Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

b) Reihen für π und cyklometrische Funktionen

Um z. B. ${}^e\lg 2$ zu berechnen, kann man $\lg\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\right) = \lg\frac{3}{2} + \lg\frac{4}{3}$ zu Grunde legen, Logarithmen, die man erhält, wenn man in Gleichung 3) $x = \frac{1}{5}$ bezw. $x = \frac{1}{7}$ einsetzt. Dies giebt die schnell konvergierenden Reihen

$$
\begin{aligned}
{}^e\lg\frac{3}{2} &= 2\left[\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} + \frac{1}{7\cdot 5^7} + \frac{1}{9\cdot 5^9} + \cdots\right] \\
&= 0{,}405\,465\,108\,108\,164\ldots, \\
{}^e\lg\frac{4}{3} &= 2\left[\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} + \frac{1}{7\cdot 7^7} + \frac{1}{9\cdot 7^9} + \cdots\right] \\
&= 0{,}287\,682\,072\,451\,781.
\end{aligned}
$$

Die Summe giebt ${}^e\lg 2 = 0{,}693\,147\,180\,559\,945\ldots$

Um auf ${}^e\lg 10$ zu gelangen, benutze man Gleichung 3) für $x = \frac{1}{9}$. Dies giebt

$$
\begin{aligned}
{}^e\lg\frac{5}{4} &= 2\left[\frac{1}{1\cdot 9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \frac{1}{7\cdot 9^7} + \cdots\right] \\
&= 0{,}223\,143\,551\,314\,210\ldots.
\end{aligned}
$$

Nun ist $10 = \frac{5}{4}\cdot 2^3$, also ${}^e\lg 10 = {}^e\lg\frac{5}{4}\,e + 3\lg 2$. Man erhält

$$
{}^e\lg 10 = 2{,}302\,585\,092\,994\,045\ldots
$$

Hieraus ergiebt sich als Modul der Briggschen Logarithmen

$$
m = \frac{1}{{}^e\lg 10} = 0{,}434\,294\,481\,903\,251\ldots
$$

Reihe 3) ist also sehr brauchbar zur Berechnung der Logarithmen von Brüchen, die nahe bei 1 liegen.

Behufs der Entwickelung von a^x setze man $a = e^\alpha$, also $\alpha = {}^e\lg a$. Dann ist

$$
a^x = (e^\alpha)^x = e^{\alpha x} = e^{x\lg a} = 1 + \frac{x\lg a}{1!} + \frac{(x\lg a)^2}{2!} + \frac{(x\lg a)^3}{3!} + \cdots
$$

32) Reihen für π und cyklometrische Funktionen.

In Teil II war bewiesen

$$
\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+i}{1-i}.
$$

Man wende hierauf die Reihe 3) an, dann wird

$$
\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\,2\left[i + \frac{i^3}{3} + \frac{i^5}{5} + \frac{i^7}{7} + \cdots\right],
$$

oder

7) $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots,$$

die wegen der wechselnden Zeichen noch konvergent ist*). Die Konvergenz ist aber so schwach, daß mehrere Millionen Glieder berechnet werden müßten, wenn man π bis auf 7 Dezimalstellen genau berechnen wollte.

Dies ist die Leibnitzsche Reihe für $\frac{\pi}{4}$.

Die früher gefundenen Reihen für $\frac{\pi}{4}$ bezw. $\frac{\pi}{2}$ waren brauchbarer. Noch bessere werden später gegeben.

Die hier zu Grunde gelegte Formel war nach Teil II ein besonderer Fall der folgenden:

$$e^{2iz} = \frac{1 + i \tan z}{1 - i \tan z}.$$

Aus ihr folgt nach 3)

$$8)\quad z = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + i \tan z}{1 - i \tan z} = \tan z - \frac{\tan^3 z}{3} + \frac{\tan^5 z}{5} - \frac{\tan^7 z}{7} + \cdots,$$

wo jedoch $-1 < \tan z < +1$ sein muß, d. h. $-45^0 < \alpha < 45^0$.

Setzt man hier $\tan z = x$, also $z = \operatorname{arc} \tan x$, so folgt

$$9)\qquad \operatorname{arc} \tan x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

was für $-1 < x < +1$ konvergiert. Für den Grenzfall $x = +1$ erhält man wieder die Reihe 7).

In Gleichung 8) war z in einer nach Potenzen von $\tan z$ fortschreitenden Reihe entwickelt. Da $\tan z$ eine ungerade Funktion von z ist, so konnten nur ungerade Potenzen vorkommen, denn für gerade Potenzen würde die Vertauschung von $+z$ und $-z$ gleichgültig sein, die für die linke Seite nicht gleichgültig ist.

