Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

Jnvolutorische Strahlenbüschel

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

in R schneiden, während II und 2 zusammenfallen, so daß man den auf PR liegenden Schnitt S als den von II und 2 betrachten darf. Jetzt muß auch Q, der Schnitt von IV und 4, auf der Geraden PR liegen, womit der Satz bewiesen ist.

Man versuche den obigen Satz dahin zu verallgemeinern, daß man die Ecken jedes Vierecks auf einem beliebigen Kreise des durch B und B_1 gehenden Kreisbüschels liegen läßt, und suche dann den zum Pascalschen analogen Satz auszusprechen. Ebenso versuche man sämtliche reciproken Sätze auszusprechen und zu beweisen, wodurch z. B. ein neuer Beweis für den Satz des Brianchon gefunden wird.

II. Involutorische Strahlenbüschel.

26) Verbindet man die Punkte einer involutorischen Punktreihe mit einem beliebigen Punkte, so entsteht ein involutorisches Strahlenbüschel. Dasselbe ist ein elliptisches, ein hyperbolisches, oder ein parabolisches, je nachdem die Punktreihe einer der drei Gruppen angehört.

Aus Gründen der Erhaltung der Doppelverhältnisse bei der Projektion oder bei der Abbildung mittels reciproker Polaren kann man die Eigenschaften des Strahlenbüschels sofort aus denen der Punktreihe ableiten, obwohl auch eine selbständige Entwickelung möglich ist, auf die hier verzichtet werden soll.

Ein involutorisches Strahlenbüschel wird durch jede Gerade in einer involutorischen Punktreihe geschnitten. (Projektion.)

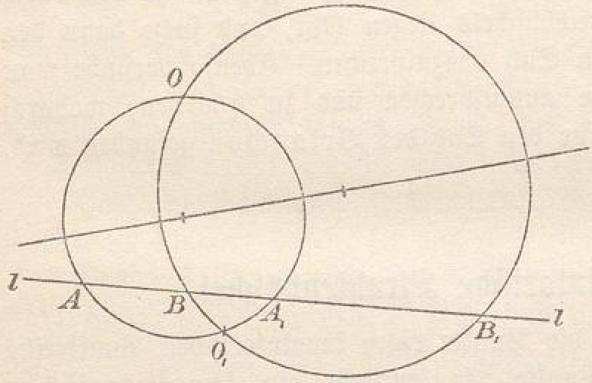
27) Das hyperbolische Strahlenbüschel hat zwei Doppelstrahlen. Je zwei zugeordnete Strahlen sind durch die Doppelstrahlen harmonisch getrennt.

Die Doppelstrahlen werden als Asymptoten bezeichnet. Zu dem hyperbolischen Strahlenbüschel gehört die Winkelhalbierende zwischen den Asymptoten und der auf ihr senkrechte Strahl. Auf jeder Geraden nämlich, die von den Asymptoten gleiche Stücke abschneidet, sind die Schnittpunkte, der Halbierungspunkt ihrer Verbindungslinie und der unendlich ferne Punkt harmonische Punkte. Jene beiden Strahlen sind im allgemeinen die einzigen des involutorischen Büschels, die auf einander senkrecht stehen. Sie spielen dieselbe Rolle, wie bei der involutorischen Punktreihe der Punkt O und der unendlich ferne Punkt.

28) Für das elliptische Strahlenbüschel sind die Asymptoten imaginär.

Ist durch A, A_1 und B, B_1 ein elliptisches Strahlenbüschel durch den Punkt O gegeben, und legt man durch OAA_1 und ebenso durch OBB_1 einen Kreis, so entsteht ein Schnittpunkt O_1. Das durch O und O_1 gehende Kreisbüschel giebt die paarweise Zuordnung aller Punkte und aller Strahlen durch O. Im allgemeinen schneidet die Gerade l die Centrale des Kreisbüschels, folglich liegt im allgemeinen ein Kreismittelpunkt auf der Geraden. Die Schnittpunkte des dadurch bestimmten Büschelkreises geben diejenigen zugeordneten Strahlen des elliptischen Büschels, die aufeinander senkrecht stehen. (Peripheriewinkel im Halbkreise.)

Fig. 158.



Fällt die Gerade l in die Centrale, so stehen sämtliche Strahlen des durch O gehenden Büschels auf einander senkrecht. Dieser Fall tritt also ein, sobald zwei rechtwinklige Strahlenpaare existieren. Man nennt ein solches rechtwinkliges Strahlenbüschel auch ein circulares, da es z. B. von den auf einander senkrechten Durchmessern eines Kreises gebildet wird. Durch Projektion folgt daraus der Satz:

29) **Satz.** Die konjugierten Durchmesser eines Kegelschnitts bilden ein involutorisches Strahlenbüschel.

