Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

III. Nachtrag zum Pascalsatz

34) **Aufgabe.** Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der drei gegebene Tangenten berührt und durch zwei gegebene Punkte geht.

Auflösung. Nach 25) ist die Auflösung folgende: Sind a, a_1, a_2 die gegebenen Tangenten, L und L_1 die gegebenen Punkte, so verbinde man den Schnitt von a und a_1 mit L und L_1, was zwei Strahlen b und b_1 giebt. Zu den Strahlenpaaren aa_1 und bb_1 suche man den Doppelstrahl c (z. B. mit Hülfe der Punktreihe auf einer Transversalen).

Jetzt verbinde man den Schnitt von a_1 und a_2 mit L und L_1, was Strahlen d und d_1 giebt. Zu den Paaren a_1, a_2 und d, d_1 suche man den Doppelstrahl c_1. Die Doppelstrahlen c und c_1 schneiden sich in einem Punkt C, der mit L und L_1 verbunden die Tangenten in diesen Punkten giebt. Jetzt kann der Kegelschnitt aus fünf Tangenten nach Brianchon auskonstruiert werden.

Damit ist gezeigt, wie man mit Hülfe des Involutionsbegriffes den Kegelschnitt aus fünf Elementen (Punkten oder Tangenten) allgemein konstruieren kann.

Zum tieferen Eindringen in die synthetische Geometrie sei das Studium der Steinerschen Vorlesungen, herausgegeben von Schröter (Leipzig bei B. G. Teubner) empfohlen. In analytischer Behandlung findet man dasselbe und reiches Übungsmaterial in der analytischen Geometrie der Kegelschnitte von Salmon-Fiedler (in demselben Verlage erschienen). Rein projektivisch wird der Gegenstand in dem Lehrbuche von Dr. J. Thomae (Halle, bei Nebert) behandelt.

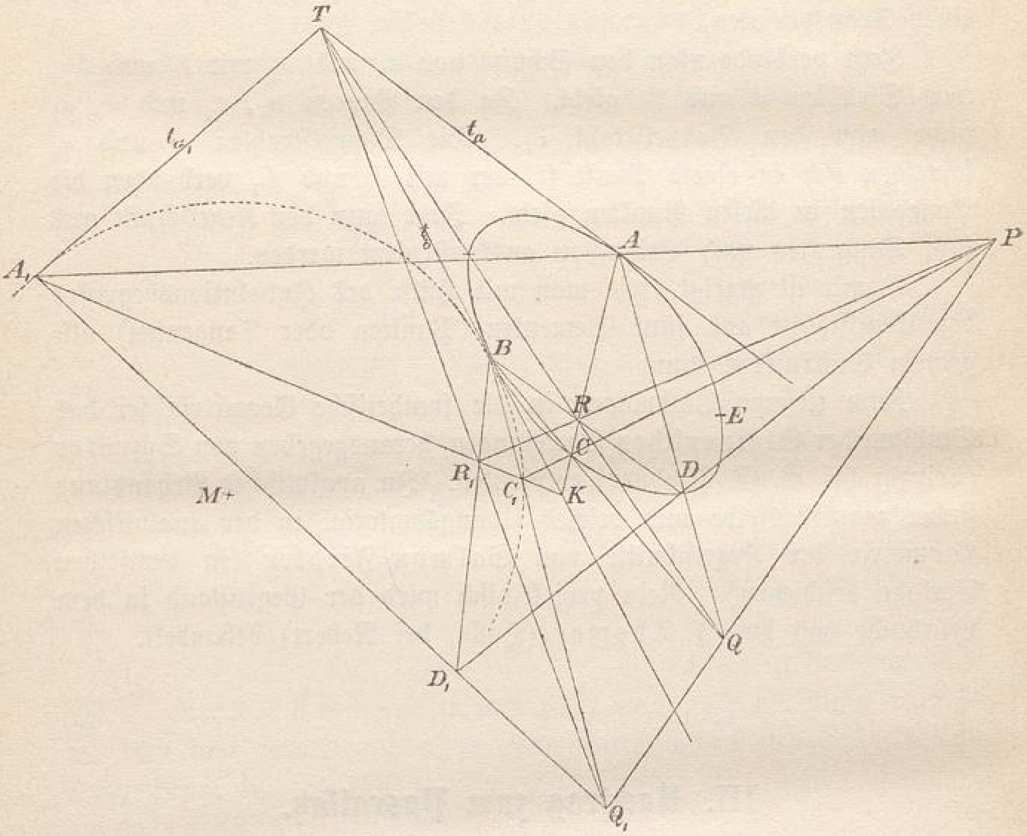
III. Nachtrag zum Pascalsatz.

