Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

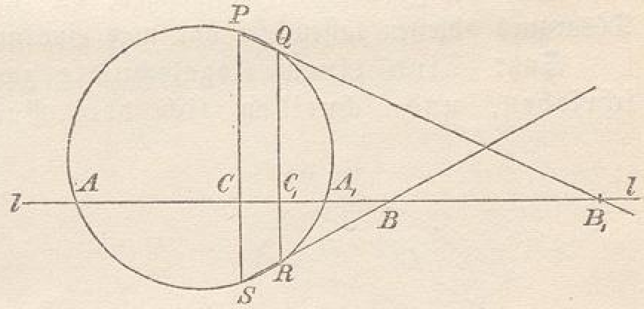
f) Kegelschnittskonstruktionen

vollständigen Viereck, wobei man als Schnittpunkte von l mit den Gegenseiten die Punktepaare E und E_1, F und F_1 erhält.

Man konstruiere nach Nr. 13 die Doppelpunkte M und N für die dadurch bestimmte Punktreihe. Dann sind zwei Kegelschnitte bestimmt, von denen der eine durch die fünf Punkte $ABCDM$ geht, der andere durch $ABCDN$. Beide berühren die Gerade l.

24) **Bemerkung.** In Figur 154 ist ein Viereck $PQRS$ dargestellt, außerdem ein durch die Eckpunkte gehender Kegelschnitt und eine schneidende Gerade l. Rückt man nun P an Q und R an S, so werden PQ und RS Tangenten, die Sehnen SP und RQ werden zur Berührungssehne, C und C_1 fallen zusammen, und B und B_1 liegen auf den Tangenten.

Fig. 154.

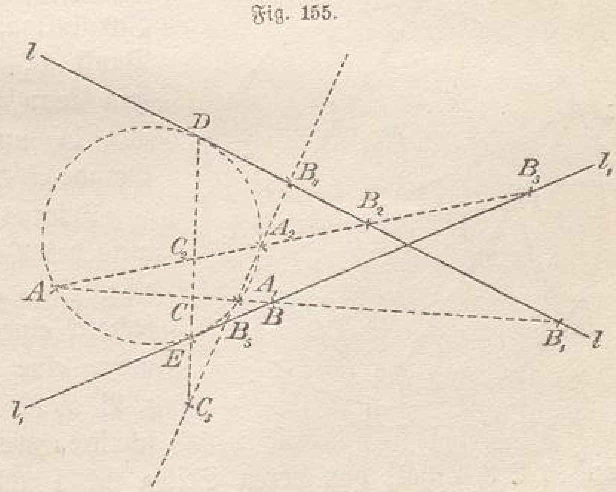


Jetzt ist auf der Geraden l eine involutorische Punktreihe bestimmt, für welche C der Doppelpunkt ist. Demnach gilt folgender

Satz: Werden ein Kegelschnitt und zwei seiner Tangenten nebst zugehöriger Berührungssehne durch eine beliebige Gerade geschnitten, so ist durch die Schnittpunkte eine involutorische Punktreihe bestimmt, für welche der auf der Berührungssehne liegende Schnittpunkt ein Doppelpunkt ist.

Dadurch wird folgende Aufgabe lösbar:

Fig. 155.



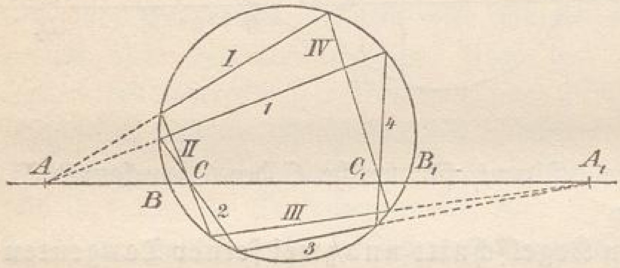
25) **Aufgabe.** Einen Kegelschnitt zu konstruieren, von dem drei Punkte und zwei Tangenten gegeben sind.

Auflösung. Sind l und l_1 die beiden gegebenen Tangenten, A, A_1 und A_2 die drei gegebenen Punkte, so giebt die Gerade AA_1 die Punktpaare A und A_1, B und B_1. Konstruiert man dazu den zwischen A und A_1 liegenden Doppelpunkt C, so ist dies ein Punkt der Berührungssehne. Dieselbe Konstruktion mache man mit der Geraden AA_2, was C_2 giebt (oder mit A_1A_2, was außerhalb B_4B_5 den Punkt C_3 giebt). Die Verbindungslinie CC_2 (oder CC_3) giebt die Berührungspunkte D und E der beiden Tangenten, so daß der Kegelschnitt nach Pascal fertig konstruiert werden kann. Zu beiden Kegelschnittsaufgaben können sofort die reciproken gelöst werden (4 Tangenten und 1 Punkt, oder 3 Tangenten und 2 Punkte).

Von den zahlreichen Folgerungen, die sich aus dem Satze von Désargues ableiten lassen, sei nur noch eine angegeben.

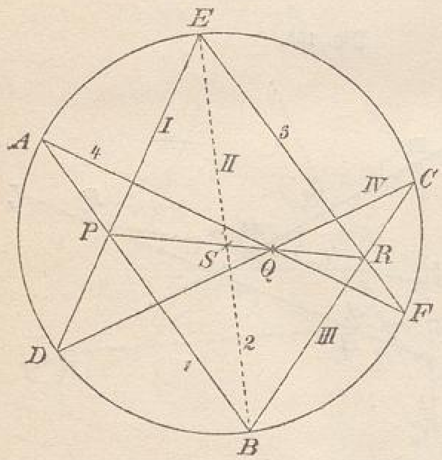
Satz: Sind einem Kegelschnitte zwei Vierecke einbeschrieben, und schneiden sich drei Paare entsprechender Seiten auf einer Geraden, so schneidet sich auch das vierte Paar auf dieser Geraden.

Fig. 156.



Beweis. I und 1, II und 2, III und 3 mögen sich in den Punkten A, C und A_1 der Geraden BB_1 schneiden. Für jedes der beiden Vierecke stehen A, A_1, B, B_1, C und der Schnittpunkt der vierten Seite mit der Geraden BB_1 in Involution. Da aber der sechste Punkt C_1 nur einmal vorhanden sein kann, muß der Schnittpunkt von IV und 4 ebenfalls auf die Gerade BB_1 fallen.

Fig. 157.



Daraus folgt ein weiterer Beweis des Pascalschen Satzes. Ist nämlich $ABCDEF$ ein Sehnensechseck eines Kegelschnitts, so ziehe man eine der Hauptdiagonalen, z. B. BE, so daß man im Kegelschnitte zwei Vierecke I II III IV und 1 2 3 4 hat, von deren Seiten sich I und 1 in P, III und IV