Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

e) Begriff der Symmetrie in der Ebene

urn:nbn:de:hbz:466:1-94706

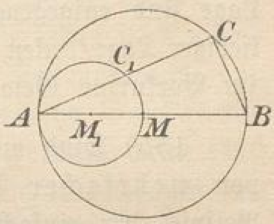
bogen, der $A_2 B_2$ in D_2 schneidet. Dann sind $D_1 E_1 F_1$ die Eckpunkte des gesuchten Dreiecks. (Letzteres kann noch auf eine zweite Art, links von F_1 liegend, gezeichnet werden, wozu nur die Vervollständigung des letzten Kreisbogens nötig ist.)

Der Beweis der Richtigkeit soll dem Schüler überlassen bleiben. Dieser wird dann auch imstande sein, die Aufgabe für beliebige Abstandsverhältnisse zu lösen. — Die Konstruktion kann erheblich abgekürzt werden, denn eigentlich ist die Aufgabe gelöst, sobald man im Hilfsdreieck FG gezogen und den Winkel α in die Hauptfigur übertragen hat.]*)

153) Zeichnet man in einen Kreis einen ihn berührenden vom halben Radius, so ist jede durch den Berührungspunkt gelegte Sehne durch den kleineren Kreis halbiert.

Beweis. Der kleinere Kreis geht durch den Mittelpunkt M des größeren. Ist A Berührungspunkt, so ist AMB ein Durchmesser, der durch die Mitten beider Kreise geht. Wird eine beliebige Sehne AC in C_1 vom kleineren Kreise geschnitten und zieht man CB und $C_1 M$, so sind die Winkel $AC_1 M$ und ACB Rechte als Winkel im Halbkreis, also ist $C_1 M \parallel CB$; da ferner AB in M halbiert ist, muß auch AC in C_1 halbiert sein.

Fig. 30.



Entsprechendes findet statt mit einem inneren Berührungskreise, dessen Radius der dritte, vierte, n^{te} Teil vom Radius des größeren ist.

Was geschieht, wenn der Berührungskreis außerhalb des gegebenen liegt?

(Der angegebene Satz läßt sich bei vielen Konstruktionsaufgaben anwenden.)

e) Begriff der Symmetrie in der Ebene.

α) Erklärung und Grundgesetze der einfachen und mehrfachen Symmetrie.

154) Bei den grundlegenden Konstruktionen drängte sich der Begriff der Symmetrie auf, bei dessen Beachtung viele Sätze und Konstruktionen sich als selbstverständlich ergeben.

Man bezeichnet ein planimetrisches Gebilde als einfach

*) Die Aufgabe kann natürlich überschlagen werden. Der Beweis der Richtigkeit soll nur eine Scharfsinnsprobe für begabtere Schüler sein.

symmetrisch, wenn es durch eine und nur eine Gerade so in zwei Hälften zerlegt wird, daß die eine Hälfte durch Umklappung um diese Gerade mit der anderen Hälfte zur Deckung gebracht werden kann.

Jede Hälfte bezeichnet man als das Spiegelbild der anderen. Die Gerade heißt die Symmetrielinie oder Symmetrieachse des Gebildes, oder auch die spiegelnde Gerade, die als unbegrenzt zu denken ist. Jeder Punkt dieser Geraden ist sein eigenes Spiegelbild. Das Spiegelbild jedes anderen Punktes wird gefunden, indem man von ihm auf die Gerade ein Lot fällt und dieses über den Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert. Die spiegelnde Gerade ist ihr eigenes Spiegelbild. Jede Parallele zur spiegelnden Geraden wird eine Parallele entgegengesetzten Abstandes. Jede die spiegelnde Gerade schneidende Gerade wird eine sie in demselben Punkte unter entgegengesetzt gleichem Winkel schneidende Gerade. Jedes Lot zur spiegelnden Geraden gibt seine eigene Verlängerung. Symmetrische Stücke von Geraden sind dabei gleich lang; symmetrische Winkel von beliebiger Lage sind entgegengesetzt gleich. Symmetrische Kreisbogen von beliebiger Lage decken einander. (Vgl. zu diesem Abschnitte das unter V im Vorkursus Gesagte.)

