Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

e) Beispiele

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Aufgabe. Wie groß ist das Diagramm der Adiabate von x_1 bis x_2?

Auflösung.

$$\overset{x_2}{\underset{x^1}{F}} = (y_1 x_1^{1,41}) \frac{x_2^{-1,41+1} - x_1^{-1,41+1}}{-1,41+1} = x_1^{1,41} y_1 \frac{x_1^{-0,41} - x_2^{-0,41}}{0,41}$$

$$= x_1^{1,41-0,41} \cdot y_1 \frac{1-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-0,41}}{0,41}$$

oder endlich

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_1 y_1}{0,41}\left[1-\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0,41}\right].$$

Beispiele.

Aufgabe. Ein Kilogramm atmosphärischer Luft von einer Atmosphäre Spannung und von Null Grad Celsius dehne sich adiabatisch unter voller Arbeitsleistung auf das doppelte, dreifache, vierfache, unendlichfache des Volumens aus. Wieviel Arbeit wird dabei geleistet?

Auflösung. Ein Kilogramm Luft von solchem Zustande nimmt den Raum 0,773 cbm ein und giebt auf 1 qm Druckfläche 10 334 kg Druck. Denkt man sich die Kolbenfläche des Cylinders als 1 qm, also den Anfangsdruck y_1 als 10 334 kg, und die Entfernung x_1 des Kolbens vom Cylinderboden als 0,773 m, so hat man bei Ausdehnung auf das doppelte Volumen ($x_2 = 2 \cdot 0773$):

$$\text{Arbeit} = \frac{x_1 y_1}{0,41}\left[1-\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0,41}\right] = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{0,41}\right] = 4819,7 \text{ mkg}.$$

Ferner bei Ausdehnung auf das dreifache Volumen:

$$\overset{3}{\underset{1}{A}} = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1-\left(\tfrac{1}{3}\right)^{0,41}\right] = 7065,8 \text{ mkg};$$

ebenso

$$\overset{4}{\underset{1}{A}} = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1-\left(\tfrac{1}{4}\right)^{0,41}\right] = 8447,1 \text{ mkg};$$

$$\overset{\infty}{\underset{1}{A}} = \frac{0,773 \cdot 10334}{0,41}\left[1-\left(\frac{1}{\infty}\right)^{0,41}\right] = \frac{0,773 \cdot 10\,334}{0,41} = 19\,484 \text{ mkg}.$$

Bemerkungen. Die Schlußspannungen sind nach der Formel $\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{1,41}$ der Reihe nach $p_2 = 0,3761$ Atm., $p_3 = 0,21245$ Atm., $p_4 = 0,14161$ Atm., $p_\infty = 0$ Atm. Die Physik lehrt, daß auf je 425 mkg geleisteter Arbeit 1 Calorie verloren geht, und daß die Luft die Kapazität $C_v = 0,16851$ hat, d. h. daß 0,16851 Calorie nötig sind, um 1 kg Luft um 1^0 zu erwärmen. Bei der Ausdehnung auf das ∞-fache Volumen gehen also $\frac{19\,484}{425}$ Calorien verloren und die Temperaturerniedrigung beträgt $\frac{19\,484}{425 \cdot 0{,}16851}$ Grad Celsius, d. h. die Luft kommt auf den absoluten Nullpunkt, etwa -273^0 C. In ähnlicher Weise sind die Schlußtemperaturen bei den übrigen Fällen zu berechnen. So erkennt man z. B., daß Luft, die ein Gebirge übersteigt, infolge der beim Steigen stattfindenden Ausdehnung und der aus letzterer folgenden Arbeitsleistung sich ganz erheblich abkühlt.

Setzt man in die Arbeitsformel statt des Exponenten 0,41 den Exponenten $1{,}125 - 1 = 0{,}125 = \frac{1}{8}$ ein, so erhält man die Arbeitsleistung des Wasserdampfes in der Dampfmaschine. Schlußspannung und Schlußtemperatur ergeben sich ebenfalls (letztere mit Hülfe des entsprechenden C_v), allerdings unter der Voraussetzung, daß keine Kondensation stattfindet.

