UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

c) Quadratur und Tangentenproblem für die behandelten transcendenten Funktionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Visual Library

[34) Die Reihen für $\tan x$ und $\cot x$.

Der Vollständigkeit halber könnte noch auf die Reihen für $\tan x$ und $\cot x$ eingegangen werden.

Nach dem Früheren ist z. B.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots}.$$

Da man im Konvergenzfalle die Division mechanisch ausführen darf, so erhält man

$$\tan x = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + \frac{272x^7}{7!} + \cdots$$
$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{215} + \cdots.$$

Da jedoch die Division bald unbequem wird, soll auf diese weniger übersichtliche Reihe nicht weiter eingegangen werden. Mit Hülfe der Bernoullischen Zahlen ist es gelungen, eine übersichtlichere Form zu gewinnen. Dies geht aber für die Schule zu weit, ebenso, wie die Untersuchung des Konvergenzgebietes.]

35) Quadratur und Tangentenproblem für die behandelten transcendenten Funktionen.

Nachdem die betreffenden Funktionen nach aufsteigenden Potenzen von x in Reihen entwickelt sind, gelten von ihnen die Flächen- und Tangentensätze, die für ganze rationale Funktionen gelten.

So ist z. B. für $y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$, also für die logarithmische Kurve,

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1}{1} + \frac{{x_1}^2}{2!} + \frac{{x_1}^3}{3!} + \frac{{x_1}^4}{4!} + \cdots = e^{x_1} - 1,$$

folglich

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = e^{x_2} - e^{x_1}.$$

Die Fläche von $-\infty$ bis 0 ist also gleich 1, dagegen $\overset{x}{\underset{-\infty}{F}} = e^x$.

Ferner ist an jeder Stelle x die Tangentenrichtung zu bestimmen aus

$$\tan \alpha = 1 + \frac{2x}{1 \cdot 2} + \frac{3x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x.$$

Aus $\tan \alpha = \frac{e^x}{1}$ folgt, daß die Projektion der Tangente auf die X-Achse, die sog. Subtangente, an jeder Stelle gleich 1 ist.

Für $y = \sin x$, die besonders wichtige Sinus-Kurve, ist

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = \frac{x_1^{\,2}}{1!\,2} - \frac{x_1^{\,4}}{3!\,4} + \frac{x_1^{\,6}}{5!\,6} - \cdots = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots = 1 - \cos x_1,$$

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = (1 - \cos x_2) - (1 - \cos x_1) = \cos x_1 - \cos x_2.$$

Die Tangentenrichtung an jeder Stelle bestimmt sich aus

$$\tan\alpha = \frac{1x^0}{1!} - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$= \cos x.$$

Entsprechend ist es mit den übrigen in Reihen entwickelten Funktionen.

Nur liegen bisweilen die geschlossenen Ausdrücke etwas versteckt. So ist z. B. für $y = \arcsin x$

$$\overset{x}{\underset{0}{F}} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{x^4}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\frac{x^6}{6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\frac{x^8}{8} + \cdots$$
$$= \left[\frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^6}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{y^8}{7} + \cdots\right]$$
$$- \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^6}{6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^8}{8} + \cdots\right]$$
$$= x\cdot\arcsin x - 1 + \left[1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^6}{6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^8}{8} - \cdots\right]$$
$$= x\cdot\arcsin x - 1 + \sqrt{1 - x^2}.$$

Also

$$\overset{x_1}{\underset{0}{F}} = x_1 \arcsin x_1 + \sqrt{1 - x_1^{\,2}} - 1$$

und

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = (x_2 \arcsin x_2 - x_1 \arcsin x_1) + \left(\sqrt{1 - x_2^{\,2}} - \sqrt{1 - x_1^{\,2}}\right).$$

Die Tangentenrichtung bestimmt sich aus

$$\tan\alpha = 1 + \frac{1}{2}\frac{3x^2}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{5x^4}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{7x^6}{7} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8 + \cdots,$$

oder

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Aus den früher besprochenen Anwendungen der algebraischen Analysis ergiebt sich, welcher außerordentliche Fortschritt für die analytische

Geometrie und Flächenberechnung, für die Körperberechnungen und für die Mechanik mit diesen Reihenentwickelungen gewonnen ist.

Die überall vermerkten Einschränkungen aber deuten schon hinreichend an, daß damit erst die Vorhöfe einer höheren Wissenschaft betreten sind, in der die Theorie des Unendlichkleinen zum eigentlichen Austrage kommt und der Funktionsbegriff in seiner ganzen Tragweite sichtbar wird. Dies ist die Differential- und Integralrechnung, die Hand in Hand mit der allgemeinen Funktionentheorie ganz neue Bereiche des mathematischen Denkens erschlossen hat, die aber der Hochschule vorbehalten werden müssen.

36) Nachträge über die Berechnung der Zahl π.

Die Wichtigkeit der Zahl π für die niedere und höhere Mathematik hat es wünschenswert erscheinen lassen, schnell konvergierende Reihen für ihre Berechnung zu finden. Die Leibnitzsche Reihe war ganz unbrauchbar.

Durch Einsetzung von $x = \frac{\pi}{6}$ in die Reihe für $\operatorname{arc}\tan x$ fand man, da $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist,

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3(\sqrt{3})^3} + \frac{1}{5(\sqrt{3})^5} + \frac{1}{7(\sqrt{3})^7} + \cdots,$$

also

$$\pi = 2\sqrt{3}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{3 \cdot 3^1} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \cdots\right],$$

womit es unter großem Zeitaufwand gelang, π auf etwa 100 Stellen genau zu berechnen. Besser ist schon die Eulersche Reihenentwickelung mit Hülfe der Formel

$$4)\qquad \begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{arc}\tan\frac{1}{2} + \operatorname{arc}\tan\frac{1}{3} \\ &= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots\right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Die Formel 4) ist folgendermaßen entstanden. Euler wollte statt $\tan\alpha = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ einen kleineren Wert haben, setzte daher in $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$ willkürlich $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, woraus sich $\tan\beta = \frac{1}{3}$ ergiebt.

Auf demselben Grundgedanken fußend kann man noch weit schneller konvergierende Reihen finden. So ist z. B. folgender Gang eingeschlagen worden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN