Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

I. Jnvolutorische Punktreihen

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

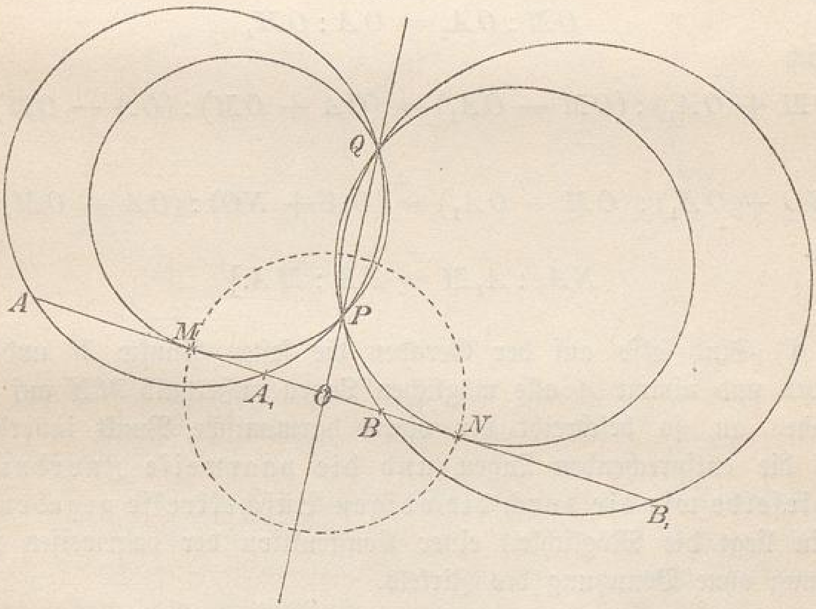
Anhang.

I. Involutorische Punktreihen.

1) Eine Reihe geometrischer Konstruktionen, insbesondere solche der Kegelschnitte aus fünf Elementen, sind erst durch die Einführung des Begriffes der **Involution** lösbar geworden, auf den man in anschaulicher Weise durch Vermittelung des Kreisbüschels gelangt.

Figur 146 stellt das durch zwei Punkte P und Q gehende Kreisbüschel dar, welches durch eine beliebige Transversale geschnitten

Fig. 146.



ist, jedoch so, daß der Schnittpunkt O mit der Potenzlinie außerhalb der Strecke PQ liegt. Diese Gerade berührt zwei der Büschelkreise in Punkten M und N, trifft die kleineren Kreise des Büschels nicht, schneidet aber jeden der größeren in zwei Punkten, z. B. in A und A_1, in B und B_1 u. s. w.

Dadurch sind die Punkte der Geraden paarweise einander zugeordnet, A_1 ist der zu A, B_1 der zu B zugeordnete Punkt u. s. w. In M fallen zwei einander zugeordnete Punkte zusammen, ebenso in N, so daß man M und ebenso N als Doppelpunkte bezeichnen kann.

2) Dabei finden gewisse Beziehungen statt. Es ist

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = \cdots = OM^2 = ON^2,$$

denn jedes dieser Produkte ist gleich $OP \cdot OQ$, d. h. gleich der Potenz $+ k^2$ des Punktes O in Bezug auf jeden der Büschelkreise. Mit Hülfe dieser Beziehung kann man die paarweise Zuordnung der Punkte auf eine andere Art konstruktiv durchführen. (Vierte Proportionale.)

3) Schlägt man um O mit $OM = ON$ einen Kreis, so schneidet derselbe jeden Büschelkreis rechtwinklig, folglich sind AA_1MN harmonische Punkte, ebenso BB_1MN, CC_1MN u. s. w. [Vgl. II, Nr. 78, oder wende folgende Berechnung an:

$$OA \cdot OA_1 = OM^2,$$

daher

$$OM : OA_1 = OA : OM,$$

folglich

$$(OM + OA_1) : (OM - OA_1) = (OA + OM) : (OA - OM),$$

oder

$$(NO + OA_1) : (OM - OA_1) = (OA + NO) : (OA - OM),$$

d. h.

$$NA_1 : A_1M = NA : MA.]$$

4) Sind also auf der Geraden die festen Punkte M und N gegeben und nimmt A alle möglichen Lagen außerhalb MN auf der Geraden an, so beschreibt der vierte harmonische Punkt innerhalb MN die entsprechenden Lagen und die paarweise Zuordnung ist dieselbe wie die durch die obigen Büschelkreise gegebenen. Hierin liegt die Möglichkeit einer Konstruktion der paarweisen Zuordnung ohne Benutzung des Zirkels.

5) Sind die Punktpaare einer Geraden in der besprochenen Weise einander zugeordnet, so nennt man die Punktreihe eine involutorische oder ein Punktsystem in Involution. O heißt der Mittelpunkt des Systems, das konstante Produkt $OA \cdot OA_1 = + k^2$ heißt die Potenz des Punktsystems. M und N heißen die Doppel-

punkte oder Asymptotenpunkte der Punktreihe. Durch Projektion geht eine involutorische Punktreihe wiederum in eine solche über, denn die harmonischen Beziehungen bleiben erhalten.

Ist $OA \cdot OA_1$ positiv, wie es hier angenommen wurde, so nennt man die Punktreihe nach Steiner eine hyperbolische Punktreihe. Der Grund dieser Benennung kann erst später angegeben werden.

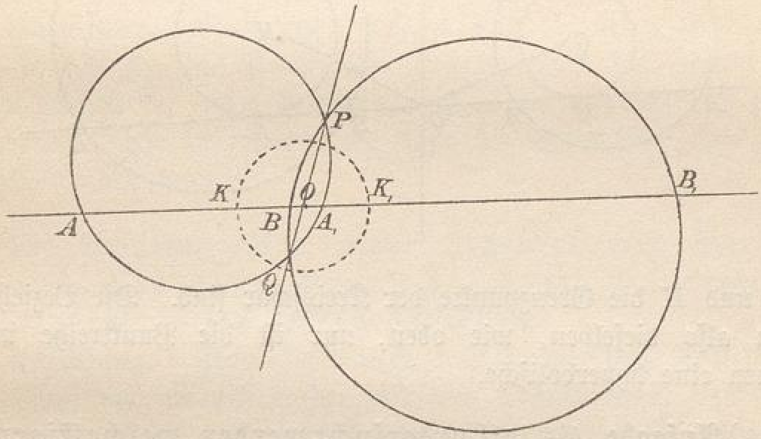
6) Man hat nur nötig die Transversale so zu legen, daß sie die Potenzlinie in einem Punkte O innerhalb der Strecke PQ schneidet, um auf den Fall mit negativer Potenz zu gelangen.

In Figur 147 ist das Produkt $OA \cdot OA_1 = OP \cdot OQ$ negativ, also gleich einer Konstanten $-k^2$. Für das gesamte Kreisbüschel ist

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = \cdots = -k^2.$$

Von dieser Beziehung ausgehend kann man die paarweise Zuordnung selbständig konstruktiv ausführen. Schlägt man jetzt um O mit K einen Kreis, so wird jeder Kreis des Büschels in den Endpunkten

Fig. 147.



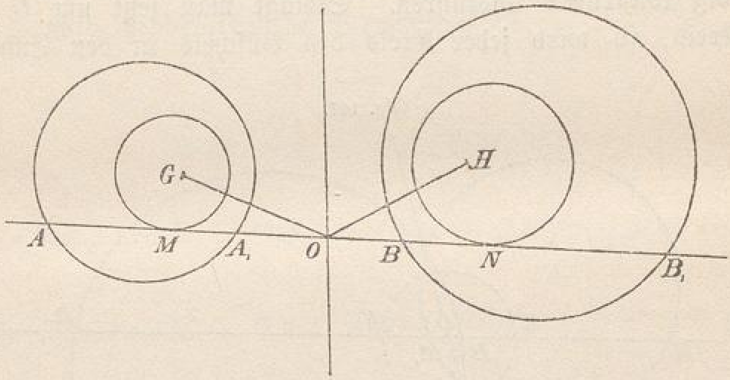
der kürzesten durch O zu legenden Sehne geschnitten. Dieser Kreis schneidet die Gerade in Punkten K und K_1, die im allgemeinen die einzigen einander zugeordneten sind, die von O gleiche Entfernung haben. (Einer der Büschelkreise geht durch P, Q, K und K_1.) Da jetzt sämtliche Kreise in zwei Punkten geschnitten werden, eine Berührung aber nicht stattfindet, so giebt es jetzt keine Doppelpunkte. Das Punktsystem heißt ebenfalls ein involutorisches und wird nach Steiner als ein elliptisches bezeichnet. Daß die Involution auch hier durch Projektion nicht aufgehoben wird, soll unten gezeigt werden.

7) [In abstrakterer Auffassung sagt man, die Doppelpunkte M und N seien jetzt imaginär, die imaginäre Tangente sei von der Länge $k\sqrt{-1}$, ihr Quadrat also gleich $-k^2$. Wie vorher jedes Punktpaar durch die reellen Punkte M und N getrennt war, so sei jetzt ein jedes durch die imaginären Punkte M und N harmonisch getrennt.]