Aufgabe. Ein Kilogramm Luft von 0^0 C. und 1 Atm. Spannung werde auf $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ des Volumens zusammengepreßt. Wieviel Arbeit ist nötig, wie groß ist die Schlußtemperatur und wie groß die Schlußspannung?

Auflösung. In der Arbeitsformel sind nur die Zeichen zu wechseln, da es sich um negative gewonnene Arbeit handelt. Also:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{A}} = \frac{x_1 y_1}{0{,}41}\left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0{,}41} - 1\right].$$

Folglich erhält man in den genannten Fällen als Arbeit:

$$\overset{\frac{1}{2}v}{\underset{v}{A}} = \frac{0{,}773 \cdot 10\,334}{0{,}41}\left[2^{0{,}41} - 1\right] = 6404{,}3 \text{ mkg},$$

$$\overset{\frac{1}{3}v}{\underset{v}{A}} = \frac{0{,}773 \cdot 10\,334}{0{,}41}\left[3^{0{,}41} - 1\right] = 11\,086 \text{ mkg}$$

$$\overset{\frac{1}{4}v}{\underset{v}{A}} = 14\,913 \text{ mkg}.$$

Die Schlußspannungen ergeben sich als 2,6574, 4,7070, 7,0615 Atm.

Die Schlußtemperaturen als $89^0{,}423$ C., $154^0{,}80$ C., $208^0{,}5$ C.

Bei Dampfmaschinen, Heißluft- und Druckluftmaschinen handelt es sich wiederum um die Volldruckarbeit V, die Expansionsarbeit $\frac{V}{0{,}41}\left[1-\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{m-1}\right]$ und um die Gegenarbeit G der Atmosphäre oder des Kondensators. Die Anzahl der Pferdestärken erhält man wieder durch Multiplikation mit $\frac{2n}{60 \cdot 75} = \frac{n}{2250}$. (Vergl. Seite 139 bis 141.)

Beispiel. Eine doppeltwirkende Druckluftmaschine arbeite mit 5 Atm. Anfangsdruck. Der Kolben habe 0,4 m Durchmesser und 0,8 m Hub. Die Tourenzahl sei 100. (Der Widerstand von 1 Atm. ist zu überwinden.) Wieviel leistet sie bei verschiedenen Füllungsgraden?

Auflösung.

Bei ganzer Füllung (Volldruckarbeit)			184	Pferdestärken.
"	$\frac{1}{2}$	"	138,91	"
"	$\frac{1}{3}$	"	98,84	"
"	$\frac{1}{4}$	"	72,57	"

Dieselbe Aufgabe für Dämpfe $\left(m = 1{,}125 = \frac{9}{8}\right)$ bei Auspuffmaschinen.

Auflösung. Volldruck wie vorher. $\frac{1}{2}$ Füllung 145,9 Pferdestärken. $\frac{1}{3}$ Füllung 109,78 Pferdestärken. $\frac{1}{4}$ Füllung 85,01 Pferdestärken.

Dieselbe Aufgabe für Dampfmaschine mit Kondensator von $\frac{1}{12}$ Atmosphäre mittlerem Gegendruck.

Auflösung. Volldruck: 227,02 Pferdestärken. $\frac{1}{2}$ Füllung 188,24 Pferdestärken. $\frac{1}{3}$ Füllung 152,11 Pferdestärken. $\frac{1}{4}$ Füllung 127,33 Pferdestärken.

Aufgabe. Bei einer Gebläsemaschine soll Luft auf 1,2 Atmosphären zusammengepreßt und dann in die Kanäle getrieben werden. Die Kolbenfläche sei 1 qm, der Gesamthub 1 m, die Tourenzahl 60. Wie viele Pferdestärken sind theoretisch nötig?

Auflösung. 25,8 Pferdestärken.

31) Bemerkungen über algebraische Funktionen.