Die Projektion eines Kreises giebt stets einen Kegelschnitt, von dem der Pascalsatz gilt. Es fragt sich aber, ob umgekehrt jede Kurve, von der der Pascalsatz gilt, sich in einen Kreis projizieren läßt und daher als Schnitt eines geraden oder schiefen Kreiskegels zu betrachten ist. Ist dies gezeigt, so gilt dies auch bezüglich des Brianchon-Satzes und von allen mit Hülfe projektivischer Punktreihen und Strahlenbüschel nach den früher angegebenen Methoden konstruierter Kurven.

Der Beweis kann folgendermaßen geführt werden, wobei jedoch der Name Kegelschnitt vermieden und Pascalkurve gesagt werden soll.

In Figur 160 sei $ABCDE$ eine durch fünf willkürlich gewählte Punkte definierte Pascalkurve, t_a und t_b seien die linear konstruierten Tangenten in A und B (vergl. Aufgabe 2, Seite 1). Da von der Kurve der Pascalsatz gilt, so gelten auch dessen Spezialisierungen für das Sehnenviereck und das Tangentenviereck (vgl. Figur 42 in Teil II), z. B. gehen die Diagonalen des Sehnen-

Fig. 160.



vierecks und des polaren Tangentenvierecks durch denselben Punkt, und die Diagonalen des Tangentenvierecks gehen zugleich durch den Schnittpunkt zweier Gegenseiten des Sehnenvierecks. Ist nun R der Schnittpunkt der Diagonalen von $ABCD$ und Q der Schnitt der Gegenseiten BC und AD, so müssen nach Obigem T, R und Q auf einer Geraden liegen, der Diagonale des zugehörigen Tangentenvierecks.

(Um E, welches vorher zur Konstruktion der Tangenten t_a und t_b nötig war, kümmern wir uns vorläufig nicht.)

Man zeichne jetzt einen beliebigen Kreis M, der die Tangente

t_b in B berührt, und lege von T aus an ihn die Tangente t_{a_1}, die in A_1 berühre. Ferner ziehe man AC bis zum Schnitte K mit t_b und verbinde K mit A_1, was auf dem Kreise den Schnittpunkt C_1 giebt. Die Geraden A_1A und C_1C geben einen Schnittpunkt P, der als eine Art von Projektionscentrum betrachtet werden soll.

Man ziehe BC_1 und PQ bis zum Schnitte Q_1, sodann Q_1A_1 und PD, was den Schnitt D_1 giebt. Dann ist das Viereck $A_1BC_1D_1$ eine Projektion des Vierecks $ABCD$, der Diagonalschnitt R_1 ist Projektion von R und die Gerade Q_1R_1T Projektion von QRT. [Um dies einzusehen, braucht man nur die Zeichnung räumlich aufzufassen. Man denke sich z. B. P als P' senkrecht über der Zeichnungsebene liegend und mit allen Punkten des Kreises und des neuen Vierecks verbunden, dann ist $ABCDE$ als orthographische Projektion eines Fünfecks $A_1B_1C_1D_1E_1$ in schräger Ebene aufzufassen, wobei z. B. A' senkrecht über A in der Geraden $P'A_1$ zu denken ist. Ebenso ist die Pascalkurve als Projektion einer in der schrägen Ebene liegenden Pascalkurve zu denken, wodurch die Allgemeinheit der Betrachtung nicht beschränkt wird.]

Es wird nun behauptet, daß D_1 auf dem Kreise liegt. Da nämlich t_{a_1} und t_b die Kreistangenten in A_1 und B sind, so muß nach dem oben (für den Kegelschnitt) benutzten Satze, wenn man auf A_1C_1 den Punkt R_1 annimmt und TR_1 und BC_1 bis Q_1 zieht, A_1Q_1 die vierte Seite und B_1R_1 die Diagonale eines dadurch bestimmten Kreisvierecks sein. Da aber D_1 der Schnitt von BR_1 und AQ_1 ist, so liegt D_1 auf dem Kreise M. Das Sehnenviereck $ABCD$ der Pascalkurve ist demnach in ein Kreisviereck $A_1BC_1D_1$ projiziert worden.

Macht man dieselbe Betrachtung für das Viereck $ABCE$, so erhält man ein Viereck $A_1BC_1E_1$, von dem die drei ersten Punkte bereits auf dem Kreise M liegen, während von E_1 in voriger Weise gezeigt werden kann, daß es ebenfalls auf dem Kreise liegt.

Denkt man sich also E auf der Pascalkurve wandernd, so wandert E_1 auf dem Kreise.

Wie man also auch den in B berührenden Kreis wähle, stets läßt er sich als Projektion der Pascalkurve betrachten.

Demnach kann jede Pascalkurve auf beliebig viele Arten auf einen Kreis projiziert werden, und man darf jede Pascalkurve als Schnitt jedes beliebigen geraden und schiefen Kegels betrachten.

(Vgl. Zeitschrift für math. Unterricht, 1894, Seite 575, Aufsatz von Dr. H. Thieme.)