Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

II. Gleichungen vierten Grades

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

$$x_1 = r\left(1 + 2\cos\frac{\varphi}{3}\right), \quad x_2 = r\left[1 - 2\cos\left(60^0 - \frac{\varphi}{3}\right)\right],$$
$$x_3 = r\left[1 - 2\cos\left(60^0 + \frac{\varphi}{3}\right)\right].$$

Nur x_3 ist brauchbar.

Beispiel:

$$r = 5, \ h = 3, \ p = 0{,}8 \quad \text{giebt} \quad x_3 = 2{,}644385.$$

II. Gleichungen vierten Grades.

44) Allgemeine Auflösung.

Als Normalform ist zu betrachten

1) $$x^4 - \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \delta = 0.$$

Durch die Substitution $x = y + \frac{\alpha}{4}$ geht sie über in eine Gleichung ohne die dritte Potenz, nämlich in

$$y^4 + y^2\left(-\frac{3}{8}\alpha^2 + \beta\right) + y\left(-\frac{\alpha^3}{8} + \frac{\alpha\beta}{2} - \gamma\right)$$
$$+ \left(-\frac{3\alpha^4}{256} + \frac{\alpha^2\beta}{16} - \frac{\alpha\gamma}{4} + \delta\right) = 0,$$

so daß man die Form

2) $$y^4 + ay^2 + by + c = 0$$

erhält. Um eine Produktzerlegung zu erhalten, führe man neue Unbekannte u, v und w ein und setze für die linke Seite versuchsweise

2*) $$(y^2 + uy + v)(y^2 - uy + w),$$

so daß man, da y^3 hier ebenfalls wegfällt, die Gleichung

3) $$y^4 + y^2(v + w - u^2) + yu(w - v) + vw = 0$$

erhält.

Sollen 2) und 3) übereinstimmen, so hat man zu setzen

$$v + w - u^2 = a, \quad u(w - v) = b, \quad vw = c.$$

Aus

$$w + v = a + u^2 \quad \text{und} \quad w - v = \frac{b}{u}$$

folgt durch Subtraktion bezw. Addition

$$v = \frac{1}{2}\left(a + u^2 - \frac{b}{u}\right), \quad w = \frac{1}{2}\left(a + u^2 + \frac{b}{u}\right),$$

also durch Multiplikation

$$v \cdot w = \frac{1}{4}\left[(a + u^2)^2 - \frac{b^2}{u^2}\right],$$

also wegen $vw = c$

$$\frac{1}{4}\left[a^2 + 2au^2 + u^4 - \frac{b^2}{u^2}\right] = c,$$

oder

4) $$u^6 + 2au^4 + u^2(a^2 - 4c) - b^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich u, die eine der Hülfsgrößen, bestimmen, indem man $u^2 = z$ setzt. Man erhält zur Bestimmung die Gleichung dritten Grades

5) $$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0.$$

Die Behandlung dieser Gleichung geschieht nach der im vorigen Abschnitte dargestellten Methode.

Da jetzt $u^2 = z$ bekannt ist, ist auch $v = \frac{1}{2}\left(a + u^2 - \frac{b}{u}\right)$ als bekannt zu betrachten, ebenso $w = \frac{1}{2}\left(a + u^2 + \frac{b}{u}\right)$.

Die gefundenen Werte werden eingesetzt in

$$(y^2 + uy + v)(y^2 - uy + w) = 0,$$

was mit Gleichung 2) identisch ist. Damit ist letztere zerlegt in zwei Gleichungen vom zweiten Grade:

$$y^2 + uy + v = 0$$
$$y^2 - uy + w = 0.$$

Die eine hat die Wurzeln

$$y_{1,2} = -\frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - v},$$

die andere

$$y_{3,4} = +\frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - w},$$

wo für u, v und w die gefundenen Werte einzusetzen sind. Damit sind die vier Werte für y gefunden und zugleich die für x. Ist eine der Wurzeln komplex, so muß nach den Formeln für die y auch die konjugierte Wurzel vorhanden sein.

Dabei war zunächst stillschweigend vorausgesetzt, daß für u, v und w stets reelle Größen gefunden werden, denn nur dann können 2) und 2*) übereinstimmen. Ob die Zerlegung in ein Produkt

$$(y^2 + uy + v)(y^2 - uy + w) = 0$$

mit reellen Koeffizienten stets möglich ist, soll untersucht werden, nachdem einige Beispiele berechnet worden sind.

