Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

c) Aufgaben

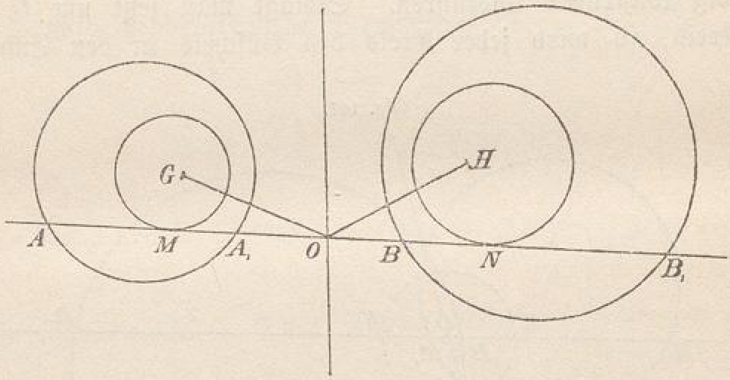
urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

7) [In abstrakterer Auffassung sagt man, die Doppelpunkte M und N seien jetzt imaginär, die imaginäre Tangente sei von der Länge $k\sqrt{-1}$, ihr Quadrat also gleich $-k^2$. Wie vorher jedes Punktpaar durch die reellen Punkte M und N getrennt war, so sei jetzt ein jedes durch die imaginären Punkte M und N harmonisch getrennt.]

8) Noch ein dritter Fall ist möglich, daß die schneidende Gerade durch einen der Büschelpunkte P und Q geht. Dann heißt die Punktreihe eine parabolische. Die Potenz ist dann gleich Null. M, N und O fallen in einem Punkte zusammen.

9) Statt die Gerade durch ein Kreisbüschel zu legen, kann man sie auch durch eine Kreisschar gehen lassen. Auch dabei ist $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 \cdots = OM^2 = ON^2 = OG^2 = OH^2$,

Fig. 148.



wo G und H die Grenzpunkte der Kreisschar sind. Die Beziehungen bleiben also dieselben, wie oben, nur ist die Punktreihe im allgemeinen eine hyperbolische.

10) **Aufgabe.** Es soll untersucht werden, welche Eigentümlichkeiten die elliptische oder hyperbolische Punktreihe annimmt, wenn die Gerade parallel zur Centrale oder parallel zur Potenzlinie gelegt wird, und wie dann die Doppelpunkte und der Mittelpunkt O liegen.

11) **Aufgabe.** Es soll gezeigt werden, daß eine involutorische Punktreihe entsteht, wenn jeder Punkt P einer Kreislinie von den beiden Endpunkten C und O eines Durchmessers aus auf eine zum Durchmesser senkrechte Gerade projiziert wird.

Bemerkung. Der Beweis ergiebt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke COA_1 und AOD, wonach $OA \cdot OA_1 = +k^2$ oder $-k^2$

Fig. 149 a.

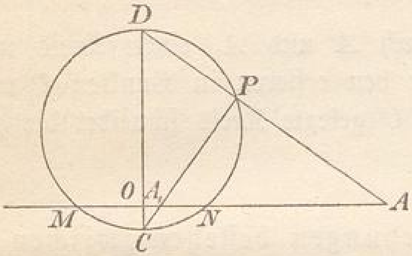
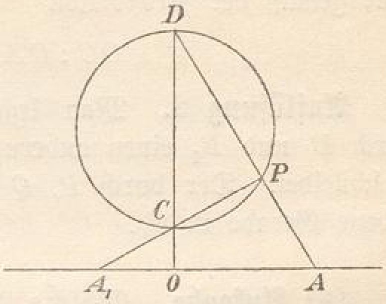


Fig. 149 b.



ist, je nachdem O innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt. Der erstere Fall giebt eine hyperbolische, der letztere eine elliptische Punktreihe. Im Falle der Berührung entsteht ein parabolisches Punktsystem.

12) **Aufgabe.** Von einer involutorischen Punktreihe sind zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 gegeben. Ihr Mittelpunkt O soll konstruiert werden.

Auflösung. Man lege durch A und A_1 einen Kreis, ebenso durch B und B_1, die Potenzlinie schneidet dann die Gerade im gesuchten Punkte O. (Am bequemsten ist es im allgemeinen, zwei sich schneidende Kreise zu zeichnen, da dann die Potenzlinie ohne weiteres gezogen werden kann.)

13) **Aufgabe.** Von einer hyperbolischen Punktreihe sind zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 gegeben; die Doppelpunkte sollen gefunden werden.

Auflösung. Man konstruiere wie vorher den Mittelpunkt O und schlage um ihn mit k, der mittleren Proportionale von OA und OA_1, einen Kreis. Dieser schneidet die gegebene Gerade in den Doppelpunkten M und N.

14) **Aufgabe.** Von einer elliptischen Punktreihe sind zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 gegeben; dasjenige Punktpaar soll gesucht werden, dessen Verbindungslinie durch O halbiert wird. (Auflösung wie vorher.)

15) **Aufgabe.** Von einer Punktreihe sind zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 gegeben. Zu einem beliebigen Punkte C soll der zugeordnete gesucht werden.

Auflösung 1. Man suche O und bestimme OC_1 aus der Gleichung

$$OA \cdot OA_1 = OC \cdot OC_1$$

oder gemäß der Proportion

$$OC : OA = OA_1 : OC_1 .$$

Auflösung 2. Man lege durch A und A_1 einen Kreis und durch B und B_1 einen andern, der den ersteren in Punkten P und Q schneidet. Der durch P, Q und C gelegte Kreis schneidet die gegebene Gerade in C_1.

16) **Aufgabe.** Welche Beziehungen bestehen zwischen je drei Punktpaaren einer involutorischen Punktreihe?

Auflösung. Ist die Punktreihe z. B. eine elliptische, ist O ihr Mittelpunkt und $-k^2$ die Potenz, so ist

$$OA_1 = \frac{-k^2}{OA} \quad \text{und} \quad OB = \frac{-k^2}{OB_1},$$

oder

$$BO = \frac{k^2}{OB_1},$$

folglich

$$BO + OA_1 = BA_1 = \frac{k^2}{OB_1} - \frac{k^2}{OA} = k^2 \frac{OA - OB_1}{OA \cdot OB_1}$$

$$= k^2 \frac{OA + B_1 O}{OA \cdot OB_1} = k^2 \frac{B_1 A}{OA \cdot OB_1},$$

also

$$A_1 B = k^2 \frac{AB_1}{OA \cdot OB_1}.$$

Ebenso ist

$$A_1 B_1 = k^2 \frac{AB}{OA \cdot OB}, \quad A_1 C = k^2 \frac{AC_1}{OA \cdot OC_1}, \quad A_1 C_1 = k^2 \frac{AC}{OA \cdot OC},$$

folglich

$$\frac{A_1 B \cdot A_1 B_1}{A_1 C \cdot A_1 C_1} = \frac{AB_1 \cdot AB}{OA^2 \cdot OB \cdot OB_1} \cdot \frac{OA^2 \cdot OC \cdot OC_1}{AC \cdot AC_1}.$$

Hebt man OA^2 und außerdem $OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = -k^2$, so bleibt eine Gleichung stehen, die sich schreiben läßt als

$$\frac{A_1 B}{AB} \cdot \frac{AC}{A_1 C} = \frac{AB_1}{A_1 B_1} \cdot \frac{A_1 C_1}{AC_1},$$

d. h.: Die Doppelverhältnisse $(A_1 ABC)$ und $(AA_1 B_1 C_1)$ sind einander gleich.