Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

I. Gleichungen dritten Grades

Fünfte Abteilung.

Von den Gleichungen höheren Grades.

I. Gleichungen dritten Grades.

38) Die allgemeine Gleichung dritten Grades ist schon in Teil II (Arithmetik Nr. 73) aufgelöst worden. Hier soll für die eigentliche Normalform

1) $$x^3 - 3\alpha x^2 + 3\beta x - \gamma = 0$$

eine andere Lösungsmethode entwickelt werden.

Durch die Substitution $x = y + \alpha$ geht die Gleichung über in

$$y^3 - 3y(\alpha^2 - \beta) = (2\alpha^3 - 3\alpha\beta + \gamma),$$

also in die Form

2) $$y^3 - 3ky = 2b.$$

Diese Gleichung stimmt in der Form überein mit der identischen Gleichung

3) $$(u + v)^3 - 3uv(u + v) = u^3 + v^3,$$

die aus der binomischen Formel für $(u + v)^3$ folgt.

Gleichung 2) stimmt mit 3) überein, sobald man $u^3 + v^3 = 2b$, $uv = k$ und $u + v = y$ setzt. Dadurch wird auch 2) in eine identische Gleichung verwandelt. Die Werte von y aber, die Gleichung 2) identisch erfüllen, heißen die Wurzeln der Gleichung 2). Diese müssen also durch $y = u + v$ bestimmt sein, sobald man u und v aus den genannten Gleichsetzungen berechnet.

Nun folgt aus

$$(u^3 + v^3)^2 = 4b^2$$

und

$$4u^3v^3 = 4k^3$$

durch Subtraktion und Wurzelausziehung

$$u^3 - v^3 = 2\sqrt{b^2 - k^3},$$

und durch Vergleichung mit $u^3 + v^3 = 2b$ folgt

$$u^3 = b + \sqrt{b^2 - k^3} \quad \text{und} \quad v^3 = b - \sqrt{b^2 - k^3}.$$

Es ist also, wenn man zunächst von der Dreideutigkeit der Kubikwurzel absieht,

$$u = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - k^3}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - k^3}}.$$

In Wirklichkeit handelt es sich um je drei Werte

$$u_1 = uw_1, \quad u_2 = uw_2, \quad u_3 = uw_3,$$

$$v_1 = vw_1, \quad v_2 = vw_2, \quad v_3 = vw_3,$$

wo die w die dritten Wurzeln aus der Einheit bedeuten, also

$$w_1 = 1, \quad w_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad w_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Es fragt sich nun, welche u und v in $y = u + v$ zusammengehören. Selbstverständlich ist so zu gruppieren, daß die Gleichung 3) identisch erfüllt bleibt. Dies ist nur der Fall, wenn man u_1 und v_1, u_2 und v_3, u_3 und v_2 kombiniert. Die Wurzeln der Gleichung 2) sind also

$$4)\left\{\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1 = u + v = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - k^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - k^3}}, \\ y_2 &= u_2 + v_3 = u\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + v\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{u + v}{2} + i\sqrt{3}\,\frac{u - v}{2}, \\ y_3 &= u_3 + v_2 = u\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + v\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{u + v}{2} - i\sqrt{3}\,\frac{u - v}{2}. \end{aligned}\right.$$

Der Ausdruck für y_1 heißt die Cardanische Formel, obwohl Geronimo Cardano die von Nicolo Tartalea entdeckte Formel nur veröffentlicht hat (1545).

39) Die drei Hauptfälle.

Man beschränkt sich für das praktische Rechnen in der Regel auf den Fall, wo die Koeffizienten der Gleichung 1) und daher auch die der Gleichung 2) reell sind.

Dann sind drei Fälle möglich.

a) Ist $b^2 - k^3$ positiv, so sind u und v reell, also y_1 reell, aber y_2 und y_3 konjugiert komplex.

b) Ist $b^2 - k^3 = 0$, so wird

$$y_1 = 2\sqrt[3]{b}, \quad y_2 = -\sqrt[3]{b}, \quad y_3 = -\sqrt[3]{b},$$

so daß sämtliche Wurzeln reell und die beiden letzten gleich sind.

c) Ist $b^2 - k^3$ negativ, so steht unter jeder Kubikwurzel Komplexes. Weil man ursprünglich mit dem Imaginären nicht zu rechnen verstand, nannte man diesen Fall den casus irreducibilis. Schon die Entwickelung der Wurzeln in binomischen Reihen, nämlich den Reihen für $(b \pm \sqrt{b^2 - k^3})^{\frac{1}{3}} = (b \pm i\sqrt{k^3 - b^2})^{\frac{1}{3}}$, wo $i = \sqrt{-1}$ ist, würde gezeigt haben, daß es sich um konjugiert komplexe Ausdrücke handelt, so daß in $u_1 + v_1$ das Imaginäre wegfällt, ebenso in $u_2 + v_3$ und $u_3 + v_2$, daß also sämtliche Wurzeln reell sind.

