Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

b) Elliptische Punktreihen

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

punkte oder Asymptotenpunkte der Punktreihe. Durch Projektion geht eine involutorische Punktreihe wiederum in eine solche über, denn die harmonischen Beziehungen bleiben erhalten.

Ist $OA \cdot OA_1$ positiv, wie es hier angenommen wurde, so nennt man die Punktreihe nach Steiner eine hyperbolische Punktreihe. Der Grund dieser Benennung kann erst später angegeben werden.

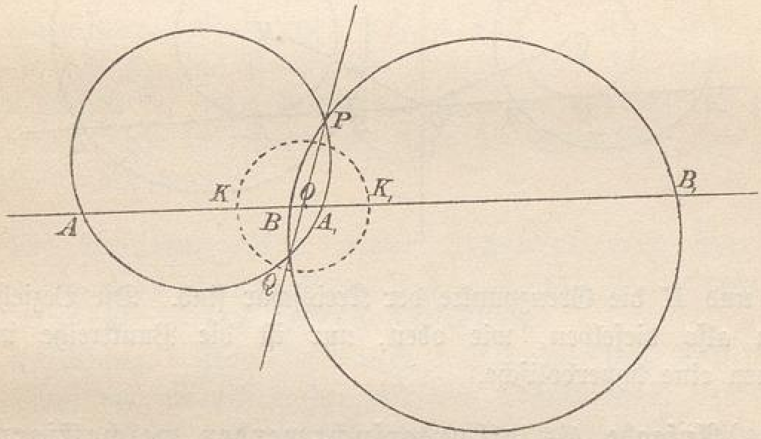
6) Man hat nur nötig die Transversale so zu legen, daß sie die Potenzlinie in einem Punkte O innerhalb der Strecke PQ schneidet, um auf den Fall mit negativer Potenz zu gelangen.

In Figur 147 ist das Produkt $OA \cdot OA_1 = OP \cdot OQ$ negativ, also gleich einer Konstanten $-k^2$. Für das gesamte Kreisbüschel ist

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = \cdots = -k^2.$$

Von dieser Beziehung ausgehend kann man die paarweise Zuordnung selbständig konstruktiv ausführen. Schlägt man jetzt um O mit K einen Kreis, so wird jeder Kreis des Büschels in den Endpunkten

Fig. 147.



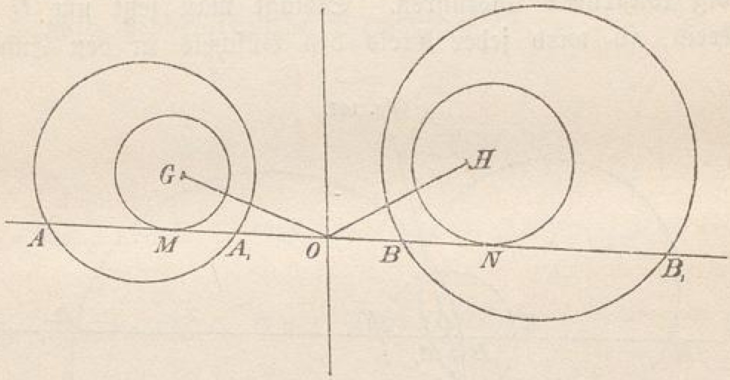
der kürzesten durch O zu legenden Sehne geschnitten. Dieser Kreis schneidet die Gerade in Punkten K und K_1, die im allgemeinen die einzigen einander zugeordneten sind, die von O gleiche Entfernung haben. (Einer der Büschelkreise geht durch P, Q, K und K_1.) Da jetzt sämtliche Kreise in zwei Punkten geschnitten werden, eine Berührung aber nicht stattfindet, so giebt es jetzt keine Doppelpunkte. Das Punktsystem heißt ebenfalls ein involutorisches und wird nach Steiner als ein elliptisches bezeichnet. Daß die Involution auch hier durch Projektion nicht aufgehoben wird, soll unten gezeigt werden.

7) [In abstrakterer Auffassung sagt man, die Doppelpunkte M und N seien jetzt imaginär, die imaginäre Tangente sei von der Länge $k\sqrt{-1}$, ihr Quadrat also gleich $-k^2$. Wie vorher jedes Punktpaar durch die reellen Punkte M und N getrennt war, so sei jetzt ein jedes durch die imaginären Punkte M und N harmonisch getrennt.]

8) Noch ein dritter Fall ist möglich, daß die schneidende Gerade durch einen der Büschelpunkte P und Q geht. Dann heißt die Punktreihe eine parabolische. Die Potenz ist dann gleich Null. M, N und O fallen in einem Punkte zusammen.

9) Statt die Gerade durch ein Kreisbüschel zu legen, kann man sie auch durch eine Kreisschar gehen lassen. Auch dabei ist $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 \cdots = OM^2 = ON^2 = OG^2 = OH^2$,

Fig. 148.



wo G und H die Grenzpunkte der Kreisschar sind. Die Beziehungen bleiben also dieselben, wie oben, nur ist die Punktreihe im allgemeinen eine hyperbolische.

10) **Aufgabe.** Es soll untersucht werden, welche Eigentümlichkeiten die elliptische oder hyperbolische Punktreihe annimmt, wenn die Gerade parallel zur Centrale oder parallel zur Potenzlinie gelegt wird, und wie dann die Doppelpunkte und der Mittelpunkt O liegen.

11) **Aufgabe.** Es soll gezeigt werden, daß eine involutorische Punktreihe entsteht, wenn jeder Punkt P einer Kreislinie von den beiden Endpunkten C und O eines Durchmessers aus auf eine zum Durchmesser senkrechte Gerade projiziert wird.