Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

g) Pascalsatz

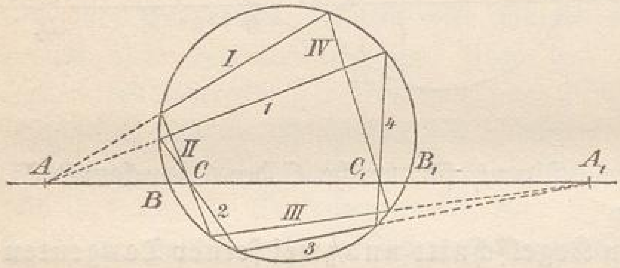
urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Auflösung. Sind l und l_1 die beiden gegebenen Tangenten, A, A_1 und A_2 die drei gegebenen Punkte, so giebt die Gerade AA_1 die Punktpaare A und A_1, B und B_1. Konstruiert man dazu den zwischen A und A_1 liegenden Doppelpunkt C, so ist dies ein Punkt der Berührungssehne. Dieselbe Konstruktion mache man mit der Geraden AA_2, was C_2 giebt (oder mit A_1A_2, was außerhalb B_4B_5 den Punkt C_3 giebt). Die Verbindungslinie CC_2 (oder CC_3) giebt die Berührungspunkte D und E der beiden Tangenten, so daß der Kegelschnitt nach Pascal fertig konstruiert werden kann. Zu beiden Kegelschnittsaufgaben können sofort die reciproken gelöst werden (4 Tangenten und 1 Punkt, oder 3 Tangenten und 2 Punkte).

Von den zahlreichen Folgerungen, die sich aus dem Satze von Désargues ableiten lassen, sei nur noch eine angegeben.

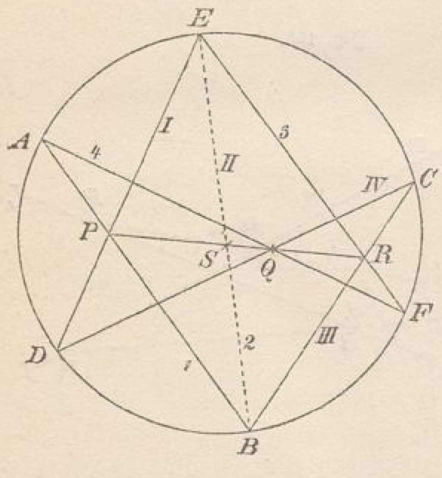
Satz: Sind einem Kegelschnitte zwei Vierecke einbeschrieben, und schneiden sich drei Paare entsprechender Seiten auf einer Geraden, so schneidet sich auch das vierte Paar auf dieser Geraden.

Fig. 156.



Beweis. I und 1, II und 2, III und 3 mögen sich in den Punkten A, C und A_1 der Geraden BB_1 schneiden. Für jedes der beiden Vierecke stehen A, A_1, B, B_1, C und der Schnittpunkt der vierten Seite mit der Geraden BB_1 in Involution. Da aber der sechste Punkt C_1 nur einmal vorhanden sein kann, muß der Schnittpunkt von IV und 4 ebenfalls auf die Gerade BB_1 fallen.

Fig. 157.



Daraus folgt ein weiterer Beweis des Pascalschen Satzes. Ist nämlich $ABCDEF$ ein Sehnensechseck eines Kegelschnitts, so ziehe man eine der Hauptdiagonalen, z. B. BE, so daß man im Kegelschnitte zwei Vierecke I II III IV und 1 2 3 4 hat, von deren Seiten sich I und 1 in P, III und IV in R schneiden, während II und 2 zusammenfallen, so daß man den auf PR liegenden Schnitt S als den von II und 2 betrachten darf. Jetzt muß auch Q, der Schnitt von IV und 4, auf der Geraden PR liegen, womit der Satz bewiesen ist.

Man versuche den obigen Satz dahin zu verallgemeinern, daß man die Ecken jedes Vierecks auf einem beliebigen Kreise des durch B und B_1 gehenden Kreisbüschels liegen läßt, und suche dann den zum Pascalschen analogen Satz auszusprechen. Ebenso versuche man sämtliche reciproken Sätze auszusprechen und zu beweisen, wodurch z. B. ein neuer Beweis für den Satz des Brianchon gefunden wird.

II. Involutorische Strahlenbüschel.

26) Verbindet man die Punkte einer involutorischen Punktreihe mit einem beliebigen Punkte, so entsteht ein involutorisches Strahlenbüschel. Dasselbe ist ein elliptisches, ein hyperbolisches, oder ein parabolisches, je nachdem die Punktreihe einer der drei Gruppen angehört.

Aus Gründen der Erhaltung der Doppelverhältnisse bei der Projektion oder bei der Abbildung mittels reciproker Polaren kann man die Eigenschaften des Strahlenbüschels sofort aus denen der Punktreihe ableiten, obwohl auch eine selbständige Entwickelung möglich ist, auf die hier verzichtet werden soll.

Ein involutorisches Strahlenbüschel wird durch jede Gerade in einer involutorischen Punktreihe geschnitten. (Projektion.)

27) Das hyperbolische Strahlenbüschel hat zwei Doppelstrahlen. Je zwei zugeordnete Strahlen sind durch die Doppelstrahlen harmonisch getrennt.

Die Doppelstrahlen werden als Asymptoten bezeichnet. Zu dem hyperbolischen Strahlenbüschel gehört die Winkelhalbierende zwischen den Asymptoten und der auf ihr senkrechte Strahl. Auf jeder Geraden nämlich, die von den Asymptoten gleiche Stücke abschneidet, sind die Schnittpunkte, der Halbierungspunkt ihrer Verbindungslinie und der unendlich ferne Punkt harmonische Punkte. Jene beiden Strahlen sind im allgemeinen die einzigen des involutorischen Büschels, die auf einander senkrecht stehen. Sie spielen dieselbe Rolle, wie bei der involutorischen Punktreihe der Punkt O und der unendlich ferne Punkt.