Am besten übersieht man dies an der reducierten Schreibweise der komplexen Ausdrücke für u und v. Bei dieser wird

$$u = \sqrt[3]{b + i\sqrt{k^3 - b^2}} = \sqrt[3]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)},$$

wo $r = \sqrt{b^2 + (k^3 - b^2)} = +\sqrt{k^3}$ ist und φ sich aus $\cos\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{+\sqrt{k^3}}$ bestimmt, wobei das Vorzeichen von b über den ersten oder zweiten Quadranten entscheidet. (Die Substitution $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{k^3}}$ ist gestattet, weil $k^3 > b^2$ angenommen ist, so daß der Bruch kleiner als 1 ist.)

Nach dem Moivreschen Satze wird jetzt

$$u_1 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right) = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$u_2 = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi + 360^0}{3} + i\sin\frac{\varphi + 360^0}{3}\right),$$

$$u_3 = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi + 720^0}{3} + i\sin\frac{\varphi + 720^0}{3}\right),$$

und entsprechend

$$v_1 = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$v_3 = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi + 360^0}{3} - i\sin\frac{\varphi + 360^0}{3}\right),$$

$$v_2 = \sqrt{k}\left(\cos\frac{\varphi + 720^0}{3} - i\sin\frac{\varphi + 720^0}{3}\right).$$

In $y = u + v$ sind nach Obigem die Werte so zu kombinieren, daß Reelles entsteht. (Die Indices von v sind der Analogie wegen den obigen entsprechend gewählt.) Demnach sind die Wurzeln von Gleichung 2) jetzt

$$5)\quad \begin{cases} y_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi}{3}, \\ y_2 = u_2 + v_3 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi + 360^0}{3} = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right), \\ y_3 = u_3 + v_2 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi + 720^0}{3} = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right). \end{cases}$$

Damit ist der irreducible Fall erledigt.

40) **Bemerkungen.** Dasselbe Resultat ergiebt sich für den irreduciblen Fall selbständig auf folgendem goniometrischen Wege.

In der Gleichung 2) d. h. in

$$y^3 - 3ky = 2b$$

setze man $y = 2\sqrt{k}\,z$, so daß sie übergeht in $8k\sqrt{k}z^3 - 3k2\sqrt{k}z = 2b$ oder in

$$6)\quad z^3 - \frac{3}{4}z = \frac{1}{4}\frac{b}{\sqrt{k^3}}.$$

Nun ist identisch

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi, \quad \text{oder} \quad \cos^3\varphi - \frac{3}{4}\cos\varphi = \frac{1}{4}\cos 3\varphi,$$

wo φ noch um 360^0 oder 720^0 vergrößert werden darf. Führt man in diese identische Gleichung den dritten Teil des Winkels ein, so lautet sie entweder

$$7)\quad \left(\cos\frac{\varphi}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}\cos\frac{\varphi}{3} = \frac{1}{4}\cos 3\frac{\varphi}{3} = \frac{1}{4}\cos\varphi,$$

oder

$$\left[\cos\frac{\varphi + 360^0}{3}\right]^3 - \frac{3}{4}\cos\frac{\varphi + 360^0}{3} = \frac{1}{4}\cos 3\frac{\varphi + 360^0}{3} = \frac{1}{4}\cos\varphi,$$

d. h.

$$8)\quad \left[-\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)\right]^3 - \frac{3}{4}\left[-\cos\varphi\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)\right] = \frac{1}{4}\cos\varphi,$$

oder endlich

$$\left[\cos\frac{\varphi + 720^0}{3}\right]^3 - \frac{3}{4}\cos\frac{\varphi + 720^0}{3} = \frac{1}{4}\cos 3\frac{\varphi + 720^0}{3} = \frac{1}{4}\cos\varphi,$$

d. h.

