Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

III. Andeutungen über Gleichungen nten Grades

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Folglich bestehen zwischen den Koeffizienten und den Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

die Beziehungen

$$a = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$
$$b = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4,$$
$$c = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4,$$
$$d = x_1 x_2 x_3 x_4,$$

die leicht in Worte zu kleiden sind.

(Summe der Wurzeln, bezw. Summe aller möglichen Produkte aus je 2, 3, 4 Wurzeln.)

Es ist also leicht, Gleichungen vom vierten Grade aufzustellen, die gegebene Wurzeln haben sollen.

Sollen aber sämtliche Koeffizienten reell werden, so können komplexe Wurzeln nur in gerader Anzahl vorkommen, und sie müssen (nach den Schlußformeln für y) paarweise konjugiert sein.

So kann man z. B. Gleichungen bilden, die folgende Wurzeln haben:

$$2,\ 5,\ 6,\ 9;\quad 2,\ 5,\ 6 + 3i,\ 6 - 3i;$$
$$2 + 5i,\ 2 - 5i,\ 6 + 3i,\ 6 - 3i;\quad \text{u. s. w.}$$

III. Andeutungen über die Gleichungen n^{ten} Grades.

48) Die Wurzeln und Koeffizienten.

Die Gleichung n^{ten} Grades

$$1)\qquad (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) = 0$$

hat die Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, denn setzt man x gleich einem dieser Werte, so ist sie erfüllt.

Multipliziert man aus, so erhält man links eine ganze rationale Funktion vom n^{ten} Grade, also

$$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + \cdots + kx - l$$

oder

$$x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} - cx^{n-3} + \cdots - kx + l,$$

je nachdem n eine ungerade oder gerade ganze Zahl ist. Dabei ist

$$
\begin{aligned}
a &= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + n = \sum x_p\,, \\
b &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \cdots + x_{n-1} x_n = \sum x_p x_q\,, \\
c &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = \sum x_p x_q x_r\,, \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
l &= x_1 x_2 x_3 \cdots x_n \qquad\qquad = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n\,,
\end{aligned}
$$

was leicht in Worte zu fassen ist.

Jede ganze rationale Funktion n^{ten} Grades, welche für dieselben Werte von x verschwindet und mit x^n beginnt, ist mit der Funktion 1) identisch.

Bemerkung. Damit zwei Funktionen identisch seien, müssen sie nach Seite 120 für mindestens $(n+1)$ Werte von x übereinstimmen. Die Übereinstimmung in $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist angenommen. Ein $(n+1)^{\text{ter}}$ Wert, in dem beide übereinstimmen, ist der Wert $x = \infty$. An einem Beispiele ist dies leicht zu verdeutlichen. Man betrachte zwei Funktionen

$$y = 3x^2 + 5x + 7 = x^2\left(3 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right)$$

und

$$\eta = 5x^2 + 8x + 6 = x^2\left(5 + \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}\right).$$

In jeder von ihnen werde $x = \infty$ gesetzt, dann wird $y = 3x^2$, $\eta = 5x^2$, so daß sich für $x = \infty$ die Werte der Funktionen wie 3 und 5 verhalten. Dagegen werden die Funktionen

$$y = 3x^2 + 5x + 7 = x^2\left(3 + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right)$$

und

$$\eta = 3x^2 + 8x + 6 = x^2\left(3 + \frac{8}{x} + \frac{6}{x^2}\right)$$

für $x = \infty$ beide gleich $3x^2$, d. h. sie stimmen für $x = \infty$ überein. So ist es stets, wenn die höchsten Potenzen denselben Faktor haben.

Damit ist die Übereinstimmung im $(n+1)^{\text{ten}}$ Werte für die beiden oben untersuchten Funktionen n^{ten} Grades nachgewiesen.

Ob jede ganze rationale Funktion n^{ten} Grades n Wurzeln hat, das bleibe vorläufig dahingestellt. Hat aber die Funktion n Wurzeln, so finden zwischen diesen und den Koeffizienten $a, b, c, \ldots, l$ die oben genannten Beziehungen statt.

Nur von diesem Falle soll vorläufig die Rede sein.

49) Sind die Koeffizienten $a, b, c, \ldots, l$ reell, so muß zu jeder etwa vorkommenden komplexen Wurzel $p + qi$ auch die konjugierte $p - qi$ vorhanden sein.