Die beiden Hauptachsen geben die auf einander senkrechten Strahlen. Zieht man zur einen Asymptote einer Hyperbel eine parallele Sehne, so liegt ihr Halbierungspunkt in unendlicher Entfernung. Die Verbindungslinie des Hyperbelmittelpunktes mit diesem Halbierungspunkte fällt also mit der Asymptote zusammen, d. h. die Asymptote und ihr konjugierter Durchmesser fallen zusammen, folglich hat das Büschel der konjugierten Durchmesser bei der Hyperbel zwei Doppelstrahlen, die Asymptoten. Bei der Ellipse hingegen sind bei dem betreffenden Büschel Doppelstrahlen nicht vorhanden. Die Parabel bildet den Zwischenfall.

Hieraus erklären sich die Namen des hyperbolischen, elliptischen und parabolischen Strahlenbüschels und der entsprechenden Punktreihen, der Asymptotenstrahlen und Asymptotenpunkte und ebenso die Namen der hyperbolischen und elliptischen Kreisschaar.

30) [Den gleichen Doppelverhältnissen von drei involutorischen Punktpaaren entsprechen nach Seite 25 gleiche Doppelverhältnisse bei drei involutorischen Strahlenbüscheln. Sind nämlich die zugeordneten Strahlenpaare $a\alpha$, $b\beta$ und $c\gamma$, so gelten folgende Gleichungen:

1) $$\frac{\sin(ab)\sin(a\beta)}{\sin(\alpha b)\sin(\alpha\beta)} = \frac{\sin(ac)\sin(a\gamma)}{\sin(\alpha c)\sin(\alpha\gamma)}$$

2) $$\frac{\sin(bc)\sin(b\gamma)}{\sin(\beta c)\sin(\beta\gamma)} = \frac{\sin(ba)\sin(b\alpha)}{\sin(\beta a)\sin(\beta\alpha)}$$

3) $$\frac{\sin(ca)\sin(c\alpha)}{\sin(\gamma a)\sin(\gamma\alpha)} = \frac{\sin(cb)\sin(c\beta)}{\sin(\gamma b)\sin(\gamma\beta)}$$

4) $$\sin(a\beta)\sin(b\gamma)\sin(c\alpha) = \sin(a\gamma)\sin(b\alpha)\sin(c\beta)$$

5) $$\sin(a\beta)\sin(bc)\sin(\gamma a) = \sin(ac)\sin(b\alpha)\sin(\gamma\beta)$$

6) $$\sin(b\gamma)\sin(ca)\sin(\alpha\beta) = \sin(ba)\sin(c\beta)\sin(\alpha\gamma)$$

7) $$\sin(c\alpha)\sin(ab)\sin(\beta\gamma) = \sin(cb)\sin(\alpha\gamma)\sin(\beta\alpha)].$$

31) Noch ist der Begriff der Potenz für das Strahlenbüschel abzuleiten. Bei der Punktreihe geschah dies mit Hülfe des Mittelpunktes O und des unendlich fernen Punktes. Das Analogon dazu sind bei dem Büschel die beiden senkrecht aufeinander stehenden zugeordneten Strahlen, die man auch als Achsen des Systems bezeichnet.

Sind a und α die Achsen, b und β, c und γ zwei andere Strahlenpaare, so ist zu bedenken, daß

$$\sphericalangle(a\alpha) = 90^0,\ \sphericalangle(\alpha b) = 90^0 - \sphericalangle(ab),\ \sphericalangle(\alpha\beta) = 90^0 - \sphericalangle(a\beta),$$
$$\sphericalangle(\alpha c) = 90^0 - \sphericalangle(ac),\ \sphericalangle(\alpha\gamma) = 90^0 - \sphericalangle(a\gamma) \quad \text{ist.}$$

Demnach geht die Formel

$$\frac{\sin(ab)\sin(a\beta)}{\sin(\alpha b)\sin(\alpha\beta)} = \frac{\sin(ac)\sin(a\gamma)}{\sin(\alpha c)\sin(\alpha\gamma)}$$

über in

$$\frac{\sin(ab)\sin(a\beta)}{\cos(ab)\cos(a\beta)} = \frac{\sin(ac)\sin(a\gamma)}{\cos(ac)\cos(a\gamma)}$$

oder in

$$\tan(ab)\tan(a\beta) = \tan(ac)\tan(a\gamma).$$

Dieses konstant bleibende Produkt wird als Potenz des involutorischen Strahlenbüschels betrachtet.