8) Noch ein dritter Fall ist möglich, daß die schneidende Gerade durch einen der Büschelpunkte P und Q geht. Dann heißt die Punktreihe eine parabolische. Die Potenz ist dann gleich Null. M, N und O fallen in einem Punkte zusammen.

9) Statt die Gerade durch ein Kreisbüschel zu legen, kann man sie auch durch eine Kreisschar gehen lassen. Auch dabei ist $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 \cdots = OM^2 = ON^2 = OG^2 = OH^2$,

Fig. 148.



wo G und H die Grenzpunkte der Kreisschar sind. Die Beziehungen bleiben also dieselben, wie oben, nur ist die Punktreihe im allgemeinen eine hyperbolische.

10) **Aufgabe.** Es soll untersucht werden, welche Eigentümlichkeiten die elliptische oder hyperbolische Punktreihe annimmt, wenn die Gerade parallel zur Centrale oder parallel zur Potenzlinie gelegt wird, und wie dann die Doppelpunkte und der Mittelpunkt O liegen.

11) **Aufgabe.** Es soll gezeigt werden, daß eine involutorische Punktreihe entsteht, wenn jeder Punkt P einer Kreislinie von den beiden Endpunkten C und O eines Durchmessers aus auf eine zum Durchmesser senkrechte Gerade projiziert wird.

Bemerkung. Der Beweis ergiebt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke COA_1 und AOD, wonach $OA \cdot OA_1 = + k^2$ oder $- k^2$

Fig. 149 a.

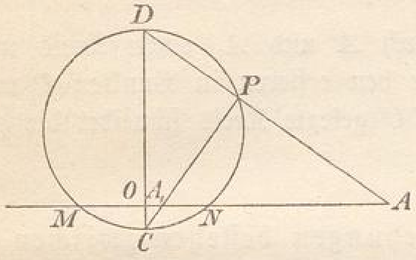
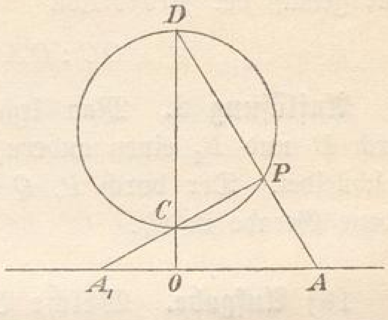


Fig. 149 b.



ist, je nachdem O innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt. Der erstere Fall giebt eine hyperbolische, der letztere eine elliptische Punktreihe. Im Falle der Berührung entsteht ein parabolisches Punktsystem.

12) **Aufgabe.** Von einer involutorischen Punktreihe sind zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 gegeben. Ihr Mittelpunkt O soll konstruiert werden.

Auflösung. Man lege durch A und A_1 einen Kreis, ebenso durch B und B_1, die Potenzlinie schneidet dann die Gerade im gesuchten Punkte O. (Am bequemsten ist es im allgemeinen, zwei sich schneidende Kreise zu zeichnen, da dann die Potenzlinie ohne weiteres gezogen werden kann.)

13) **Aufgabe.** Von einer hyperbolischen Punktreihe sind zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 gegeben; die Doppelpunkte sollen gefunden werden.

Auflösung. Man konstruiere wie vorher den Mittelpunkt O und schlage um ihn mit k, der mittleren Proportionale von OA und OA_1, einen Kreis. Dieser schneidet die gegebene Gerade in den Doppelpunkten M und N.

14) **Aufgabe.** Von einer elliptischen Punktreihe sind zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 gegeben; dasjenige Punktpaar soll gesucht werden, dessen Verbindungslinie durch O halbiert wird. (Auflösung wie vorher.)

15) **Aufgabe.** Von einer Punktreihe sind zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 gegeben. Zu einem beliebigen Punkte C soll der zugeordnete gesucht werden.

Auflösung 1. Man suche O und bestimme OC_1 aus der Gleichung

$$OA \cdot OA_1 = OC \cdot OC_1$$

oder gemäß der Proportion

$$OC : OA = OA_1 : OC_1 .$$

Auflösung 2. Man lege durch A und A_1 einen Kreis und durch B und B_1 einen andern, der den ersteren in Punkten P und Q schneidet. Der durch P, Q und C gelegte Kreis schneidet die gegebene Gerade in C_1.

16) **Aufgabe.** Welche Beziehungen bestehen zwischen je drei Punktpaaren einer involutorischen Punktreihe?

Auflösung. Ist die Punktreihe z. B. eine elliptische, ist O ihr Mittelpunkt und $-k^2$ die Potenz, so ist

$$OA_1 = \frac{-k^2}{OA} \quad \text{und} \quad OB = \frac{-k^2}{OB_1},$$

oder

$$BO = \frac{k^2}{OB_1},$$

folglich

$$BO + OA_1 = BA_1 = \frac{k^2}{OB_1} - \frac{k^2}{OA} = k^2 \frac{OA - OB_1}{OA \cdot OB_1}$$

$$= k^2 \frac{OA + B_1 O}{OA \cdot OB_1} = k^2 \frac{B_1 A}{OA \cdot OB_1},$$

also

$$A_1 B = k^2 \frac{AB_1}{OA \cdot OB_1}.$$

Ebenso ist

$$A_1 B_1 = k^2 \frac{AB}{OA \cdot OB}, \quad A_1 C = k^2 \frac{AC_1}{OA \cdot OC_1}, \quad A_1 C_1 = k^2 \frac{AC}{OA \cdot OC},$$

folglich

$$\frac{A_1 B \cdot A_1 B_1}{A_1 C \cdot A_1 C_1} = \frac{AB_1 \cdot AB}{OA^2 \cdot OB \cdot OB_1} \cdot \frac{OA^2 \cdot OC \cdot OC_1}{AC \cdot AC_1}.$$

Hebt man OA^2 und außerdem $OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = -k^2$, so bleibt eine Gleichung stehen, die sich schreiben läßt als

$$\frac{A_1 B}{AB} \cdot \frac{AC}{A_1 C} = \frac{AB_1}{A_1 B_1} \cdot \frac{A_1 C_1}{AC_1},$$

d. h.: Die Doppelverhältnisse $(A_1 ABC)$ und $(AA_1 B_1 C_1)$ sind einander gleich.

Folglich: Stehen drei Punktpaare in Involution, bildet man aus vier beliebigen der Punkte ein Doppelverhältnis und das entsprechende Doppelverhältnis der zugeordneten Punkte, so sind beide Doppelverhältnisse gleich, sobald in der Gleichung alle drei Punktpaare vorkommen.

Doppelverhältnisse wie $(A A_1 B B_1)$ und das zugeordnete $(A_1 A B_1 B)$ sind auszuschließen, da sie nur zwei Punktpaare enthalten, deren Anordnung willkürlich sein darf, so daß von Gleichheit der Doppelverhältnisse nicht gesprochen werden kann.

Ganz ebenso wird der Beweis für die hyperbolische Punktreihe geführt.

17) [Es war

1) $\frac{A_1 B}{AB} \cdot \frac{AC}{A_1 C} = \frac{AB_1}{A_1 B_1} \cdot \frac{A_1 C_1}{AC_1}$ oder $(A_1 ABC) = (AA_1 B_1 C_1)$.

Durch cyklische Vertauschung folgt daraus (ebenso durch die nach Seite 28 gestattete Vertauschung von A und A_1 mit B und B_1 in den Doppelverhältnissen)

2) $\frac{B_1 C}{BC} \cdot \frac{BA}{B_1 A} = \frac{BC_1}{B_1 C_1} \cdot \frac{B_1 A_1}{BA_1}$ oder $(B_1 BCA) = (BB_1 C_1 A_1)$

und ebenso

3) $\frac{C_1 A}{CA} \cdot \frac{CB}{C_1 B} = \frac{CA_1}{C_1 A_1} \cdot \frac{C_1 B_1}{CA_1}$ oder $(C_1 CAB) = (CC_1 A_1 B_1)$.

Durch Multiplikation folgt aus 1), 2) und 3) eine Gleichung, die sich durch Heben der gleichen Stücke schließlich auf

4) $$AB \cdot A_1 C \cdot B_1 C = A_1 B_1 \cdot AC_1 \cdot BC$$

zurückführen läßt. Durch Vertauschung von A und A_1 bezw. B und B_1 oder C und C_1 folgt der Reihe nach

5) $$A_1 B \cdot AC \cdot B_1 C_1 = AB_1 \cdot A_1 C_1 \cdot BC,$$

6) $$AB_1 \cdot A_1 C \cdot BC_1 = A_1 B \cdot AC_1 \cdot B_1 C,$$

7) $$AB \cdot A_1 C_1 \cdot B_1 C = A_1 B_1 \cdot AC \cdot BC_1.$$

Die genannten Vertauschungen sind gestattet, weil im Punktsystem A dieselbe Rolle spielt, wie A_1, ebenso B wie B_1 und C wie C_1. Diese sieben Gleichungen sind von Désargues aufgestellt. Die Vertauschbarkeit der konjugierten Punkte ohne Änderung des Doppelverhältniswertes wird der Grund zur Bezeichnung Involution gewesen sein.]