45) Einige Beispiele.

Beispiel I. Die Gleichung

1) $$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

geht durch Einsetzung von

$$x = y + \tfrac{10}{4} = y + \tfrac{5}{2}$$

über in

2) $$y^4 - \tfrac{5}{2}y^2 + \tfrac{9}{16} = 0.$$

Da hier auch das Glied mit y weggefallen ist, handelt es sich um eine quadratische Gleichung mit der Unbekannten $y^2 = z$. Man findet für 1) die Wurzeln 1, 2, 3 und 4.

Beispiel II. Die Gleichung

1) $$x^4 - 13x^3 + 59x^2 - 107x + 60 = 0$$

geht durch

$$x = y + \tfrac{13}{4}$$

über in

2) $$y^4 - \tfrac{35}{8}y^2 + \tfrac{15}{8}y + \tfrac{189}{256} = 0.$$

Hier ist

$$a = -\tfrac{35}{8}, \quad b = \tfrac{15}{8}, \quad c = \tfrac{189}{256}.$$

Die Hülfsgleichung

$$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0$$

wird also

$$z^3 - \tfrac{35}{4}z^2 + \tfrac{259}{16}z - \tfrac{225}{64} = 0$$

oder

3) $$z^3 - 3\cdot\tfrac{35}{12}z^2 + 3\cdot\tfrac{259}{48}z - \tfrac{225}{64} = 0,$$

womit die Form

$$z^3 - 3\alpha z^2 + 3\beta z - \gamma = 0$$

gefunden ist.

$z = \eta + \frac{35}{12}$ verwandelt dies in

$$\eta^3 - 3k\eta = 2b,$$

wo

$$k = \alpha^2 - \beta = \left(\tfrac{35}{12}\right)^2 - \tfrac{259}{48} = \tfrac{28}{9},$$

$$2b = 2\alpha^3 - 3\alpha\beta + \gamma = 2\left(\tfrac{35}{12}\right)^3 - 3\,\tfrac{35}{12}\cdot\tfrac{259}{48} + \tfrac{225}{64} = \tfrac{160}{27}$$

ist, also $b = \frac{80}{27}$. Die letzte Hülfsgleichung lautet also

4) $$\eta^3 - 3\tfrac{28}{9}\,\eta = 2\tfrac{80}{27}.$$

Da $b^2 - k^3 = \frac{6400}{729} - \frac{21\,952}{729}$ negativ ist, hat man die Cosinus-Methode anzuwenden. Der Hülfswinkel bestimmt sich aus

$$\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{k^3}} = \frac{80}{\sqrt{21\,952}}$$

als

$$\varphi = 57^0\,19'\,10'',$$

so daß

$$\frac{\varphi}{3} = 19^0\,6'\,23''$$

ist. Die eine Wurzel von 4) ist demnach

$$\eta_1 = 2\sqrt{k}\cos\frac{\varphi}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{28}\cos 19^0\,6'\,23'' = \frac{10}{3}.$$

Dazu gehört

$$z_1 = \frac{10}{3} + \frac{35}{12} = \frac{75}{12} = \frac{25}{4} = u^2,$$

so daß $u = \frac{5}{2}$ eine Wurzel der nicht hingeschriebenen Hülfsgleichung

$$u^6 + 2au^4 + u^2(a^2 - 4c) - b^2$$

ist.

Demnach ist

$$v = \frac{1}{2}\left(a + u^2 - \frac{b}{u}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{35}{8} + \frac{25}{4} - \frac{15}{8}\cdot\frac{2}{5}\right) = \frac{9}{16}.$$

Folglich

$$y_{1,2} = -\frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - v} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{9}{16}} = -\frac{5}{4} \pm 1,$$

d. h.

$$y_1 = -\frac{1}{4},\quad y_2 = -\frac{9}{4}.$$

Schon damit ist als Wurzel von Gleichung 1) gefunden

$$x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{13}{4} = \frac{12}{4} = 3,\quad x_2 = -\frac{9}{4} + \frac{13}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Die übrigen Wurzeln bestimmen sich ebenso einfach als $x_2 = 4$ und $x_4 = 5$. Man kann dazu auch die Beziehungen zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten benutzen. Siehe unten (Nr. 47).

46) Allgemeine Bemerkungen.

