Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

VI. Reihenentwicklungen für einige transcendente Funktionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

rationaler Funktionen entweder rational, wie die geometrische Reihe, oder irrational, wie gewisse binomische Reihen, oder transcendent, wie die Exponentialreihe. Die Analogie ist eine vollständige, ihre Untersuchung aber übersteigt das Ziel der Schule.

VI. Reihenentwickelungen für einige transcendente Funktionen.

32) Logarithmus.*)

Ist $z = {}^{e}\lg y$, so folgt $e^z = y$, oder da (für $n = \infty$) $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ ist, $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = y$. In Folgendem soll n stets als unendlich groß gedacht werden.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$z = \frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}},$$

also ist

$${}^{e}\lg y = \frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Man setze nun $y = 1 + x$, dann ist

$${}^{e}\lg(1 + x) = \frac{(1 + x)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Ist also $-1 < x < +1$, so darf man nach der binomischen Reihe entwickeln, und erhält, wenn man die unendlich kleine Größe $\frac{1}{n} = \delta$ setzt:

$$\begin{aligned} {}^{e}\lg(1 + x) &= \frac{(1 + x)^{\delta} - 1}{\delta} \\ &= \frac{1}{\delta}\left[\left(1^{\delta} + \frac{\delta}{1}x + \frac{\delta(\delta - 1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\delta(\delta - 1)(\delta - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots\right) - 1\right], \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} {}^{e}\lg(1 + x) = x + \frac{\delta - 1}{1 \cdot 2}x^2 &+ \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 \\ &+ \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots. \end{aligned}$$

*) Fortsetzung von Teil II, Arithmetik, Abschnitt VI (Nr. 52).

Läßt man δ unendlich klein werden, so hat man für die Grenze $\delta = 0$ und für $-1 < x < 1$:

$$1) \qquad {}^e\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Setzt man $(-x)$ für x ein, so folgt

$$2) \qquad {}^e\lg(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots.$$

Durch Subtraktion erhält man die Reihe für ${}^e\lg(1+x) - {}^e\lg(1-x)$ oder

$$3) \qquad {}^e\lg\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right]$$
für $-1 < x < 1$.

Setzt man $\frac{1+x}{1-x} = a$, so ist $x = \frac{a-1}{a+1}$ zu setzen, was für jedes positive a absolut genommen kleiner als 1 ist. So folgt

$$4) \qquad {}^e\lg a = 2\left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \cdots\right]$$
für jedes positive a.

Setzt man hier $a = 1 + z$, so wird $\frac{a-1}{a+1} = \frac{z}{2+z}$, und es gilt für $-1 < z < \infty$ die Reihe

$$5) \quad {}^e\lg(1+z) = 2\left[\frac{z}{2+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2+z}\right)^5 + \cdots\right],$$

die für kleine z sehr schnell konvergiert.

Hier setze man $z = \frac{y}{x}$, also $1 + z = 1 + \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x}$, folglich $\lg(1+z) = \lg\frac{x+y}{x} = \lg(x+y) - \lg x$. Dabei wird ferner $\frac{z}{2+z} = \frac{\frac{y}{x}}{2+\frac{y}{x}} = \frac{y}{2x+y}$. Setzt man alles in 5) ein und bringt man $-\lg x$ nach rechts, so ergiebt sich

$$6) \quad \lg(x+y) = \lg x + 2\left[\frac{y}{2x+y} + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \cdots\right]$$
für $\frac{y}{x} > -1$.

Mit Hülfe dieser Reihen ist man im Stande, die natürlichen Logarithmen gegebener Zahlen sehr schnell zu berechnen, wobei man, um schnelle Konvergenz zu erreichen, gewisse Kunstgriffe anzuwenden hat.