18) **Umkehrung.** Liegen drei Punktpaare A, A_1, B, B_1, C, C_1 so, daß eines der oben genannten Doppelverhältnisse ungeändert bleibt, wenn man für jeden Punkt seinen zugeordneten setzt, so stehen die Punkte in Involution.

Beweis. Es sei
$$(A_1 A B C) = (A A_1 B_1 C_1).$$
Angenommen, die sechs Punkte ständen nicht in Involution, sondern an Stelle von C_1 würde X mit den übrigen eine Involution bilden, so würde sein
$$(A_1 A B C) = (A A_1 B_1 X),$$
folglich
$$(A A_1 B_1 X) = A A_1 B_1 C).$$

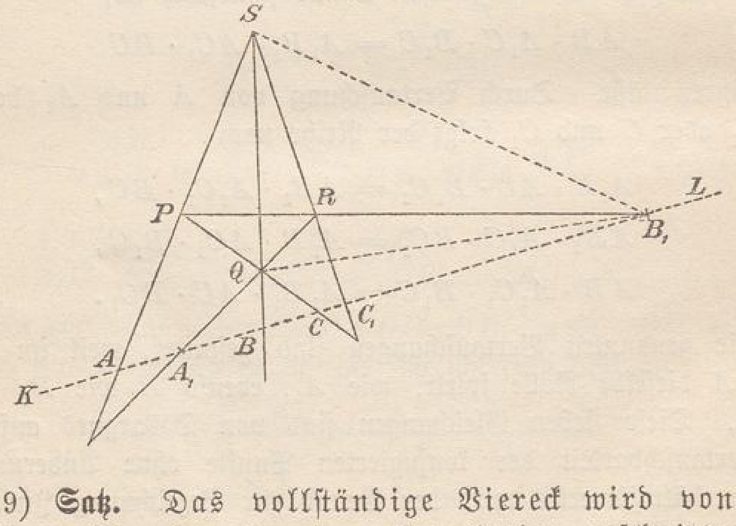
Da aber je drei Punkte der beiden letzten Doppelverhältnisse identisch sind, so müssen auch C und X zusammenfallen. Die gegebenen Punkte bilden also eine Involution. —

Da durch Projektion die Werte der Doppelverhältnisse nicht geändert werden, so bleibt dabei die Gleichung
$$(A_1 A B C) = (A A_1 B_1 C_1)$$
mit allen zugehörigen Gleichungen ebenfalls erhalten. Folglich:

Projektion eines involutorischen Punktsystems giebt stets ein involutorisches Punktsystem.

Damit ist dieser Satz, der oben nur von den hyperbolischen Punktreihen bewiesen war, allgemein bewiesen.

Fig. 150.



19) **Satz.** Das vollständige Viereck wird von jeder beliebigen Geraden in einer Involution geschnitten, und

zwar sind die Schnittpunkte mit je zwei Gegenseiten zugeordnete Punkte.

Beweis. $PQRS$ sei das vollständige Viereck mit seinen Diagonalen, KL sei die schneidende Gerade, dann sind die Büschel $S(PQRB_1)$ und $Q(PSRB_1)$ perspektivisch, schneiden also die Transversale KL in perspektivischen Punkten, wobei die Doppelverhältnisse erhalten bleiben. Es ist also

$$(ABC_1B_1) = (CBA_1B_1),$$

da aber auf Grund zulässiger Vertauschung

$$(CBA_1B_1) = (A_1B_1CB)$$

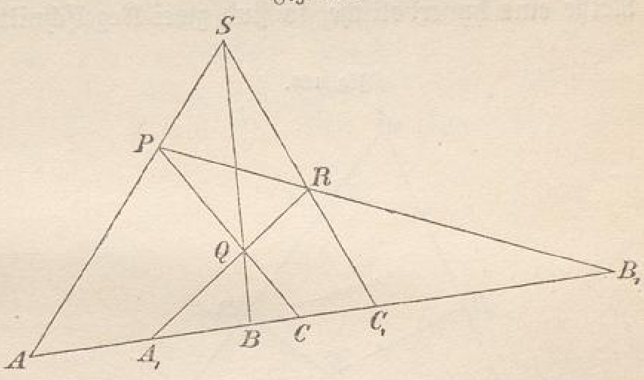
ist (vergl. Seite 28), so ist

$$(ABC_1B_1) = (A_1B_1CB).$$

Da in dem zweiten Doppelverhältnis die zugeordneten Punkte zu denen des ersten stehen, so stehen die sechs Schnittpunkte in Involution.