$$9)\quad \left[-\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)\right]^3 - \frac{3}{4}\left[-\cos\varphi\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)\right] = \frac{1}{4}\cos\varphi.$$

Gleichung 6) stimmt nun mit der identischen Gleichung 7) bezw. mit 8) oder 9) überein, sobald man $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{k^3}}$ und außerdem $z = \cos\frac{\varphi}{3}$ bezw. $= -\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)$ oder $= -\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)$ setzt. Da sie für die letzteren Werte von z identisch erfüllt ist, so sind diese die Wurzeln der Gleichung 6). Folglich sind die der Gleichung 2) wie vorher

$$y_1 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi}{3},\quad y_2 = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right),$$

$$y_3 = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right).$$

41) Zusammenhang zwischen den Wurzeln und Koeffizienten.

Schon in Teil I ist gezeigt worden, daß das Produkt

10) $$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

auf

$$x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3,$$

d. h. auf die linke Seite der Normalform der Gleichung dritten Grades führt. Die Koeffizienten der letzteren sind demnach

11) $\alpha = x_1 + x_2 + x_3,\ \beta = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1,\ \gamma = x_1x_2x_3.$

Der erste Koeffizient ist also die Summe der Wurzeln, der zweite Koeffizient die Summe der Produkte von je zwei Wurzeln, der dritte ist das Produkt der drei Wurzeln.

Weil sämtliche Wurzeln in jedem Koeffizienten in übereinstimmender Weise vorkommen, bezeichnet man die Koeffizienten als symmetrische Funktionen der Wurzeln.

Die Auflösung der Gleichung ist also nichts anderes, als die Zerlegung der linken Seite in ein Produkt.

[Betrachtet man in dem Gleichungssysteme 11) die Wurzeln als Unbekannte, die man zu berechnen hat, so erhält man wieder eine Gleichung dritten Grades. Versuche dieselbe aufzustellen. Sie wird

$$x_3{}^3 - \alpha x_3{}^2 + \beta x_3 - \gamma = 0,$$

also von der alten Form.]

Will man sich selbst Gleichungen bilden, die auf den irreduciblen Fall führen, so wähle man lauter reelle Wurzeln, z. B. 2, 3 und 4. Das Beispiel giebt

$(x-2)(x-3)(x-4)=0$ oder $x^3-9x^2+26x-24=0$,

was noch mit einen konstanten Faktor multipliziert werden darf.

Soll dagegen die Gleichung auf den Cardanischen Fall führen, so wähle man eine reelle und zwei komplex konjugierte Wurzeln, z. B. 2, $3+4i$, $3-4i$. Dies giebt

$$(x-2)[x-(3+4i)][x-(3-4i)]=0$$

oder

$$x^3-8x^2+37x-50=0.$$

Würde man drei komplexe, oder eine komplexe und zwei reelle, oder eine reelle und zwei nicht konjugiert komplexe Wurzeln wählen, so würden die Koeffizienten der Gleichung nicht sämtlich reell werden. Auch solche Gleichungen lassen sich auflösen, sie haben aber für die Praxis geringeren Wert.

Sämtliche ganzen rationalen Funktionen dritten Grades, welche dieselben Wurzeln x_1, x_2 und x_3 haben, können sich höchstens um einen konstanten Faktor unterscheiden. Die einfachste ist

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= x^3-(x_1+x_2+x_3)x+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x^2-x_1x_2x_3; \end{aligned}$$

alle anderen sind von der Form

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= k(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= kx^3-k(x_1+x_2+x_3)x+k(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x^2-kx_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Beide Funktionen werden zu Null für $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$. Sie stimmen also für drei Werte überein. Ist $k=1$, so stimmen sie auch für $x=\infty$ überein und sind daher identisch.

Jede ganze rationale Funktion 3ten Grades kann in ein solches Produkt linearer Faktoren zerlegt werden, denn für jede kann man die Wurzeln finden.

---

42) Zusammenfassung der Resultate für numerische Berechnungen.

Die Gleichung

1) $$x^3-3\alpha x^2+3\beta x-\gamma=0$$

geht durch $x=y+\alpha$ über in

2) $$y^3-3ky=2b,$$

wo $k=\alpha^2-\beta$ und $2b=2\alpha^3-3\alpha\beta+\gamma$ ist.