Statt $u_1 = \frac{5}{2}$ konnte im letzten Beispiele auch $u_1 = -\frac{5}{2}$ benutzt werden. Denn auch dann wären v und w reelle Größen geworden. Ob statt η_1 auch η_2 und η_3 benutzt werden dürfen (die hier sämtlich reell waren), darüber wird allgemein folgendermaßen entschieden.

Die Gleichung 5) für z in Abschnitt 44 hat reelle Koeffizienten a und $a^2 - 4c$, folglich ist sie für uns stets lösbar. Nun sind zwei Hauptfälle möglich:

a) sämtliche Wurzeln z_1, z_2, z_3 sind reell;

b) eine, z. B. z_1 ist reell, die beiden andern, z_2 und z_3 sind der reellen Koeffizienten wegen konjugiert komplex und von der Form $p \pm qi$.

Fall a) Weil $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = b^2$, also positiv ist, so sind entweder sämtliche z positiv, oder eins davon, z. B. z_1 ist positiv, die andern beiden aber sind negativ. Andere Fälle sind ausgeschlossen. In dem einen Unterfalle giebt jedes z ein reelles $u = \sqrt{z}$, im andern giebt das eine positive ein reelles $u = \sqrt{z}$. Im einen Falle kann man also die Zerlegung mit drei verschiedenen u, im andern nur mit dem einen u vornehmen.

Fall b) Weil

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = z_1 \cdot (p + qi)(p - qi) = z_1 \cdot (p^2 + q^2)$$

gleich der positiven Größe b^2 sein muß, und weil der Faktor $p^2 + q^2$ stets positiv ist, so muß z_1 notwendig positiv sein, also giebt es auch hier ein reelles u.

Damit ist gezeigt, daß man stets mindestens ein reelles u findet und die angegebene Zerlegung stets möglich ist.

47) Zusammenhang zwischen den Wurzeln und Koeffizienten.

Jede Gleichung vierten Grades mit reellen Koeffizienten kann nach Obigem aufgelöst werden. Folglich läßt sich jede ganze rationale Funktion vierten Grades mit reellen Koeffizienten in ein Produkt von vier linearen Faktoren zerlegen, d. h. es ist

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4),$$

sobald x_1, x_2, x_3 und x_4 die Wurzeln der entsprechenden Gleichung sind. Sämtliche andern ganzen rationalen Funktionen vierten Grades, welche dieselben Wurzeln haben, können sich von dem Produkte nur um einen konstanten Faktor unterscheiden.

Multipliziert man das letztere aus, so erhält man

$$\begin{aligned} & x^4 - x^3 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ & + x^2 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) \\ & - x (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4) + x_1 x_2 x_3 x_4. \end{aligned}$$

Folglich bestehen zwischen den Koeffizienten und den Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

die Beziehungen

$$a = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$
$$b = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4,$$
$$c = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4,$$
$$d = x_1 x_2 x_3 x_4,$$

die leicht in Worte zu kleiden sind.

(Summe der Wurzeln, bezw. Summe aller möglichen Produkte aus je 2, 3, 4 Wurzeln.)

Es ist also leicht, Gleichungen vom vierten Grade aufzustellen, die gegebene Wurzeln haben sollen.

Sollen aber sämtliche Koeffizienten reell werden, so können komplexe Wurzeln nur in gerader Anzahl vorkommen, und sie müssen (nach den Schlußformeln für y) paarweise konjugiert sein.

So kann man z. B. Gleichungen bilden, die folgende Wurzeln haben:

$$2,\ 5,\ 6,\ 9;\quad 2,\ 5,\ 6 + 3i,\ 6 - 3i;$$
$$2 + 5i,\ 2 - 5i,\ 6 + 3i,\ 6 - 3i;\quad \text{u. s. w.}$$

III. Andeutungen über die Gleichungen n^{ten} Grades.

48) Die Wurzeln und Koeffizienten.

Die Gleichung n^{ten} Grades

$$1)\qquad (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) = 0$$

hat die Wurzeln x_1, x_2, x_3, ..., x_n, denn setzt man x gleich einem dieser Werte, so ist sie erfüllt.

Multipliziert man aus, so erhält man links eine ganze rationale Funktion vom n^{ten} Grade, also

$$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + \cdots + kx - l$$

oder

$$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + \cdots - kx + l,$$

je nachdem n eine ungerade oder gerade ganze Zahl ist. Dabei ist