20) **Aufgabe.** Gegeben seien von einer Punktreihe zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 und ein beliebiger Punkt C_1. Der zugeordnete Punkt C zum letzteren soll ohne Hülfe des Zirkels konstruiert werden.

Fig. 151.

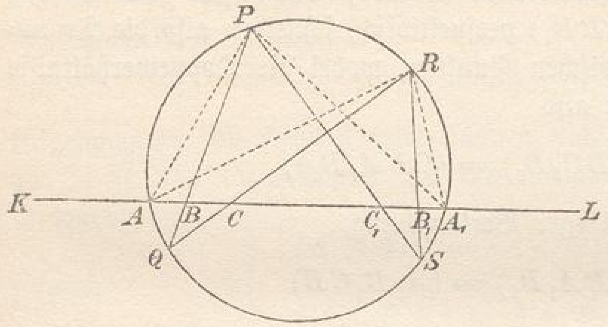


Auflösung. Man verbinde A_1, B_1 und C_1 mit einem beliebigen Punkte R der Ebene und nehme auf R_1C_1 einen beliebigen Punkt S an, den man mit A und B verbinde, was auf B_1R den Schnitt P und auf A_1R den Schnitt Q giebt. PQ giebt dann den gesuchten Punkt C.

21) **Satz von Désargues.** Ein Kegelschnitt und ein beliebiges Sehnenviereck desselben werden durch jede Gerade in Involution geschnitten.

Beweis. $PQRS$ sei das Sehnenviereck, KL die schneidende Gerade, dann sind die Büschel $P(AQSA_1)$ und $R(AQSA_1)$ projektivisch (vergl. Seite 23), folglich sind die Doppelverhältnisse (ABC_1A_1) und (ACB_1A_1) einander gleich. Das letztere läßt sich aber nach Seite 28 auch als (A_1B_1CA) schreiben, folglich ist

Fig. 152.



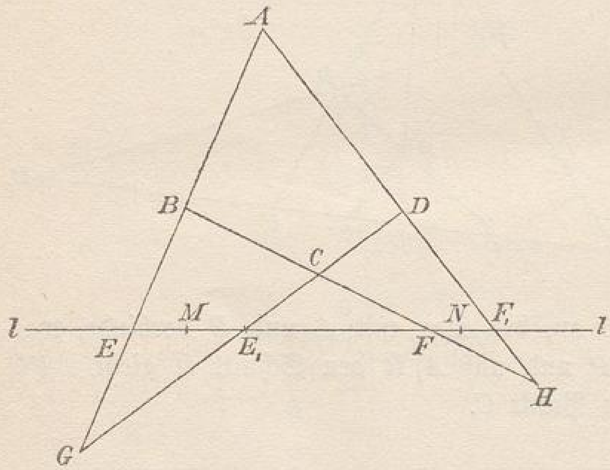
$$(ABC_1A_1) = (A_1B_1CA).$$

Da im zweiten Doppelverhältnis die zugeordneten Punkte zu denen des ersten stehen, so stehen die sechs Punkte in Involution.

22) **Folgerung.** Durch vier Punkte $PQRS$ lassen sich unendlich viele Kegelschnitte legen; jeder von diesen wird nebst den Seiten des Vierecks $PQRS$ durch jede Gerade KL in Involution geschnitten, und die Gesamtheit der Punktpaare ist eine involutorische Punktreihe. Berührt einer der Kegelschnitte die Gerade, so kann dies nur in einem der Doppelpunkte (M oder N) geschehen. Ist also die Reihe eine hyperbolische, so sind zwei Kegelschnitte möglich, welche durch die Punkte P, Q, R, S gehen und die Gerade KL berühren.

Dadurch wird folgende Aufgabe lösbar:

Fig. 153.



