Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

c) Sätze und Konstruktionen

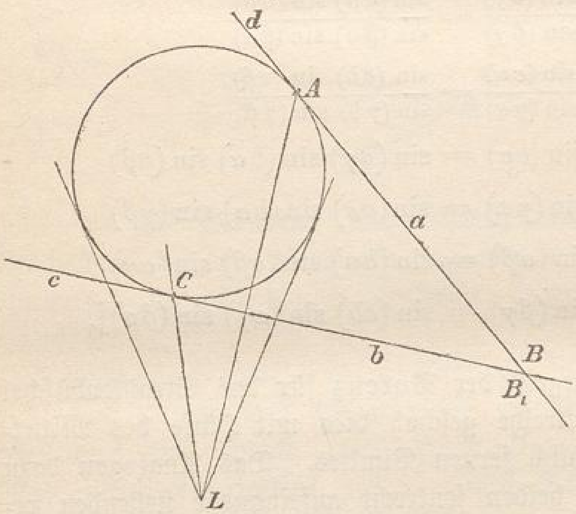
32) Man versuche, zu den Sätzen über involutorische Punktreihen die Sätze über involutorische Strahlenbüschel zu bilden und ebenso die reciproken Konstruktionsaufgaben zu lösen. So folgt z. B. aus Satz 19) der folgende:

Verbindet man einen beliebigen Punkt L mit den sechs Ecken eines vollständigen Vierseits, so entstehen drei Strahlenpaare in Involution.

Aus 21) folgt:

Verbindet man einen beliebigen Punkt L mit den Ecken eines Tangentenvierecks an einem Kegelschnitt, so bilden die Verbindungslinien und die von L aus gezogenen Tangenten drei Strahlenpaare in Involution.

Fig. 159.



Man kann das Tangentenviereck bei A und C mit Winkeln von 0^0 bezw. 180^0 versehen, dann fällt der Schnittpunkt B der Tangenten a und b mit B_1, dem Schnittpunkte der Tangenten c und d zusammen. Verbindet man jetzt L mit A, (BB_1) und C und zieht man noch die Tangenten, so hat man drei Strahlenpaare in Involution, von denen das eine ein Doppelstrahl ist.

33) **Aufgabe.** Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der vier gegebene Tangenten berührt und außerdem durch einen gegebenen Punkt L geht.

Auflösung. Nach 23) ist die Auflösung folgende: Man verbinde L mit den sechs Eckpunkten des gegebenen Vierseits und betrachte die zu den Gegenecken gehörigen Strahlen als zugeordnete. Jetzt konstruiere man (z. B. mit Hülfe der Punktreihe auf einer beliebigen Transversale des Büschels) die Doppelstrahlen desselben. Jeder Doppelstrahl giebt eine Tangente durch L. (Warum?) Durch eine dieser Tangenten und die vier gegebenen ist nach Brianchon der Kegelschnitt bestimmt.

34) **Aufgabe.** Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der drei gegebene Tangenten berührt und durch zwei gegebene Punkte geht.

Auflösung. Nach 25) ist die Auflösung folgende: Sind a, a_1, a_2 die gegebenen Tangenten, L und L_1 die gegebenen Punkte, so verbinde man den Schnitt von a und a_1 mit L und L_1, was zwei Strahlen b und b_1 giebt. Zu den Strahlenpaaren aa_1 und bb_1 suche man den Doppelstrahl c (z. B. mit Hülfe der Punktreihe auf einer Transversalen).

Jetzt verbinde man den Schnitt von a_1 und a_2 mit L und L_1, was Strahlen d und d_1 giebt. Zu den Paaren a_1, a_2 und d, d_1 suche man den Doppelstrahl c_1. Die Doppelstrahlen c und c_1 schneiden sich in einem Punkt C, der mit L und L_1 verbunden die Tangenten in diesen Punkten giebt. Jetzt kann der Kegelschnitt aus fünf Tangenten nach Brianchon auskonstruiert werden.

Damit ist gezeigt, wie man mit Hülfe des Involutionsbegriffes den Kegelschnitt aus fünf Elementen (Punkten oder Tangenten) allgemein konstruieren kann.

Zum tieferen Eindringen in die synthetische Geometrie sei das Studium der Steinerschen Vorlesungen, herausgegeben von Schröter (Leipzig bei B. G. Teubner) empfohlen. In analytischer Behandlung findet man dasselbe und reiches Übungsmaterial in der analytischen Geometrie der Kegelschnitte von Salmon-Fiedler (in demselben Verlage erschienen). Rein projektivisch wird der Gegenstand in dem Lehrbuche von Dr. J. Thomae (Halle, bei Nebert) behandelt.

III. Nachtrag zum Pascalsatz.

Die Projektion eines Kreises giebt stets einen Kegelschnitt, von dem der Pascalsatz gilt. Es fragt sich aber, ob umgekehrt jede Kurve, von der der Pascalsatz gilt, sich in einen Kreis projizieren läßt und daher als Schnitt eines geraden oder schiefen Kreiskegels zu betrachten ist. Ist dies gezeigt, so gilt dies auch bezüglich des Brianchon-Satzes und von allen mit Hülfe projektivischer Punktreihen und Strahlenbüschel nach den früher angegebenen Methoden konstruierter Kurven.

Der Beweis kann folgendermaßen geführt werden, wobei jedoch der Name Kegelschnitt vermieden und Pascalkurve gesagt werden soll.