Um z. B. ${}^e\lg 2$ zu berechnen, kann man $\lg\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\right) = \lg\frac{3}{2} + \lg\frac{4}{3}$ zu Grunde legen, Logarithmen, die man erhält, wenn man in Gleichung 3) $x = \frac{1}{5}$ bezw. $x = \frac{1}{7}$ einsetzt. Dies giebt die schnell konvergierenden Reihen

$$\begin{aligned} {}^e\lg\frac{3}{2} &= 2\left[\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} + \frac{1}{7\cdot 5^7} + \frac{1}{9\cdot 5^9} + \cdots\right] \\ &= 0{,}405\,465\,108\,108\,164\ldots, \\ {}^e\lg\frac{4}{3} &= 2\left[\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} + \frac{1}{7\cdot 7^7} + \frac{1}{9\cdot 7^9} + \cdots\right] \\ &= 0{,}287\,682\,072\,451\,781. \end{aligned}$$

Die Summe giebt ${}^e\lg 2 = 0{,}693\,147\,180\,559\,945\ldots$

Um auf ${}^e\lg 10$ zu gelangen, benutze man Gleichung 3) für $x = \frac{1}{9}$. Dies giebt

$$\begin{aligned} {}^e\lg\frac{5}{4} &= 2\left[\frac{1}{1\cdot 9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \frac{1}{7\cdot 9^7} + \cdots\right] \\ &= 0{,}223\,143\,551\,314\,210\ldots. \end{aligned}$$

Nun ist $10 = \frac{5}{4}\cdot 2^3$, also ${}^e\lg 10 = {}^e\lg\frac{5}{4}\,e + 3\lg 2$. Man erhält

$${}^e\lg 10 = 2{,}302\,585\,092\,994\,045\ldots$$

Hieraus ergiebt sich als Modul der Briggschen Logarithmen

$$m = \frac{1}{{}^e\lg 10} = 0{,}434\,294\,481\,903\,251\ldots$$

Reihe 3) ist also sehr brauchbar zur Berechnung der Logarithmen von Brüchen, die nahe bei 1 liegen.

Behufs der Entwickelung von a^x setze man $a = e^\alpha$, also $\alpha = {}^e\lg a$. Dann ist

$$a^x = (e^\alpha)^x = e^{\alpha x} = e^{x\lg a} = 1 + \frac{x\lg a}{1!} + \frac{(x\lg a)^2}{2!} + \frac{(x\lg a)^3}{3!} + \cdots$$

32) Reihen für π und cyklometrische Funktionen.

In Teil II war bewiesen

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+i}{1-i}.$$

Man wende hierauf die Reihe 3) an, dann wird

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\,2\left[i + \frac{i^3}{3} + \frac{i^5}{5} + \frac{i^7}{7} + \cdots\right],$$

oder

7) $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots,$$

die wegen der wechselnden Zeichen noch konvergent ist*). Die Konvergenz ist aber so schwach, daß mehrere Millionen Glieder berechnet werden müßten, wenn man π bis auf 7 Dezimalstellen genau berechnen wollte.

Dies ist die Leibnitzsche Reihe für $\frac{\pi}{4}$.

Die früher gefundenen Reihen für $\frac{\pi}{4}$ bezw. $\frac{\pi}{2}$ waren brauchbarer. Noch bessere werden später gegeben.

Die hier zu Grunde gelegte Formel war nach Teil II ein besonderer Fall der folgenden:

$$e^{2iz} = \frac{1 + i \tan z}{1 - i \tan z}.$$

Aus ihr folgt nach 3)

$$8)\quad z = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + i \tan z}{1 - i \tan z} = \tan z - \frac{\tan^3 z}{3} + \frac{\tan^5 z}{5} - \frac{\tan^7 z}{7} + \cdots,$$

wo jedoch $-1 < \tan z < +1$ sein muß, d. h. $-45^0 < \alpha < 45^0$.

Setzt man hier $\tan z = x$, also $z = \operatorname{arc} \tan x$, so folgt

$$9)\qquad \operatorname{arc} \tan x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

was für $-1 < x < +1$ konvergiert. Für den Grenzfall $x = +1$ erhält man wieder die Reihe 7).

In Gleichung 8) war z in einer nach Potenzen von $\tan z$ fortschreitenden Reihe entwickelt. Da $\tan z$ eine ungerade Funktion von z ist, so konnten nur ungerade Potenzen vorkommen, denn für gerade Potenzen würde die Vertauschung von $+z$ und $-z$ gleichgültig sein, die für die linke Seite nicht gleichgültig ist.