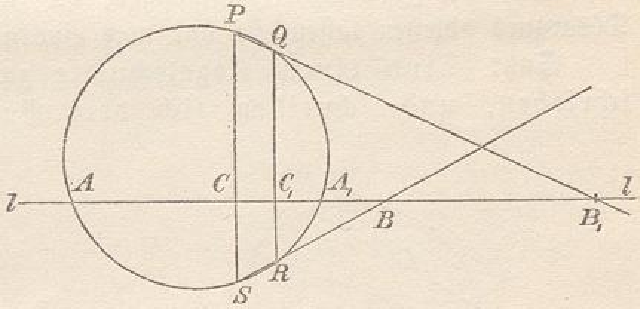
23) **Aufgabe.** Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der durch vier gegebene Punkte geht und eine beliebig gegebene Gerade berührt.

Auflösung. Sind A, B, C und D die gegebenen Punkte und l die gegebene Gerade, so vervollständige man das Viereck $ABCD$ durch G und H zum vollständigen Viereck, wobei man als Schnittpunkte von l mit den Gegenseiten die Punktepaare E und E_1, F und F_1 erhält.

Man konstruiere nach Nr. 13 die Doppelpunkte M und N für die dadurch bestimmte Punktreihe. Dann sind zwei Kegelschnitte bestimmt, von denen der eine durch die fünf Punkte $ABCDM$ geht, der andere durch $ABCDN$. Beide berühren die Gerade l.

24) **Bemerkung.** In Figur 154 ist ein Viereck $PQRS$ dargestellt, außerdem ein durch die Eckpunkte gehender Kegelschnitt und eine schneidende Gerade l. Rückt man nun P an Q und R an S, so werden PQ und RS Tangenten, die Sehnen SP und RQ werden zur Berührungssehne, C und C_1 fallen zusammen, und B und B_1 liegen auf den Tangenten.

Fig. 154.

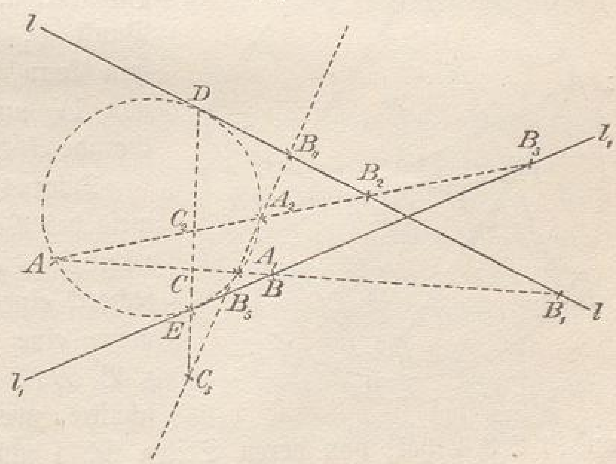


Jetzt ist auf der Geraden l eine involutorische Punktreihe bestimmt, für welche C der Doppelpunkt ist. Demnach gilt folgender

Satz: Werden ein Kegelschnitt und zwei seiner Tangenten nebst zugehöriger Berührungssehne durch eine beliebige Gerade geschnitten, so ist durch die Schnittpunkte eine involutorische Punktreihe bestimmt, für welche der auf der Berührungssehne liegende Schnittpunkt ein Doppelpunkt ist.

Dadurch wird folgende Aufgabe lösbar:

Fig. 155.



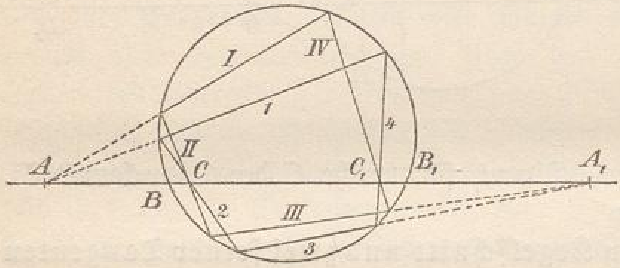
25) **Aufgabe.** Einen Kegelschnitt zu konstruieren, von dem drei Punkte und zwei Tangenten gegeben sind.

Auflösung. Sind l und l_1 die beiden gegebenen Tangenten, A, A_1 und A_2 die drei gegebenen Punkte, so giebt die Gerade AA_1 die Punktpaare A und A_1, B und B_1. Konstruiert man dazu den zwischen A und A_1 liegenden Doppelpunkt C, so ist dies ein Punkt der Berührungssehne. Dieselbe Konstruktion mache man mit der Geraden AA_2, was C_2 giebt (oder mit A_1A_2, was außerhalb B_4B_5 den Punkt C_3 giebt). Die Verbindungslinie CC_2 (oder CC_3) giebt die Berührungspunkte D und E der beiden Tangenten, so daß der Kegelschnitt nach Pascal fertig konstruiert werden kann. Zu beiden Kegelschnittsaufgaben können sofort die reciproken gelöst werden (4 Tangenten und 1 Punkt, oder 3 Tangenten und 2 Punkte).

