Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

a) Logarithmus

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

rationaler Funktionen entweder rational, wie die geometrische Reihe, oder irrational, wie gewisse binomische Reihen, oder transcendent, wie die Exponentialreihe. Die Analogie ist eine vollständige, ihre Untersuchung aber übersteigt das Ziel der Schule.

VI. Reihenentwickelungen für einige transcendente Funktionen.

32) Logarithmus.*)

Ist $z = {}^e\lg y$, so folgt $e^z = y$, oder da (für $n = \infty$) $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ ist, $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = y$. In Folgendem soll n stets als unendlich groß gedacht werden.

Aus der letzten Gleichung folgt

$$z = \frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}},$$

also ist

$${}^e\lg y = \frac{y^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Man setze nun $y = 1 + x$, dann ist

$${}^e\lg(1 + x) = \frac{(1 + x)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Ist also $-1 < x < +1$, so darf man nach der binomischen Reihe entwickeln, und erhält, wenn man die unendlich kleine Größe $\frac{1}{n} = \delta$ setzt:

$${}^e\lg(1 + x) = \frac{(1 + x)^\delta - 1}{\delta}$$

$$= \frac{1}{\delta}\left[\left(1^\delta + \frac{\delta}{1}x + \frac{\delta(\delta - 1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\delta(\delta - 1)(\delta - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots\right) - 1\right],$$

oder

$${}^e\lg(1 + x) = x + \frac{\delta - 1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3$$
$$+ \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \cdots.$$

---

*) Fortsetzung von Teil II, Arithmetik, Abschnitt VI (Nr. 52).

Läßt man δ unendlich klein werden, so hat man für die Grenze $\delta = 0$ und für $-1 < x < 1$:

$$1) \qquad {}^e\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Setzt man $(-x)$ für x ein, so folgt

$$2) \qquad {}^e\lg(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots.$$

Durch Subtraktion erhält man die Reihe für ${}^e\lg(1+x) - {}^e\lg(1-x)$ oder

$$3) \qquad {}^e\lg\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right]$$
$$\text{für } -1 < x < 1.$$

Setzt man $\frac{1+x}{1-x} = a$, so ist $x = \frac{a-1}{a+1}$ zu setzen, was für jedes positive a absolut genommen kleiner als 1 ist. So folgt

$$4) \qquad {}^e\lg a = 2\left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \cdots\right]$$
$$\text{für jedes positive } a.$$

Setzt man hier $a = 1 + z$, so wird $\frac{a-1}{a+1} = \frac{z}{2+z}$, und es gilt für $-1 < z < \infty$ die Reihe

$$5) \quad {}^e\lg(1+z) = 2\left[\frac{z}{2+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2+z}\right)^5 + \cdots\right],$$

die für kleine z sehr schnell konvergiert.

Hier setze man $z = \frac{y}{x}$, also $1 + z = 1 + \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x}$, folglich $\lg(1+z) = \lg\frac{x+y}{x} = \lg(x+y) - \lg x$. Dabei wird ferner $\frac{z}{2+z} = \frac{\frac{y}{x}}{2+\frac{y}{x}} = \frac{y}{2x+y}$. Setzt man alles in 5) ein und bringt man $-\lg x$ nach rechts, so ergiebt sich

$$6) \quad \lg(x+y) = \lg x + 2\left[\frac{y}{2x+y} + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \cdots\right]$$
$$\text{für } \frac{y}{x} > -1.$$

Mit Hülfe dieser Reihen ist man im Stande, die natürlichen Logarithmen gegebener Zahlen sehr schnell zu berechnen, wobei man, um schnelle Konvergenz zu erreichen, gewisse Kunstgriffe anzuwenden hat.

Um z. B. ${}^e\lg 2$ zu berechnen, kann man $\lg\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\right) = \lg\frac{3}{2} + \lg\frac{4}{3}$ zu Grunde legen, Logarithmen, die man erhält, wenn man in Gleichung 3) $x = \frac{1}{5}$ bezw. $x = \frac{1}{7}$ einsetzt. Dies giebt die schnell konvergierenden Reihen

$$\begin{aligned} {}^e\lg\frac{3}{2} &= 2\left[\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} + \frac{1}{7\cdot 5^7} + \frac{1}{9\cdot 5^9} + \cdots\right] \\ &= 0{,}405\;465\;108\;108\;164\ldots, \\ {}^e\lg\frac{4}{3} &= 2\left[\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} + \frac{1}{7\cdot 7^7} + \frac{1}{9\cdot 7^9} + \cdots\right] \\ &= 0{,}287\;682\;072\;451\;781. \end{aligned}$$

Die Summe giebt ${}^e\lg 2 = 0{,}693\;147\;180\;559\;945\ldots$

Um auf ${}^e\lg 10$ zu gelangen, benutze man Gleichung 3) für $x = \frac{1}{9}$. Dies giebt

$$\begin{aligned} {}^e\lg\frac{5}{4} &= 2\left[\frac{1}{1\cdot 9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \frac{1}{7\cdot 9^7} + \cdots\right] \\ &= 0{,}223\;143\;551\;314\;210\ldots. \end{aligned}$$

Nun ist $10 = \frac{5}{4}\cdot 2^3$, also ${}^e\lg 10 = {}^e\lg\frac{5}{4}e + 3\lg 2$. Man erhält

$${}^e\lg 10 = 2{,}302\;585\;092\;994\;045\ldots$$

Hieraus ergiebt sich als Modul der Briggschen Logarithmen

$$m = \frac{1}{{}^e\lg 10} = 0{,}434\;294\;481\;903\;251\ldots$$

Reihe 3) ist also sehr brauchbar zur Berechnung der Logarithmen von Brüchen, die nahe bei 1 liegen.

Behufs der Entwickelung von a^x setze man $a = e^\alpha$, also $\alpha = {}^e\lg a$. Dann ist

$$a^x = (e^\alpha)^x = e^{\alpha x} = e^{x\lg a} = 1 + \frac{x\lg a}{1!} + \frac{(x\lg a)^2}{2!} + \frac{(x\lg a)^3}{3!} + \cdots$$

32) Reihen für π und cyklometrische Funktionen.

In Teil II war bewiesen

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+i}{1-i}.$$

Man wende hierauf die Reihe 3) an, dann wird

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\,2\left[i + \frac{i^3}{3} + \frac{i^5}{5} + \frac{i^7}{7} + \cdots\right],$$

oder

$$7)\qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots,$$