Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

b) Beziehungen zwischen drei involutorischen Strahlenpaaren

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Hieraus erklären sich die Namen des hyperbolischen, elliptischen und parabolischen Strahlenbüschels und der entsprechenden Punktreihen, der Asymptotenstrahlen und Asymptotenpunkte und ebenso die Namen der hyperbolischen und elliptischen Kreisschaar.

30) [Den gleichen Doppelverhältnissen von drei involutorischen Punktpaaren entsprechen nach Seite 25 gleiche Doppelverhältnisse bei drei involutorischen Strahlenbüscheln. Sind nämlich die zugeordneten Strahlenpaare $a\alpha$, $b\beta$ und $c\gamma$, so gelten folgende Gleichungen:

$$1)\qquad \frac{\sin(ab)\sin(a\beta)}{\sin(\alpha b)\sin(\alpha\beta)} = \frac{\sin(ac)\sin(a\gamma)}{\sin(\alpha c)\sin(\alpha\gamma)}$$

$$2)\qquad \frac{\sin(bc)\sin(b\gamma)}{\sin(\beta c)\sin(\beta\gamma)} = \frac{\sin(ba)\sin(b\alpha)}{\sin(\beta a)\sin(\beta\alpha)}$$

$$3)\qquad \frac{\sin(ca)\sin(c\alpha)}{\sin(\gamma a)\sin(\gamma\alpha)} = \frac{\sin(cb)\sin(c\beta)}{\sin(\gamma b)\sin(\gamma\beta)}$$

$$4)\qquad \sin(a\beta)\sin(b\gamma)\sin(c\alpha) = \sin(a\gamma)\sin(b\alpha)\sin(c\beta)$$

$$5)\qquad \sin(a\beta)\sin(bc)\sin(\gamma a) = \sin(ac)\sin(b\alpha)\sin(\gamma\beta)$$

$$6)\qquad \sin(b\gamma)\sin(ca)\sin(\alpha\beta) = \sin(ba)\sin(c\beta)\sin(\alpha\gamma)$$

$$7)\qquad \sin(c\alpha)\sin(ab)\sin(\beta\gamma) = \sin(cb)\sin(\alpha\gamma)\sin(\beta\alpha)].$$

31) Noch ist der Begriff der Potenz für das Strahlenbüschel abzuleiten. Bei der Punktreihe geschah dies mit Hülfe des Mittelpunktes O und des unendlich fernen Punktes. Das Analogon dazu sind bei dem Büschel die beiden senkrecht aufeinander stehenden zugeordneten Strahlen, die man auch als Achsen des Systems bezeichnet.

Sind a und α die Achsen, b und β, c und γ zwei andere Strahlenpaare, so ist zu bedenken, daß

$$\sphericalangle(a\alpha) = 90^0,\ \sphericalangle(\alpha b) = 90^0 - \sphericalangle(ab),\ \sphericalangle(\alpha\beta) = 90^0 - \sphericalangle(a\beta),$$
$$\sphericalangle(\alpha c) = 90^0 - \sphericalangle(ac),\ \sphericalangle(\alpha\gamma) = 90^0 - \sphericalangle(a\gamma) \quad \text{ist.}$$

Demnach geht die Formel

$$\frac{\sin(ab)\sin(a\beta)}{\sin(\alpha b)\sin(\alpha\beta)} = \frac{\sin(ac)\sin(a\gamma)}{\sin(\alpha c)\sin(\alpha\gamma)}$$

über in

$$\frac{\sin(ab)\sin(a\beta)}{\cos(ab)\cos(a\beta)} = \frac{\sin(ac)\sin(a\gamma)}{\cos(ac)\cos(a\gamma)}$$

oder in

$$\tan(ab)\tan(a\beta) = \tan(ac)\tan(a\gamma).$$

Dieses konstant bleibende Produkt wird als Potenz des involutorischen Strahlenbüschels betrachtet.

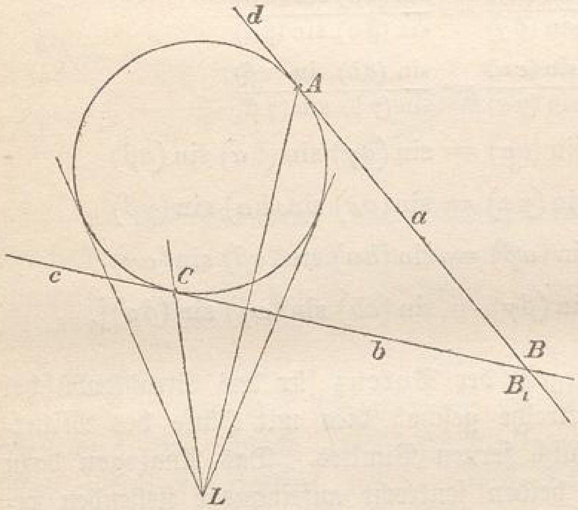
32) Man versuche, zu den Sätzen über involutorische Punktreihen die Sätze über involutorische Strahlenbüschel zu bilden und ebenso die reciproken Konstruktionsaufgaben zu lösen. So folgt z. B. aus Satz 19) der folgende:

Verbindet man einen beliebigen Punkt L mit den sechs Ecken eines vollständigen Vierseits, so entstehen drei Strahlenpaare in Involution.

Aus 21) folgt:

Verbindet man einen beliebigen Punkt L mit den Ecken eines Tangentenvierecks an einem Kegelschnitt, so bilden die Verbindungslinien und die von L aus gezogenen Tangenten drei Strahlenpaare in Involution.

Fig. 159.



Man kann das Tangentenviereck bei A und C mit Winkeln von 0^0 bezw. 180^0 versehen, dann fällt der Schnittpunkt B der Tangenten a und b mit B_1, dem Schnittpunkte der Tangenten c und d zusammen. Verbindet man jetzt L mit A, (BB_1) und C und zieht man noch die Tangenten, so hat man drei Strahlenpaare in Involution, von denen das eine ein Doppelstrahl ist.

33) **Aufgabe.** Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der vier gegebene Tangenten berührt und außerdem durch einen gegebenen Punkt L geht.

Auflösung. Nach 23) ist die Auflösung folgende: Man verbinde L mit den sechs Eckpunkten des gegebenen Vierseits und betrachte die zu den Gegenecken gehörigen Strahlen als zugeordnete. Jetzt konstruiere man (z. B. mit Hülfe der Punktreihe auf einer beliebigen Transversale des Büschels) die Doppelstrahlen desselben. Jeder Doppelstrahl giebt eine Tangente durch L. (Warum?) Durch eine dieser Tangenten und die vier gegebenen ist nach Brianchon der Kegelschnitt bestimmt.