Ist $b^2 - k^3$ positiv, so sind die Wurzeln von 2)

$$y_1 = u + v = \sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 - k^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 - k^3}},$$

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + i\sqrt{3}\,\frac{u-v}{2},$$

$$y_3 = -\frac{u+v}{2} - i\sqrt{3}\,\frac{u-v}{2}.$$

Ist $b^2 - k^3$ negativ, so bilde man φ aus $\cos\varphi = \frac{b}{+\sqrt{k^3}}$, dann sind die Wurzeln

$$y_1 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi}{3}, \quad y_2 = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right),$$

$$y_3 = -2\sqrt{k}\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right).$$

Zum Schluß bilde man

$$x_1 = y_1 + \alpha, \quad x_2 = y_2 + \alpha, \quad x_3 = y_3 + a,$$

womit die Wurzeln von 1) gefunden sind.

43) Praktische Beispiele.

Aufgabe. Ein Kugelsegment sei der dritte Teil des Kugelkörpers. Wie groß ist seine Höhe?

Auflösung.

$$\frac{\pi x^2}{3}[3r - x] = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}r^3\pi, \quad \text{oder} \quad x^3 - 3rx^2 + \frac{4}{3}r^3 = 0.$$

Die reduzierte Gleichung wird

$$y^3 - 3r^2y = \frac{2r^3}{3}.$$

Der Hülfswinkel φ bestimmt sich aus $\cos\varphi = \frac{\frac{r^3}{3}}{\sqrt{r^6}} = \frac{1}{3}$ als $\varphi = 70^0\, 31'\, 44''$.

Die Lösungen von 2) werden also

$$y_1 = 2r\cos 23^0\, 30'\, 35'', \quad y_2 = -2r\cos 36^0\, 29'\, 25'',$$

$$y_3 = -2r\cos 83^0\, 30'\, 35'',$$

d. h.

$$y_1 = 1{,}83399r, \quad y_2 = -1{,}60791r, \quad y_3 = -0{,}226074r.$$

(Zur Probe: $y_1 + y_2 + y_3 = 0$!) Die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung sind

$$x_1 = 2{,}83397r, \quad x_2 = -0{,}60791r, \quad x_3 = 0{,}77393r.$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 = 3r$.)

Die Lösungen x_1 und x_2 sind unbrauchbar, denn sie fallen außerhalb der Kugel, nur x_3 ist brauchbar, was durch Probe erhärtet werden kann.

Aufgabe. Eine Kugelzone hat die Grundradien r_1 und r_2 und den Inhalt J. Wie groß ist die Höhe?

Auflösung.

$$\frac{\pi x}{6}[3r_1^2 + 3r_2^2 + x^2] = J \quad \text{oder} \quad x^3 + 3x(r_1^2 + r_2^2) = \frac{6J}{\pi},$$

was schon von selbst die reduzierte Form ist. Es handelt sich um den Cardanischen Fall, so daß

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{3J}{\pi} + \sqrt{\left(\frac{3J}{\pi}\right)^2 + (r_1 + r_2)^3}} + \sqrt[3]{\frac{3J}{\pi} - \sqrt{\left(\frac{3J}{\pi}\right)^2 + (r_1 + r_2)^3}}$$

die einzige reelle Lösung ist.

Beispiel. $r_1 = 5$, $r_2 = 4$ und $J = 150$ giebt

$$x_1 = 2{,}23797.$$

Aufgabe. Ein Kugelsegment habe den Grundradius $\varrho = 15$ und den Inhalt $J = 822$. Wie groß ist die Höhe x?

Auflösung.

$$\frac{\pi x}{6}(x^2 + 3\varrho^2) = J, \quad \text{oder} \quad x^3 + 675x = 2 \cdot \frac{2466}{\pi}.$$

Die Cardanische Formel giebt als einzigen reellen Wert

$$x_1 = 2{,}3076.$$

Aufgabe. Ein Kugelsegment habe den Inhalt J und die Haubenfläche c. Wie groß ist die Höhe x?

Auflösung. $\frac{\pi x^2}{3}(3r - x) = J$ und $2r\pi x = c$ geben die Gleichung

$$x^3 - x\frac{3c}{2\pi} = -\frac{3J}{\pi}.$$

Aufgabe. Eine Kugel habe den Radius r und das spezifische Gewicht p $(p < 1)$. Wie tief sinkt sie ins Wasser ein?