Da nun $\sin x$ ebenfalls eine ungerade Funktion von x ist, so läßt sich vermuten, daß x in einer Reihe entwickelt werden kann, die nach ungeraden Potenzen von $\sin x$ fortschreitet. Danach würde sein:

$$\text{a)}\qquad x = a \sin x + b \sin^3 x + c \sin^5 x + d \sin^7 x + \cdots,$$

wo die Koeffizienten unbestimmt sind, und ebenso

$$y = a \sin y + b \sin^3 y + c \sin^5 y + d \sin^7 y + \cdots,$$

folglich

$$x - y = a(\sin x - \sin y) + b(\sin^3 x - \sin^3 y) + c(\sin^5 x - \sin^5 y) + \cdots,$$

also auch

$$\text{b)}\quad \frac{x - y}{\sin x - \sin y} = a + b \frac{\sin^3 x - \sin^3 y}{\sin x - \sin y} + c \frac{\sin^5 x - \sin^5 y}{\sin x - \sin y} + \cdots.$$

*) Die Untersuchung, ob die Konvergenz bedingt oder unbedingt ist, soll hier unterbleiben.

Auf der linken Seite ist

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\frac{x-y}{2} \cos\frac{x+y}{2},$$

also für den Fall, daß y nahe an x und $(x-y)$ sehr klein, also auch $\sin\frac{x-y}{2}$ sehr nahe an $\frac{x-y}{2}$ ist:

$$\frac{x-y}{\sin x - \sin y} = \frac{x-y}{(x-y)\cos\frac{2x}{2}} = \frac{1}{\cos x}.$$

Rechts dagegen ist jedes

$$\frac{\sin^n x - \sin^n y}{\sin x - \sin y} = \sin^{n-1} x + \sin^{n-2} x \sin y + \sin^{n-3} x \sin^2 y + \cdots$$
$$+ \sin x \sin^{n-2} y + \sin^{n-1} y,$$

also steht, wenn y sehr nahe an x liegt, rechts $n \sin^{n-1} x$ für jedes n. Demnach geht b) über in

$$\frac{1}{\cos x} = a + 3b \sin^2 x + 5c \sin^4 x + 7d \sin^6 x + \cdots.$$

Nun ist aber zugleich

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = (1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}\sin^2 x + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^4 x + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\sin^6 x + \cdots,$$

folglich muß sein

$$a = 1, \quad 3b = \tfrac{1}{2}, \quad 5c = \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \quad 7d = \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}, \quad \text{u. s. w.}$$

Damit sind die Koeffizienten bestimmt, und Gleichung a) geht über in

$$10)\quad x = \sin x + \tfrac{1}{2}\frac{\sin^3 x}{3} + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^5 x}{5} + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\sin^7 x}{7} + \cdots.$$

Demnach ist, wie schon früher geometrisch gefunden war*),

$$11)\quad \operatorname{arc}\sin x = x + \tfrac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{x^9}{9}\cdots,$$

woraus für $x = 1$ die schon gefundene Reihe für $\frac{\pi}{2}$ und für $\operatorname{arc}\cos x$ nachstehende ebenfalls schon besprochene Reihe folgt:

$$12)\qquad \operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \left[x + \tfrac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots\right].$$

---

*) Die Übereinstimmung mit dem früheren Resultate möge hinreichen, gewissen Zweifeln bezüglich der Strenge der Beweisführung, die hier erhoben werden könnten, vorläufig zu begegnen.

[34) Die Reihen für $\tan x$ und $\cot x$.

Der Vollständigkeit halber könnte noch auf die Reihen für $\tan x$ und $\cot x$ eingegangen werden.

Nach dem Früheren ist z. B.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots}.$$

Da man im Konvergenzfalle die Division mechanisch ausführen darf, so erhält man

$$\tan x = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + \frac{272x^7}{7!} + \cdots$$
$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{215} + \cdots.$$

Da jedoch die Division bald unbequem wird, soll auf diese weniger übersichtliche Reihe nicht weiter eingegangen werden. Mit Hülfe der Bernoullischen Zahlen ist es gelungen, eine übersichtlichere Form zu gewinnen. Dies geht aber für die Schule zu weit, ebenso, wie die Untersuchung des Konvergenzgebietes.]

35) Quadratur und Tangentenproblem für die behandelten transcendenten Funktionen.

Nachdem die betreffenden Funktionen nach aufsteigenden Potenzen von x in Reihen entwickelt sind, gelten von ihnen die Flächen- und Tangentensätze, die für ganze rationale Funktionen gelten.

So ist z. B. für $y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$, also für die logarithmische Kurve,

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1}{1} + \frac{x_1^{\,2}}{2!} + \frac{x_1^{\,3}}{3!} + \frac{x_1^{\,4}}{4!} + \cdots = e^{x_1} - 1,$$

folglich

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = e^{x_2} - e^{x_1}.$$

Die Fläche von $-\infty$ bis 0 ist also gleich 1, dagegen $\overset{x}{\underset{-\infty}{F}} = e^x$.

Ferner ist an jeder Stelle x die Tangentenrichtung zu bestimmen aus

$$\tan \alpha = 1 + \frac{2x}{1 \cdot 2} + \frac{3x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x.$$

Aus $\tan \alpha = \frac{e^x}{1}$ folgt, daß die Projektion der Tangente auf die X-Achse, die sog. Subtangente, an jeder Stelle gleich 1 ist.

Für $y = \sin x$, die besonders wichtige Sinus-Kurve, ist

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1^{\,2}}{1!2} - \frac{x_1^{\,4}}{3!4} + \frac{x_1^{\,6}}{5!6} - \cdots = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots = 1 - \cos x_1,$$

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = (1 - \cos x_2) - (1 - \cos x_1) = \cos x_1 - \cos x_2.$$

Die Tangentenrichtung an jeder Stelle bestimmt sich aus

$$\tan\alpha = \frac{1x^0}{1!} - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$= \cos x.$$

Entsprechend ist es mit den übrigen in Reihen entwickelten Funktionen.

Nur liegen bisweilen die geschlossenen Ausdrücke etwas versteckt. So ist z. B. für $y = \arcsin x$

$$\overset{x}{\underset{0}{F}} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{x^4}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\frac{x^6}{6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\frac{x^8}{8} + \cdots$$
$$= \left[\frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^6}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{y^8}{7} + \cdots\right]$$
$$- \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^6}{6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^8}{8} + \cdots\right]$$
$$= x\cdot\arcsin x - 1 + \left[1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^6}{6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^8}{8} - \cdots\right]$$
$$= x\cdot\arcsin x - 1 + \sqrt{1 - x^2}.$$

Also

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = x_1 \arcsin x_1 + \sqrt{1 - x_1^{\,2}} - 1$$

und

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = (x_2 \arcsin x_2 - x_1 \arcsin x_1) + \left(\sqrt{1 - x_2^{\,2}} - \sqrt{1 - x_1^{\,2}}\right).$$

Die Tangentenrichtung bestimmt sich aus

$$\tan\alpha = 1 + \frac{1}{2}\frac{3x^2}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{5x^4}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{7x^6}{7} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8 + \cdots,$$

oder

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Aus den früher besprochenen Anwendungen der algebraischen Analysis ergiebt sich, welcher außerordentliche Fortschritt für die analytische

Geometrie und Flächenberechnung, für die Körperberechnungen und für die Mechanik mit diesen Reihenentwickelungen gewonnen ist.

Die überall vermerkten Einschränkungen aber deuten schon hinreichend an, daß damit erst die Vorhöfe einer höheren Wissenschaft betreten sind, in der die Theorie des Unendlichkleinen zum eigentlichen Austrage kommt und der Funktionsbegriff in seiner ganzen Tragweite sichtbar wird. Dies ist die Differential- und Integralrechnung, die Hand in Hand mit der allgemeinen Funktionentheorie ganz neue Bereiche des mathematischen Denkens erschlossen hat, die aber der Hochschule vorbehalten werden müssen.

36) Nachträge über die Berechnung der Zahl π.

Die Wichtigkeit der Zahl π für die niedere und höhere Mathematik hat es wünschenswert erscheinen lassen, schnell konvergierende Reihen für ihre Berechnung zu finden. Die Leibnitzsche Reihe war ganz unbrauchbar.