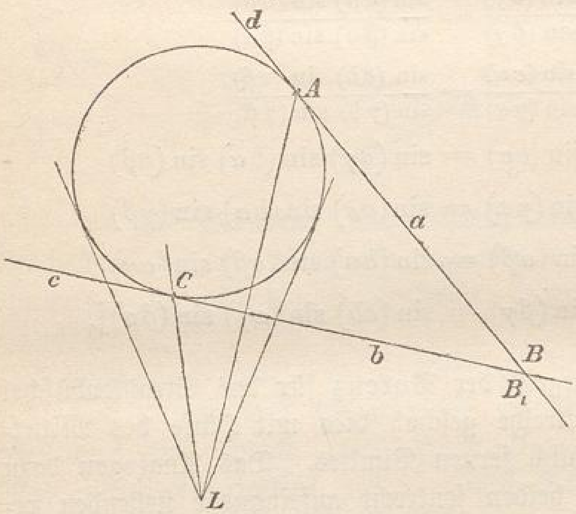
32) Man versuche, zu den Sätzen über involutorische Punktreihen die Sätze über involutorische Strahlenbüschel zu bilden und ebenso die reciproken Konstruktionsaufgaben zu lösen. So folgt z. B. aus Satz 19) der folgende:

Verbindet man einen beliebigen Punkt L mit den sechs Ecken eines vollständigen Vierseits, so entstehen drei Strahlenpaare in Involution.

Aus 21) folgt:

Verbindet man einen beliebigen Punkt L mit den Ecken eines Tangentenvierecks an einem Kegelschnitt, so bilden die Verbindungslinien und die von L aus gezogenen Tangenten drei Strahlenpaare in Involution.

Fig. 159.



Man kann das Tangentenviereck bei A und C mit Winkeln von 0^0 bezw. 180^0 versehen, dann fällt der Schnittpunkt B der Tangenten a und b mit B_1, dem Schnittpunkte der Tangenten c und d zusammen. Verbindet man jetzt L mit A, (BB_1) und C und zieht man noch die Tangenten, so hat man drei Strahlenpaare in Involution, von denen das eine ein Doppelstrahl ist.

33) **Aufgabe.** Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der vier gegebene Tangenten berührt und außerdem durch einen gegebenen Punkt L geht.

Auflösung. Nach 23) ist die Auflösung folgende: Man verbinde L mit den sechs Eckpunkten des gegebenen Vierseits und betrachte die zu den Gegenecken gehörigen Strahlen als zugeordnete. Jetzt konstruiere man (z. B. mit Hülfe der Punktreihe auf einer beliebigen Transversale des Büschels) die Doppelstrahlen desselben. Jeder Doppelstrahl giebt eine Tangente durch L. (Warum?) Durch eine dieser Tangenten und die vier gegebenen ist nach Brianchon der Kegelschnitt bestimmt.

34) **Aufgabe.** Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der drei gegebene Tangenten berührt und durch zwei gegebene Punkte geht.

Auflösung. Nach 25) ist die Auflösung folgende: Sind a, a_1, a_2 die gegebenen Tangenten, L und L_1 die gegebenen Punkte, so verbinde man den Schnitt von a und a_1 mit L und L_1, was zwei Strahlen b und b_1 giebt. Zu den Strahlenpaaren aa_1 und bb_1 suche man den Doppelstrahl c (z. B. mit Hülfe der Punktreihe auf einer Transversalen).

Jetzt verbinde man den Schnitt von a_1 und a_2 mit L und L_1, was Strahlen d und d_1 giebt. Zu den Paaren a_1, a_2 und d, d_1 suche man den Doppelstrahl c_1. Die Doppelstrahlen c und c_1 schneiden sich in einem Punkt C, der mit L und L_1 verbunden die Tangenten in diesen Punkten giebt. Jetzt kann der Kegelschnitt aus fünf Tangenten nach Brianchon auskonstruiert werden.

Damit ist gezeigt, wie man mit Hülfe des Involutionsbegriffes den Kegelschnitt aus fünf Elementen (Punkten oder Tangenten) allgemein konstruieren kann.

Zum tieferen Eindringen in die synthetische Geometrie sei das Studium der Steinerschen Vorlesungen, herausgegeben von Schröter (Leipzig bei B. G. Teubner) empfohlen. In analytischer Behandlung findet man dasselbe und reiches Übungsmaterial in der analytischen Geometrie der Kegelschnitte von Salmon-Fiedler (in demselben Verlage erschienen). Rein projektivisch wird der Gegenstand in dem Lehrbuche von Dr. J. Thomae (Halle, bei Nebert) behandelt.

III. Nachtrag zum Pascalsatz.

Die Projektion eines Kreises giebt stets einen Kegelschnitt, von dem der Pascalsatz gilt. Es fragt sich aber, ob umgekehrt jede Kurve, von der der Pascalsatz gilt, sich in einen Kreis projizieren läßt und daher als Schnitt eines geraden oder schiefen Kreiskegels zu betrachten ist. Ist dies gezeigt, so gilt dies auch bezüglich des Brianchon-Satzes und von allen mit Hülfe projektivischer Punktreihen und Strahlenbüschel nach den früher angegebenen Methoden konstruierter Kurven.

Der Beweis kann folgendermaßen geführt werden, wobei jedoch der Name Kegelschnitt vermieden und Pascalkurve gesagt werden soll.