittelpunkt, OA der Erdradius, und wiegt ein Körper an der Oberfläche in A 1 kg, wieviel Arbeit ist dann nötig, ihn in die Entfernungen 2, 3, 4, … ∞ zu bringen?

Auflösung.

$$\overset{2}{\underset{1}{F}} = \frac{2^{-1}-1}{-2+1} = \frac{1-\frac{1}{2}}{2-1} = \frac{1}{2}$$

giebt die Hälfte des Quadrates. Letzteres bedeutet die Arbeit, die zur Überwindung eines Widerstandes von 1 kg längs des Weges 860 · 7500 m (Erdradius) nötig ist. Also ist zum Entfernen des Körpers bis zur Stelle D die Arbeit $\frac{1}{2} \cdot 860 \cdot 7500 = 3\,225\,000$ mkg nötig.