Von den zahlreichen Folgerungen, die sich aus dem Satze von Désargues ableiten lassen, sei nur noch eine angegeben.

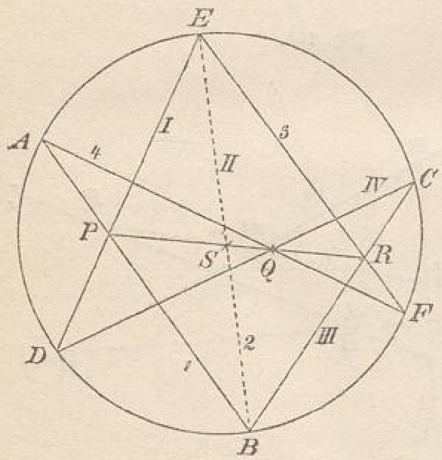
Satz: Sind einem Kegelschnitte zwei Vierecke einbeschrieben, und schneiden sich drei Paare entsprechender Seiten auf einer Geraden, so schneidet sich auch das vierte Paar auf dieser Geraden.

Fig. 156.



Beweis. I und 1, II und 2, III und 3 mögen sich in den Punkten A, C und A_1 der Geraden BB_1 schneiden. Für jedes der beiden Vierecke stehen A, A_1, B, B_1, C und der Schnittpunkt der vierten Seite mit der Geraden BB_1 in Involution. Da aber der sechste Punkt C_1 nur einmal vorhanden sein kann, muß der Schnittpunkt von IV und 4 ebenfalls auf die Gerade BB_1 fallen.

Fig. 157.



Daraus folgt ein weiterer Beweis des Pascalschen Satzes. Ist nämlich $ABCDEF$ ein Sehnensechseck eines Kegelschnitts, so ziehe man eine der Hauptdiagonalen, z. B. BE, so daß man im Kegelschnitte zwei Vierecke I II III IV und 1 2 3 4 hat, von deren Seiten sich I und 1 in P, III und IV in R schneiden, während II und 2 zusammenfallen, so daß man den auf PR liegenden Schnitt S als den von II und 2 betrachten darf. Jetzt muß auch Q, der Schnitt von IV und 4, auf der Geraden PR liegen, womit der Satz bewiesen ist.

Man versuche den obigen Satz dahin zu verallgemeinern, daß man die Ecken jedes Vierecks auf einem beliebigen Kreise des durch B und B_1 gehenden Kreisbüschels liegen läßt, und suche dann den zum Pascalschen analogen Satz auszusprechen. Ebenso versuche man sämtliche reciproken Sätze auszusprechen und zu beweisen, wodurch z. B. ein neuer Beweis für den Satz des Brianchon gefunden wird.

II. Involutorische Strahlenbüschel.

26) Verbindet man die Punkte einer involutorischen Punktreihe mit einem beliebigen Punkte, so entsteht ein involutorisches Strahlenbüschel. Dasselbe ist ein elliptisches, ein hyperbolisches, oder ein parabolisches, je nachdem die Punktreihe einer der drei Gruppen angehört.

Aus Gründen der Erhaltung der Doppelverhältnisse bei der Projektion oder bei der Abbildung mittels reciproker Polaren kann man die Eigenschaften des Strahlenbüschels sofort aus denen der Punktreihe ableiten, obwohl auch eine selbständige Entwickelung möglich ist, auf die hier verzichtet werden soll.

Ein involutorisches Strahlenbüschel wird durch jede Gerade in einer involutorischen Punktreihe geschnitten. (Projektion.)

27) Das hyperbolische Strahlenbüschel hat zwei Doppelstrahlen. Je zwei zugeordnete Strahlen sind durch die Doppelstrahlen harmonisch getrennt.

Die Doppelstrahlen werden als Asymptoten bezeichnet. Zu dem hyperbolischen Strahlenbüschel gehört die Winkelhalbierende zwischen den Asymptoten und der auf ihr senkrechte Strahl. Auf jeder Geraden nämlich, die von den Asymptoten gleiche Stücke abschneidet, sind die Schnittpunkte, der Halbierungspunkt ihrer Verbindungslinie und der unendlich ferne Punkt harmonische Punkte. Jene beiden Strahlen sind im allgemeinen die einzigen des involutorischen Büschels, die auf einander senkrecht stehen. Sie spielen dieselbe Rolle, wie bei der involutorischen Punktreihe der Punkt O und der unendlich ferne Punkt.