Auflösung.

$$\frac{\pi x^2}{3}(3r - x) = \tfrac{4}{3}r^3\pi \cdot p \quad \text{oder} \quad x^3 - 3rx^2 + 4r^3p = 0.$$

Durch Substitution $x = y + r$ entsteht

$$y^3 - 3r^2y = 2r^3(1 - 2p).$$

Die Cosinus-Methode giebt $\cos\varphi = 1 - 2p$ (bei $p < \frac{1}{2}$ erster Quadrant, bei $p < \frac{1}{2}$ zweiter Quadrant). Die Lösungen von 2) sind

$$y_1 = 2r\cos\frac{\varphi}{3}, \quad y_2 = -2r\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right),$$
$$y_3 = -2r\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right),$$

also

$$x_1 = r\left(1 + 2\cos\frac{\varphi}{3}\right), \quad x_2 = r\left(1 - 2\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)\right),$$
$$x_3 = r\left(1 - 2\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)\right).$$

Da $\varphi < 180^0$ ist, so ist $\frac{\varphi}{3} < 60^0$, folglich ist $\cos\frac{\varphi}{3} > \frac{1}{2}$ und $x_1 > 2r$, also x_1 unbrauchbar.

$60^0 - \frac{\varphi}{3}$ zwischen 0^0 und 60^0, also $\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)$ zwischen 1 und $\frac{1}{2}$, folglich x_2 unbrauchbar, weil negativ.

$60^0 + \frac{\varphi}{3}$ zwischen 60^0 und 120^0, der cos zwischen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, folglich x_3 der einzige brauchbare Wert.

Beispiel.

$r = 1$ und $p = 0{,}81$ giebt $x_3 = 1{,}44215$.

$r = 6$ und $p = 0{,}3$ giebt $x_3 = 4{,}35909$.

Aufgabe. Ein Kugelsegment vom Kugelradius r, von der Höhe h und dem spezifischen Gewicht p (< 1) sinkt mit der Wölbung voran wie tief ins Wasser ein?

Auflösung.

$$\frac{\pi x^2}{3}(3r - y) = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)p$$

oder

$$x^3 - 3ry^2 + ph^2(3r - h) = 0.$$

Substitution $x = y + r$ giebt

$$y^3 - 3r^2y = 2r^3 - ph^2(3r - h).$$

Die Cosinus-Methode giebt

$$\cos\varphi = \frac{r^3 - \frac{ph^2}{2}(3r - h)}{r^3}.$$

Die Lösungen von 1) sind

$$x_1 = r\left(1 + 2\cos\frac{\varphi}{3}\right), \quad x_2 = r\left[1 - 2\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)\right],$$
$$x_3 = r\left[1 - 2\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)\right].$$

Nur x_3 ist brauchbar.

Beispiel:

$$r = 5,\ h = 3,\ p = 0{,}8 \quad \text{giebt} \quad x_3 = 2{,}644385.$$

II. Gleichungen vierten Grades.

44) Allgemeine Auflösung.

Als Normalform ist zu betrachten

$$1)\qquad x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta = 0.$$

Durch die Substitution $x = y + \frac{\alpha}{4}$ geht sie über in eine Gleichung ohne die dritte Potenz, nämlich in

$$y^4 + y^2\left(-\frac{3}{8}\alpha^2 + \beta\right) + y\left(-\frac{\alpha^3}{8} + \frac{\alpha\beta}{2} - \gamma\right) + \left(-\frac{3\alpha^4}{256} + \frac{\alpha^2\beta}{16} - \frac{\alpha\gamma}{4} + \delta\right) = 0,$$

so daß man die Form

$$2)\qquad y^4 + ay^2 + by + c = 0$$

erhält. Um eine Produktzerlegung zu erhalten, führe man neue Unbekannte u, v und w ein und setze für die linke Seite versuchsweise

$$2^*)\qquad (y^2 + uy + v)(y^2 - uy + w),$$

so daß man, da y^3 hier ebenfalls wegfällt, die Gleichung

$$3)\qquad y^4 + y^2(v + w - u^2) + yu(w - v) + vw = 0$$

erhält.

Sollen 2) und 3) übereinstimmen, so hat man zu setzen

$$v + w - u^2 = a, \quad u(w - v) = b, \quad vw = c.$$

Aus

$$w + v = a + u^2 \quad \text{und} \quad w - v = \frac{b}{u}$$

folgt durch Subtraktion bezw. Addition

$$v = \frac{1}{2}\left(a + u^2 - \frac{b}{u}\right), \quad w = \frac{1}{2}\left(a + u^2 + \frac{b}{u}\right),$$