Handelt es sich jetzt um Funktionen, die folgendem Beispiele entsprechen,

$$y = \cdots + d_1 x^{-\frac{9}{8}} + c_1 x^{-1} + b_1 x^{-\frac{5}{6}} + a + b x^{\frac{1}{2}} + c x^{\frac{2}{3}} + d x^4 + \cdots,$$

so ist für diese $\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}}$ leicht zu bilden, nämlich für das Beispiel

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = - \cdots + \frac{d_1}{-\frac{9}{8}+1}\left(x_2^{-\frac{9}{8}+1} - x_1^{-\frac{9}{8}+1}\right) + c_1\left({}^e\lg x_2 - {}^e\lg x_1\right)$$

$$+ \frac{b_1}{-\frac{5}{6}+1}\left(x_2^{-\frac{5}{6}+1} - x_1^{-\frac{5}{6}+1}\right) + \frac{c}{\frac{2}{3}+1}\left(x_2^{\frac{2}{3}+1} - x_1^{\frac{2}{3}+1}\right) + \cdots,$$

nur darf in diesem Falle die Stelle $x = 0$ nicht im Diagramme liegen, weil dort die beiden ersten Posten unendlich Großes geben. Dagegen würde bei dem 3. Posten diese Vorsicht nicht nötig sein, weil $-\frac{5}{6} > -1$ ist. Es giebt also bedenkliche und nichtbedenkliche Unendlichkeitsstellen. Die einen sind aus dem Diagramm auszuschließen, die anderen können mit eingerechnet werden. In allen Fällen aber ist es gut, die einzelnen Quadranten für sich zu berechnen, wenn die Gesamtfläche in sämtliche hineinragt.

Auch Funktionen von der Form

$$y = (a - x)^{p_1} + (b - 2x)^{p_2} + \left(a - \frac{3}{x}\right)^{p_3} + \cdots,$$

wo die p beliebige reelle Zahlen bedeuten, kann man jetzt behandeln, nur sind die Unendlichkeitsstellen darauf hin zu untersuchen, ob man sie einrechnen darf, oder nicht. In dem einen Falle dürfen sie im Diagramme liegen, im anderen nicht.

Damit hat die Lehre von den algebraischen Funktionen, d. h. denjenigen Funktionen, bei denen mit x nur algebraische Operationen vorgenommen werden, einen vorläufigen elementaren Abschluß erlangt. Unter algebraischen Operationen werden dabei nur Addition, Multiplikation, Potenzierung und Radicierung verstanden, wobei die Anzahl der Operationen eine endliche sein soll. Die Frage, ob Ausdrücke wie $x^{\sqrt{2}}$ (wo also der Exponent irrational und der Ausdruck wegen des unendlich großen Nenners des Exponenten unendlich vieldeutig ist) als algebraisch oder transcendent aufzufassen sind, soll hier nicht entschieden werden. Dagegen werden Ausdrücke, wie a^x als transcendente Funktionen bezeichnet. Ihre Untersuchung beruht im Wesentlichen darauf, sie wie e^x in unendlichen Reihen zu entwickeln, die nur ganze Potenzen von x enthalten, wie z. B.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

Wie also endlose Dezimalbrüche sowohl rational, als auch irrational und transcendent sein können, so sind auch unendliche Summen rationaler Funktionen entweder rational, wie die geometrische Reihe, oder irrational, wie gewisse binomische Reihen, oder transcendent, wie die Exponentialreihe. Die Analogie ist eine vollständige, ihre Untersuchung aber übersteigt das Ziel der Schule.

VI. Reihenentwickelungen für einige transcendente Funktionen.

32) Logarithmus.*)

Ist $z = {}^e\lg y$, so folgt $e^z = y$, oder da (für $n = \infty$) $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ ist, $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = y$. In Folgendem soll n stets als unendlich groß gedacht werden.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$z = \frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}},$$

also ist

$${}^e\lg y = \frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Man setze nun $y = 1 + x$, dann ist

$${}^e\lg(1 + x) = \frac{(1 + x)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Ist also $-1 < x < +1$, so darf man nach der binomischen Reihe entwickeln, und erhält, wenn man die unendlich kleine Größe $\frac{1}{n} = \delta$ setzt:

$${}^e\lg(1 + x) = \frac{(1 + x)^\delta - 1}{\delta}$$

$$= \frac{1}{\delta}\left[\left(1^\delta + \frac{\delta}{1}x + \frac{\delta(\delta - 1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\delta(\delta - 1)(\delta - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots\right) - 1\right],$$

oder

$${}^e\lg(1 + x) = x + \frac{\delta - 1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots.$$

*) Fortsetzung von Teil II, Arithmetik, Abschnitt VI (Nr. 52).