Da nun $\sin x$ ebenfalls eine ungerade Funktion von x ist, so läßt sich vermuten, daß x in einer Reihe entwickelt werden kann, die nach ungeraden Potenzen von $\sin x$ fortschreitet. Danach würde sein:

$$\text{a)}\qquad x = a \sin x + b \sin^3 x + c \sin^5 x + d \sin^7 x + \cdots,$$

wo die Koeffizienten unbestimmt sind, und ebenso

$$y = a \sin y + b \sin^3 y + c \sin^5 y + d \sin^7 y + \cdots,$$

folglich

$$x - y = a(\sin x - \sin y) + b(\sin^3 x - \sin^3 y) \\ + c(\sin^5 x - \sin^5 y) + \cdots,$$

also auch

$$\text{b)}\quad \frac{x - y}{\sin x - \sin y} = a + b \frac{\sin^3 x - \sin^3 y}{\sin x - \sin y} + c \frac{\sin^5 x - \sin^5 y}{\sin x - \sin y} + \cdots.$$

*) Die Untersuchung, ob die Konvergenz bedingt oder unbedingt ist, soll hier unterbleiben.

Auf der linken Seite ist

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\frac{x-y}{2} \cos\frac{x+y}{2},$$

also für den Fall, daß y nahe an x und $(x-y)$ sehr klein, also auch $\sin\frac{x-y}{2}$ sehr nahe an $\frac{x-y}{2}$ ist:

$$\frac{x-y}{\sin x - \sin y} = \frac{x-y}{(x-y)\cos\frac{2x}{2}} = \frac{1}{\cos x}.$$

Rechts dagegen ist jedes

$$\frac{\sin^n x - \sin^n y}{\sin x - \sin y} = \sin^{n-1} x + \sin^{n-2} x \sin y + \sin^{n-3} x \sin^2 y + \cdots$$
$$+ \sin x \sin^{n-2} y + \sin^{n-1} y,$$

also steht, wenn y sehr nahe an x liegt, rechts $n \sin^{n-1} x$ für jedes n. Demnach geht b) über in

$$\frac{1}{\cos x} = a + 3b \sin^2 x + 5c \sin^4 x + 7d \sin^6 x + \cdots.$$

Nun ist aber zugleich

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = (1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}\sin^2 x + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^4 x + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\sin^6 x + \cdots,$$

folglich muß sein

$$a = 1, \quad 3b = \tfrac{1}{2}, \quad 5c = \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \quad 7d = \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}, \quad \text{u. s. w.}$$

Damit sind die Koeffizienten bestimmt, und Gleichung a) geht über in

$$10)\quad x = \sin x + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^5 x}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\sin^7 x}{7} + \cdots.$$

Demnach ist, wie schon früher geometrisch gefunden war*),

$$11)\quad \operatorname{arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{x^9}{9}\cdots,$$

woraus für $x = 1$ die schon gefundene Reihe für $\frac{\pi}{2}$ und für $\operatorname{arc}\cos x$ nachstehende ebenfalls schon besprochene Reihe folgt:

$$12)\qquad \operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots\right].$$

---

*) Die Übereinstimmung mit dem früheren Resultate möge hinreichen, gewissen Zweifeln bezüglich der Strenge der Beweisführung, die hier erhoben werden könnten, vorläufig zu begegnen.

[34) Die Reihen für $\tan x$ und $\cot x$.

Der Vollständigkeit halber könnte noch auf die Reihen für $\tan x$ und $\cot x$ eingegangen werden.

Nach dem Früheren ist z. B.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots}.$$

Da man im Konvergenzfalle die Division mechanisch ausführen darf, so erhält man

$$\begin{aligned}\tan x &= x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + \frac{272x^7}{7!} + \cdots \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{215} + \cdots.\end{aligned}$$

Da jedoch die Division bald unbequem wird, soll auf diese weniger übersichtliche Reihe nicht weiter eingegangen werden. Mit Hülfe der Bernoullischen Zahlen ist es gelungen, eine übersichtlichere Form zu gewinnen. Dies geht aber für die Schule zu weit, ebenso, wie die Untersuchung des Konvergenzgebietes.]

35) Quadratur und Tangentenproblem für die behandelten transcendenten Funktionen.

Nachdem die betreffenden Funktionen nach aufsteigenden Potenzen von x in Reihen entwickelt sind, gelten von ihnen die Flächen- und Tangentensätze, die für ganze rationale Funktionen gelten.

So ist z. B. für $y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$, also für die logarithmische Kurve,

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1}{1} + \frac{{x_1}^2}{2!} + \frac{{x_1}^3}{3!} + \frac{{x_1}^4}{4!} + \cdots = e^{x_1} - 1,$$

folglich

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = e^{x_2} - e^{x_1}.$$

Die Fläche von $-\infty$ bis 0 ist also gleich 1, dagegen $\overset{x}{\underset{-\infty}{F}} = e^x$.

Ferner ist an jeder Stelle x die Tangentenrichtung zu bestimmen aus

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= 1 + \frac{2x}{1 \cdot 2} + \frac{3x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots \\ &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x.\end{aligned}$$

Aus $\tan \alpha = \frac{e^x}{1}$ folgt, daß die Projektion der Tangente auf die X-Achse, die sog. Subtangente, an jeder Stelle gleich 1 ist.