Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

e) Satz von Desargues

zwar sind die Schnittpunkte mit je zwei Gegenseiten zugeordnete Punkte.

Beweis. $PQRS$ sei das vollständige Viereck mit seinen Diagonalen, KL sei die schneidende Gerade, dann sind die Büschel $S(PQRB_1)$ und $Q(PSRB_1)$ perspektivisch, schneiden also die Transversale KL in perspektivischen Punkten, wobei die Doppelverhältnisse erhalten bleiben. Es ist also

$$(ABC_1B_1) = (CBA_1B_1),$$

da aber auf Grund zulässiger Vertauschung

$$(CBA_1B_1) = (A_1B_1CB)$$

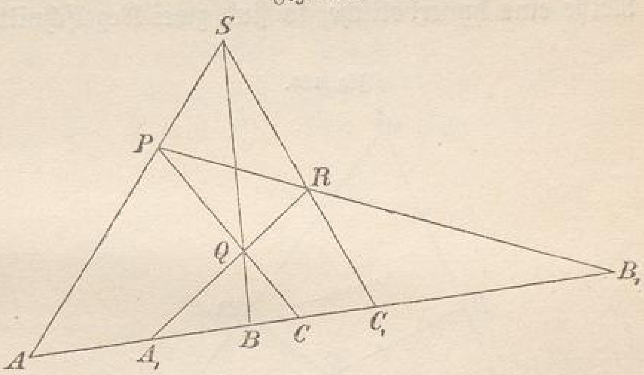
ist (vergl. Seite 28), so ist

$$(ABC_1B_1) = (A_1B_1CB).$$

Da in dem zweiten Doppelverhältnis die zugeordneten Punkte zu denen des ersten stehen, so stehen die sechs Schnittpunkte in Involution.

20) **Aufgabe.** Gegeben seien von einer Punktreihe zwei Punktpaare A und A_1, B und B_1 und ein beliebiger Punkt C_1. Der zugeordnete Punkt C zum letzteren soll ohne Hülfe des Zirkels konstruiert werden.

Fig. 151.

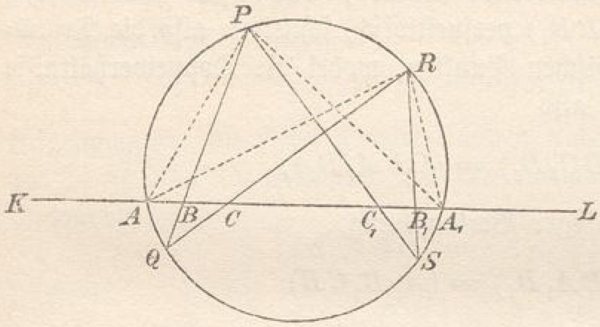


Auflösung. Man verbinde A_1, B_1 und C_1 mit einem beliebigen Punkte R der Ebene und nehme auf R_1C_1 einen beliebigen Punkt S an, den man mit A und B verbinde, was auf B_1R den Schnitt P und auf A_1R den Schnitt Q giebt. PQ giebt dann den gesuchten Punkt C.

21) **Satz von Désargues.** Ein Kegelschnitt und ein beliebiges Sehnenviereck desselben werden durch jede Gerade in Involution geschnitten.

Beweis. $PQRS$ sei das Sehnenviereck, KL die schneidende Gerade, dann sind die Büschel $P(AQSA_1)$ und $R(AQSA_1)$ projektivisch (vergl. Seite 23), folglich sind die Doppelverhältnisse (ABC_1A_1) und (ACB_1A_1) einander gleich. Das letztere läßt sich aber nach Seite 28 auch als (A_1B_1CA) schreiben, folglich ist

Fig. 152.



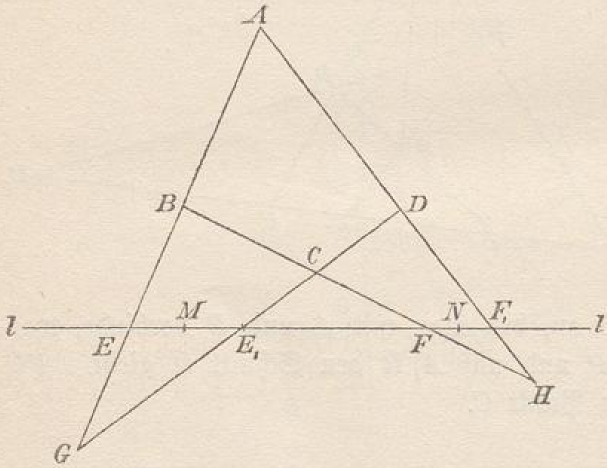
$$(ABC_1A_1) = (A_1B_1CA).$$

Da im zweiten Doppelverhältnis die zugeordneten Punkte zu denen des ersten stehen, so stehen die sechs Punkte in Involution.

