Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

a) Hyperbolische Punktreihen

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

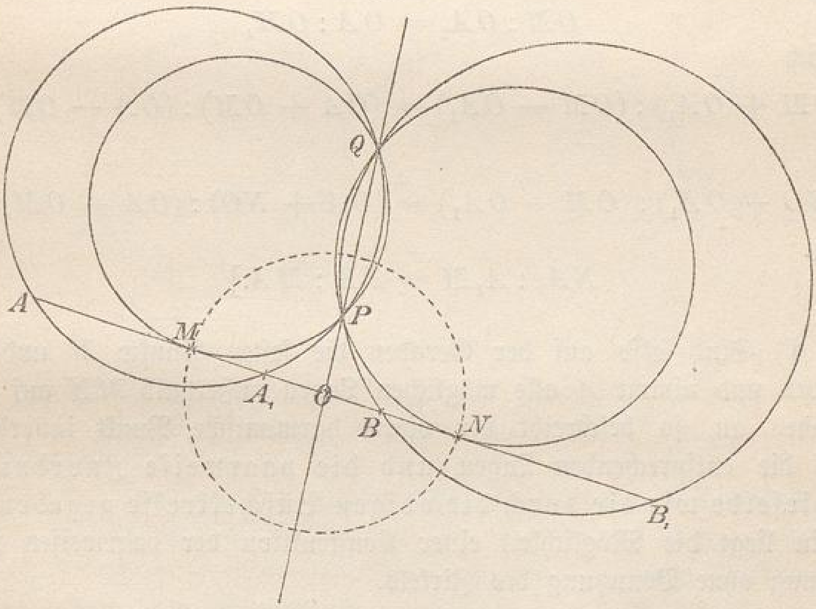
Anhang.

I. Involutorische Punktreihen.

1) Eine Reihe geometrischer Konstruktionen, insbesondere solche der Kegelschnitte aus fünf Elementen, sind erst durch die Einführung des Begriffes der **Involution** lösbar geworden, auf den man in anschaulicher Weise durch Vermittelung des Kreisbüschels gelangt.

Figur 146 stellt das durch zwei Punkte P und Q gehende Kreisbüschel dar, welches durch eine beliebige Transversale geschnitten

Fig. 146.



ist, jedoch so, daß der Schnittpunkt O mit der Potenzlinie außerhalb der Strecke PQ liegt. Diese Gerade berührt zwei der Büschelkreise in Punkten M und N, trifft die kleineren Kreise des Büschels nicht, schneidet aber jeden der größeren in zwei Punkten, z. B. in A und A_1, in B und B_1 u. s. w.

Dadurch sind die Punkte der Geraden paarweise einander zugeordnet, A_1 ist der zu A, B_1 der zu B zugeordnete Punkt u. s. w. In M fallen zwei einander zugeordnete Punkte zusammen, ebenso in N, so daß man M und ebenso N als Doppelpunkte bezeichnen kann.

2) Dabei finden gewisse Beziehungen statt. Es ist

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = \cdots = OM^2 = ON^2,$$

denn jedes dieser Produkte ist gleich $OP \cdot OQ$, d. h. gleich der Potenz $+k^2$ des Punktes O in Bezug auf jeden der Büschelkreise. Mit Hülfe dieser Beziehung kann man die paarweise Zuordnung der Punkte auf eine andere Art konstruktiv durchführen. (Vierte Proportionale.)

