Methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik

Dritter Teil, Lehr- und Übungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitung auf die Hochschul-Mathematik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1895

IV. Rektifikation der Parabel

urn:nbn:de:hbz:466:1-93638

Visual Library

IV. Rektifikation der Parabel.

Bei der zur Figur 49 gehörigen mechanischen Bewegung auf der Parabel ist für jede Lage der Horizontalteil der Geschwindigkeit gleich c, der Vertikalteil gleich gt, die wirkliche Geschwindigkeit also $v = \sqrt{c^2 + g^2t^2}$. Daraus folgt

$$\frac{v^2}{c^2} - \frac{t^2}{\left(\frac{c}{g}\right)^2} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel mit den Halbachsen c und $\frac{c}{g}$. Das sog. Geschwindigkeitsdiagramm bis zum Zeitpunkte t hat also das Anfangslot c und das Schlußlot $\sqrt{c^2 + g^2t^2}$ und wird durch eine Hyperbel begrenzt, deren Mittelpunkt im Fußpunkte von c liegt.

Nach Seite 49 ist das halbe Hyperbelsegment

$$\overset{x}{\underset{a}{F}} = \frac{b}{2a}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\,{}^e\lg\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right].$$

Für a, b und x ist zu setzen c, $\frac{c}{g}$, $\sqrt{c^2 + g^2t^2}$, also ist die Hyperbelfläche

$$\frac{1}{2}\left[t\sqrt{c^2 + g^2t^2} - \frac{c^2}{g}\,{}^e\lg\frac{\sqrt{c^2 + g^2t^2} + gt}{c}\right].$$

Dies, vom Rechteck $t\sqrt{c^2 + g^2t^2}$ abgezogen, giebt

$$\frac{1}{2}t\sqrt{c^2 + g^2t^2} + \frac{c^2}{2g}\,{}^e\lg\frac{\sqrt{c^2 + g^2t^2} + gt}{c}.$$

Dies ist zugleich die Länge der Parabel bis zum Zeitpunkte t.

Nach Figur 49 ist nun $AB = AM = p = \frac{c^2}{g}$, und die beliebige Horizontalverschiebung des Punktes ist $ct = x$.

Setzt man also p für $\frac{c^2}{g}$ und $\frac{x}{c}$ für t, wobei sich die c wegheben, so ist für die Parabel $x^2 = 2py$ oder $y = \frac{x^2}{2p}$ die Länge (von o bis x gerechnet)

$$\widehat{s} = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{p}\sqrt{p^2 + x^2} + p\,{}^e\lg\frac{x + \sqrt{p^2 + x^2}}{p}\right].$$

Für $x = p$, den besonderen Fall der Figur 49, erhält man z. B.

$$\widehat{s} = \frac{p}{2}\left[\sqrt{2} + \lg\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] = 1{,}1478\,p = 1{,}1478 \cdot AB.$$

Ellipse und Hyperbel sind der elementaren Rektifikation nicht zugänglich.