22) **Folgerung.** Durch vier Punkte $PQRS$ lassen sich unendlich viele Kegelschnitte legen; jeder von diesen wird nebst den Seiten des Vierecks $PQRS$ durch jede Gerade KL in Involution geschnitten, und die Gesamtheit der Punktpaare ist eine involutorische Punktreihe. Berührt einer der Kegelschnitte die Gerade, so kann dies nur in einem der Doppelpunkte (M oder N) geschehen. Ist also die Reihe eine hyperbolische, so sind zwei Kegelschnitte möglich, welche durch die Punkte P, Q, R, S gehen und die Gerade KL berühren.

Dadurch wird folgende Aufgabe lösbar:

Fig. 153.



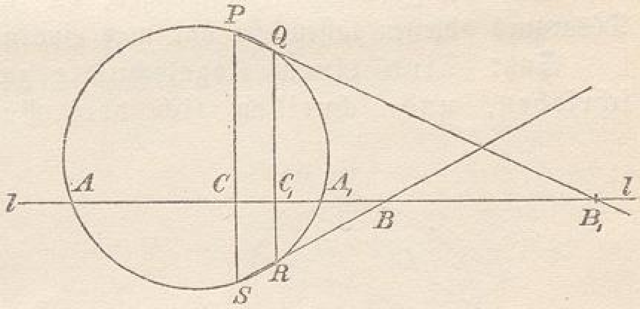
23) **Aufgabe.** Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der durch vier gegebene Punkte geht und eine beliebig gegebene Gerade berührt.

Auflösung. Sind A, B, C und D die gegebenen Punkte und l die gegebene Gerade, so vervollständige man das Viereck $ABCD$ durch G und H zum vollständigen Viereck, wobei man als Schnittpunkte von l mit den Gegenseiten die Punktepaare E und E_1, F und F_1 erhält.

Man konstruiere nach Nr. 13 die Doppelpunkte M und N für die dadurch bestimmte Punktreihe. Dann sind zwei Kegelschnitte bestimmt, von denen der eine durch die fünf Punkte $ABCDM$ geht, der andere durch $ABCDN$. Beide berühren die Gerade l.

24) **Bemerkung.** In Figur 154 ist ein Viereck $PQRS$ dargestellt, außerdem ein durch die Eckpunkte gehender Kegelschnitt und eine schneidende Gerade l. Rückt man nun P an Q und R an S, so werden PQ und RS Tangenten, die Sehnen SP und RQ werden zur Berührungssehne, C und C_1 fallen zusammen, und B und B_1 liegen auf den Tangenten.

Fig. 154.

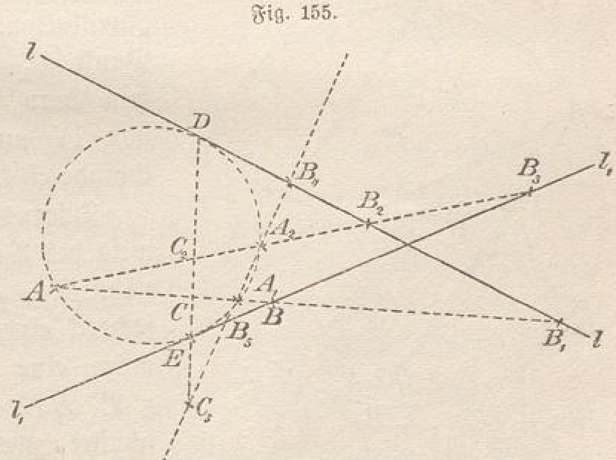


Jetzt ist auf der Geraden l eine involutorische Punktreihe bestimmt, für welche C der Doppelpunkt ist. Demnach gilt folgender

Satz: Werden ein Kegelschnitt und zwei seiner Tangenten nebst zugehöriger Berührungssehne durch eine beliebige Gerade geschnitten, so ist durch die Schnittpunkte eine involutorische Punktreihe bestimmt, für welche der auf der Berührungssehne liegende Schnittpunkt ein Doppelpunkt ist.

Dadurch wird folgende Aufgabe lösbar:

Fig. 155.



25) **Aufgabe.** Einen Kegelschnitt zu konstruieren, von dem drei Punkte und zwei Tangenten gegeben sind.