Durch Einsetzung von $x = \frac{\pi}{6}$ in die Reihe für $\operatorname{arc} \tan x$ fand man, da $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist,

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3(\sqrt{3})^3} + \frac{1}{5(\sqrt{3})^5} + \frac{1}{7(\sqrt{3})^7} + \cdots,$$

also

$$\pi = 2\sqrt{3}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{3\cdot 3^1} + \frac{1}{3\cdot 5^2} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \cdots\right],$$

womit es unter großem Zeitaufwand gelang, π auf etwa 100 Stellen genau zu berechnen. Besser ist schon die Eulersche Reihenentwickelung mit Hülfe der Formel

$$4)\qquad \begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{arc}\tan\frac{1}{2} + \operatorname{arc}\tan\frac{1}{3} \\ &= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots\right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Die Formel 4) ist folgendermaßen entstanden. Euler wollte statt $\tan\alpha = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ einen kleineren Wert haben, setzte daher in $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$ willkürlich $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, woraus sich $\tan\beta = \frac{1}{3}$ ergiebt.

Auf demselben Grundgedanken fußend kann man noch weit schneller konvergierende Reihen finden. So ist z. B. folgender Gang eingeschlagen worden.

In $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1$ setzt man willkürlich $\tan\alpha = \frac{1}{5}$, so daß sich ergiebt $\tan\beta = \frac{2}{3}$, also

a) $$\operatorname{arc}\tan 1 = \operatorname{arc}\tan\frac{1}{5} + \operatorname{arc}\tan\frac{2}{3}\,.$$

Um das ungünstige $\operatorname{arc}\tan\frac{2}{3}$ zu entfernen, setzt man in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2}{3}$ $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ ein, woraus $\tan\beta = \frac{7}{17}$ folgt. Man erhält so

b) $$\operatorname{arc}\tan\frac{2}{3} = \operatorname{arc}\tan\frac{1}{4} + \operatorname{arc}\tan\frac{7}{17}\,.$$

Um das ungünstige $\frac{7}{17}$ zu entfernen, setzt man in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{7}{17}$ wiederum $\tan\alpha = \frac{1}{5}$, was $\tan\beta = \frac{9}{46}$ giebt. Es wird

c) $$\operatorname{arc}\tan\frac{7}{17} = \operatorname{arc}\tan\frac{1}{5} + \operatorname{arc}\tan\frac{9}{46}\,.$$

Einsetzung von $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{9}{46}$ giebt schließlich $\tan\beta = -\frac{1}{239}$ und

d) $$\operatorname{arc}\tan\frac{9}{46} = \operatorname{arc}\tan\frac{1}{5} - \operatorname{arc}\tan\frac{1}{239}\,.$$

Bei Summierung der Gleichungen a) bis d) hebt sich alles weg, bis auf die Clausensche Formel

5) $$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc}\tan 1 = 4\operatorname{arc}\tan\frac{1}{5} - \operatorname{arc}\tan\frac{1}{239},$$

die schon recht brauchbare Reihen giebt.

Um noch Brauchbareres zu erhalten, setzte man in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{1}{5}$ ein $\tan\alpha = \frac{1}{10}$, was $\tan\beta = \frac{5}{51}$ giebt, bildete also

e) $$\operatorname{arc}\tan\frac{1}{5} = \operatorname{arc}\tan\frac{1}{10} + \operatorname{arc}\tan\frac{5}{51},$$

setzte in $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{5}{51}$ wiederum $\tan\alpha = \frac{1}{10}$, was $\tan\beta = -\frac{1}{515}$ ergab, also

f) $$\operatorname{arc}\tan\frac{5}{51} = \operatorname{arc}\tan\frac{1}{10} - \operatorname{arc}\tan\frac{1}{515}\,.$$

Erweitert man die Gleichungen e) und f) mit dem Faktor 4 und addiert man die rechten und ebenso die linken Seiten der neuen Gleichungen und der Formel 5), so entsteht schließlich die Meißelsche Formel:

6) $$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc}\tan 1 = 8\operatorname{arc}\tan\frac{1}{10} - \operatorname{arc}\tan\frac{1}{239} - 4\operatorname{arc}\tan\frac{1}{515}\,.$$

Nur eine geringe Anzahl der Glieder von den Reihen für die genannten arc tan ist nötig, um mit 12 Stellen Genauigkeit

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,59\ldots$$

zu geben.

Selbstverständlich kann man die Konvergenz noch weiter treiben. Entsprechende oder dieselben Formeln erhielt Schellbach durch Nachweis gewisser Identitäten, z. B.

$$e^{2i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{2+i}{2-i}\cdot\frac{3+i}{3-i} = \frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\cdot\frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}},$$

woraus folgt

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\lg\left(\frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\cdot\frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}}\right) = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}} + \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}},$$

was der Gleichung 4) entspricht.