Beweis an einem Beispiele.

$$f(z) = z^2 + az + b$$

verschwinde für den komplexen Wert $z_1 = x_1 + y_1 i$, dann ist

$$\begin{aligned} f(z_1) &= (x_1 + y_1 i)^2 + a(x_1 + y_1 i) + b \\ &= x_1^2 + 2x_1 y_1 i - y_1^2 + ax_1 + ay_1 i + b \\ &= (x_1^2 - y_1^2 + ax_1 + b) + i(2x_1 y_1 + ay) = 0, \end{aligned}$$

folglich ist der reelle Teil für sich gleich Null und ebenso der imaginäre. Da aber

$$(x_1 - y_1^2 + ax_1 + b) = 0$$

und

$$i(2x_1 y_1 + ay_1) = 0$$

ist, so folgt auch

$$(x_1 - y_1^2 + ax_1 + b) - i(2x_1 y_1 + ay_1) = 0,$$

d. h. es ist auch

$$(x_1 - y_1 i)^2 + a(x_1 - y_1 i) + b = 0.$$

Folglich: Wenn $f(z) = z^2 + az + b$ für $z_1 = x_1 + y_1 i$ verschwindet, so verschwindet es auch für $z_1' = x_1 - y_1 i$.

Ganz dasselbe gilt, wie die Anwendung des binomischen Satzes auf $(x + y_1)$ zeigt, auch für Funktionen vom n^{ten} Grade. Bei jeder zeigt sich, daß

$$f(x_1 + y_1 i) = U_1 + V_1 i$$

sich in einen reellen und einen imaginären Teil zerlegen läßt, und daß beim Verschwinden der Funktion U_1 und V_1 für sich gleich Null sein müssen. Ist demnach $f(x_1 + y_1 i) = 0$, so muß auch

$$f(x_1 - y_1 i) = U_1 - V_1 i = 0$$

sein. Der Beweis gilt aber nur, weil das Imaginäre nicht in den Koeffizienten, sondern nur in dem Argumente $z = x + yi$ enthalten ist.

Nur dadurch, daß zu jeder Wurzel zugleich die konjugierte vorhanden ist, wird es ermöglicht, daß die Koeffizienten $a, b, c, \ldots, l$ reell sind.

In jedem heben sich die imaginären Bestandteile gegenseitig auf.

50) Andeutungen über den Fundamentalsatz.

Hat die Funktion n^{ten} Grades n Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, so ist sie durch $(x - x_1), (x - x_2), \ldots, (x - x_n)$ ohne Rest teilbar.

Kennt man also von einer entsprechenden Gleichung eine Wurzel x_1, so kann man die Gleichung durch Division mit $(x - x_1)$ auf den $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grad zurückführen.

Mit Hülfe von Stetigkeitsbetrachtungen, die über das Ziel der Schule hinausgehen, beweist die höhere Analysis, daß jede ganze rationale Funktion n^{ten} Grades mindestens eine Wurzel haben muß.

[Elementar erkennt man dies sofort an den ungeraden Funktionen. So sieht man z. B. daß

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = x^3\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}\right)$$

für $x = +\infty$ den positiven Grenzwert $+x^3$ hat, dagegen für $x = -\infty$ den negativen Grenzwert $-x^3$. Nach Seite 133 muß also zwischen $+\infty$ und $-\infty$ mindestens eine Wurzel liegen.]

Ist dieser Satz bewiesen, so gilt er auch für die Funktion $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades, die man durch Division durch $(x - x_1)$ erhält. Folglich muß noch eine zweite Wurzel x_2 existieren. Man dividiert durch $(x - x_2)$, erhält den $(n - 2)^{\text{ten}}$ Grad und wiederholt so den Schluß.

So wird bewiesen, daß jede ganze rationale Funktion n^{ten} Grades n Wurzeln haben muß.

Erst Gauß ist es gelungen, den wichtigen Satz streng zu beweisen, was nur dadurch möglich war, daß die Variable x genötigt wurde, alle möglichen komplexen Zahlenwerte anzunehmen. Die Einführung der komplexen Größen ist also die Vorbedingung für den Fundamentalsatz der Algebra. Nur durch sie war eine wissenschaftliche Abrundung dieses Gebietes zu ermöglichen. Diese kann aber nur auf der Hochschule gegeben werden.