3) Schlägt man um O mit $OM = ON$ einen Kreis, so schneidet derselbe jeden Büschelkreis rechtwinklig, folglich sind AA_1MN harmonische Punkte, ebenso BB_1MN, CC_1MN u. s. w. [Vgl. II, Nr. 78, oder wende folgende Berechnung an:

$$OA \cdot OA_1 = OM^2,$$

daher

$$OM : OA_1 = OA : OM,$$

folglich

$$(OM + OA_1) : (OM - OA_1) = (OA + OM) : (OA - OM),$$

oder

$$(NO + OA_1) : (OM - OA_1) = (OA + NO) : (OA - OM),$$

d. h.

$$NA_1 : A_1M = NA : MA.]$$

4) Sind also auf der Geraden die festen Punkte M und N gegeben und nimmt A alle möglichen Lagen außerhalb MN auf der Geraden an, so beschreibt der vierte harmonische Punkt innerhalb MN die entsprechenden Lagen und die paarweise Zuordnung ist dieselbe wie die durch die obigen Büschelkreise gegebenen. Hierin liegt die Möglichkeit einer Konstruktion der paarweisen Zuordnung ohne Benutzung des Zirkels.

5) Sind die Punktpaare einer Geraden in der besprochenen Weise einander zugeordnet, so nennt man die Punktreihe eine involutorische oder ein Punktsystem in Involution. O heißt der Mittelpunkt des Systems, das konstante Produkt $OA \cdot OA_1 = +k^2$ heißt die Potenz des Punktsystems. M und N heißen die Doppel-

punkte oder Asymptotenpunkte der Punktreihe. Durch Projektion geht eine involutorische Punktreihe wiederum in eine solche über, denn die harmonischen Beziehungen bleiben erhalten.

Ist $OA \cdot OA_1$ positiv, wie es hier angenommen wurde, so nennt man die Punktreihe nach Steiner eine hyperbolische Punktreihe. Der Grund dieser Benennung kann erst später angegeben werden.

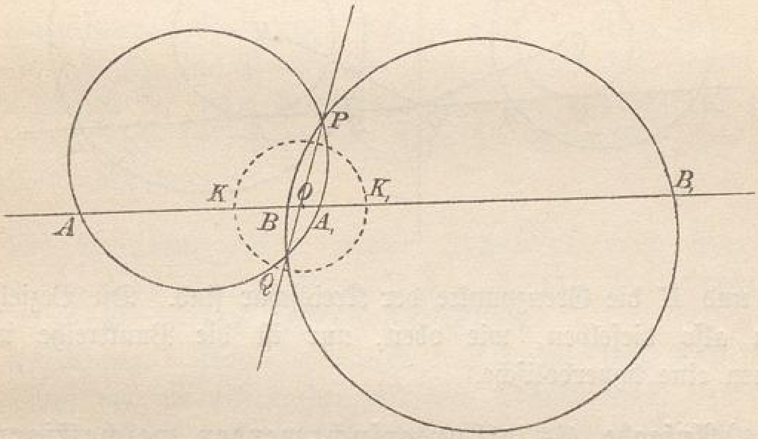
6) Man hat nur nötig die Transversale so zu legen, daß sie die Potenzlinie in einem Punkte O innerhalb der Strecke PQ schneidet, um auf den Fall mit negativer Potenz zu gelangen.

In Figur 147 ist das Produkt $OA \cdot OA_1 = OP \cdot OQ$ negativ, also gleich einer Konstanten $-k^2$. Für das gesamte Kreisbüschel ist

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = \cdots = -k^2.$$

Von dieser Beziehung ausgehend kann man die paarweise Zuordnung selbständig konstruktiv ausführen. Schlägt man jetzt um O mit K einen Kreis, so wird jeder Kreis des Büschels in den Endpunkten

Fig. 147.



der kürzesten durch O zu legenden Sehne geschnitten. Dieser Kreis schneidet die Gerade in Punkten K und K_1, die im allgemeinen die einzigen einander zugeordneten sind, die von O gleiche Entfernung haben. (Einer der Büschelkreise geht durch P, Q, K und K_1.) Da jetzt sämtliche Kreise in zwei Punkten geschnitten werden, eine Berührung aber nicht stattfindet, so giebt es jetzt keine Doppelpunkte. Das Punktsystem heißt ebenfalls ein involutorisches und wird nach Steiner als ein elliptisches bezeichnet. Daß die Involution auch hier durch Projektion nicht aufgehoben wird, soll unten gezeigt werden.