Ebenso ist

$$\frac{2+i}{2-i} = \frac{3+i}{3-i}\cdot\frac{7+i}{7-i}, \quad \text{also} \quad \frac{1+i}{1-i} = \left(\frac{3+i}{3-i}\right)^2\left(\frac{7+i}{7-i}\right),$$

folglich gilt die Vegasche Formel

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{i}\lg\frac{1+\frac{i}{3}}{1-\frac{i}{3}} + \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\frac{i}{7}}{1-\frac{i}{7}}$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot3^3} + \frac{1}{5\cdot3^5} - \frac{1}{7\cdot3^7} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3\cdot7^3} + \frac{1}{5\cdot7^5} - \frac{1}{7\cdot7^7} + \cdots\right).$$

Ähnlich ist $(5 \pm i)^4 = 4\,(119 \pm 120\,i)$, folglich

$$\left(\frac{5+i}{5-i}\right)^4 = \frac{119+120\,i}{119-120\,i} = \frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{239+i}{239-i}.$$

So findet man wieder die Clausensche Formel

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{2i}\lg\frac{1+\frac{i}{5}}{1-\frac{i}{5}} - \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\frac{i}{239}}{1-\frac{i}{239}}.$$

Um auch die Meißelsche Formel zu finden, zeige man, daß $(10 \pm i)^2 = (99 \pm 20\,i)$, also

$$\left(\frac{10+i}{10-i}\right)^2 = \frac{99+20\,i}{99-20\,i} = \frac{5+i}{5-i}\cdot\frac{515+i}{515-i}$$

ist, folglich

$$\frac{5+i}{5-i} = \left(\frac{10+i}{10-i}\right)^2 : \frac{515+i}{515-i}$$

und

$$\frac{1+i}{1-i} = \left(\frac{10+i}{10-i}\right)^8 : \left[\frac{239+i}{239-i} \cdot \left(\frac{515+i}{515-i}\right)^4\right].$$

So ergiebt sich

$$\frac{\pi}{4} = \frac{8}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{10}}{1-\frac{i}{10}} - \frac{1}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{239}}{1-\frac{i}{239}} - \frac{4}{2i} \lg \frac{1+\frac{i}{515}}{1-\frac{i}{515}}.$$

VII. Zusammenstellung der wichtigsten Resultate.

1) Die ganzen rationalen Funktionen n^{ten} Grades $f(x)$ und $\varphi(x)$ sind identisch, wenn sie für $(n+1)$ Werte des Arguments übereinstimmen.

2) Für $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots + kx^n$ ist

$$\overset{x_1}{\underset{1}{F}} = \frac{ax_1}{1} + \frac{bx_1^{\,2}}{2} + \frac{cx_1^{\,3}}{3} + \frac{dx_1^{\,4}}{4} + \cdots + \frac{kx_1^{\,n+1}}{n+1},$$

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{a(x_2-x_1)}{1} + \frac{b(x_2^{\,2}-x_1^{\,2})}{2} + \frac{c(x_2^{\,3}+x_1^{\,3})}{3} + \cdots + \frac{k(x_2^{\,n+1}-x_1^{\,n+1})}{n+1},$$

und an jeder Stelle x ist die Neigung der Tangente

$$\tan\alpha = b + 2cx + 3dx^2 + \cdots + nkx^{n-1}.$$

3) Für $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ ist

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = \frac{x_2 - x_1}{6}\,[y_1 + 4y_m + y_2],$$

wo y_m zur Stelle $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ gehört. (Simpson-Regel.)

4) Zur angenäherten Berechnung von Diagrammen dient $\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}} =$

$$\frac{x_n - x_0}{6 \cdot \frac{n}{2}}\,[(h_0 + h_n) + 2(h_2 + h_4 + h_6 + \cdots + h_{n-2}) + 4(h_1 + h_3 + h_5 + \cdots + h_{n-1})].$$

5) Für die gleichseitige Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ ist

$$\overset{x_1}{\underset{1}{F}} = {}^e\!\lg x_1, \quad \overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = {}^e\!\lg \frac{x_2}{x_1}.$$