155) Sind mehrere Symmetrieachsen vorhanden, so spricht man von mehrfacher Symmetrie. Das gleichschenklige Dreieck ist ein Beispiel der einfachen Symmetrie; die Halbierende des Winkels an der Spitze ist die Symmetrieachse. Das Rechteck ist ein Beispiel für die zweifache Symmetrie; die beiden Mittellinien sind seine Symmetrieachsen. Auch der Rhombus ist ein Beispiel für die zweifache Symmetrie; die beiden Diagonalen sind seine Symmetrieachsen. Das gleichseitige Dreieck hat drei Symmetrieachsen, die Halbierenden der Winkel. Das Quadrat hat vier Symmetrieachsen, die Diagonalen und die Mittellinien. Das regelmäßige Fünfeck hat fünf Symmetrieachsen, die Winkelhalbierenden. Das regelmäßige Sechseck hat sechs Symmetrieachsen, die drei Hauptdiagonalen und die drei Mittellinien usw. Der Kreis hat unendlich viele Symmetrieachsen, nämlich sämtliche Durchmesser.

156) Beim Rechteck und Rhombus schneiden die Symmetrieachsen einander rechtwinklig in einem Punkte, den man als den Mittelpunkt der Figur bezeichnet. Beim Rechteck ist dieser Punkt der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, beim Rhombus ist er der des einbeschriebenen Kreises. Bei allen genannten regelmäßigen Vielecken schneiden einander die Symmetrieachsen in einem Punkte, dem Mittel-

punkte des Vielecks, der zugleich Mittelpunkt des um- und des einbeschriebenen Kreises ist. Dort folgen sie unter gleichen Winkeln aufeinander, beim gleichseitigen Dreieck bilden sie Winkel von $\frac{180^0}{3} = 60^0$, beim Quadrat solche von $\frac{180^0}{4} = 45^0$, beim Fünfeck solche von $\frac{180^0}{5} = 36^0$, beim Sechseck solche von $\frac{180^0}{6} = 30^0$ usw.

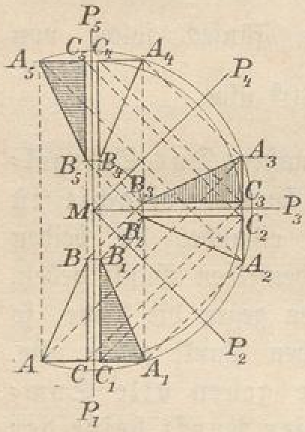
157) Diese Einfachheit erklärt sich folgendermaßen: Das Spiegelbild einer Symmetrieachse gegen eine Symmetrieachse ist wieder eine Symmetrieachse. Schneiden einander die beiden ersten im Endlichen, so muß die dritte durch denselben Punkt gehen. Spiegelt man die beiden ersten Symmetrieachsen gegen die dritte, so müssen die Spiegelbilder wieder durch denselben Punkt gehen usw. Daraus folgt: Bei mehrfacher Symmetrie gehen alle Symmetrieachsen durch denselben Punkt. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des Gebildes.

158) Sollen nur zwei Symmetrieachsen vorhanden sein, so müssen diese aufeinander senkrecht stehen, denn sonst würde durch die Spiegelung gegen die eine eine dritte Symmetrieachse entstehen usw. Sollen nur drei Symmetrieachsen vorhanden sein, so müssen sie einander unter 60^0 schneiden, denn sonst würden durch Spiegelung gegen eine davon neue Symmetrieachsen entstehen. Das Entsprechende gilt von vier, fünf, sechs usw. Symmetrieachsen. Eine Symmetrieachse teilt die Ebene in zwei übereinstimmende Hälften, zwei geben vier übereinstimmende „Quadranten", drei geben sechs übereinstimmende Sextanten der Ebene, n Symmetrieachsen geben $2n$ Zentriwinkel von der Größe $\frac{360^0}{2n}$ oder $\frac{180^0}{n}$. Das regelmäßige n-Eck hat n Symmetrieebenen. Ist n eine gerade Zahl, so sind die Symmetrieebenen zur Hälfte Hauptdiagonalen, zur Hälfte winkelhalbierende Mittellinien. Ist n ungerade, so sind sämtliche Winkelhalbierenden Mittellinien. Eine eigentümliche Stellung nehmen die unbegrenzten Parallelen ein. Jedes gemeinschaftliche Lot ist für sie eine Symmetrieachse. Es sind also unendlich viele Symmetrieachsen vorhanden, die einander im Endlichen nicht schneiden. Der Streif zwischen zwei Parallelen hat außerdem noch eine vereinzelte parallele Symmetrieachse.

159) Von der Zeichnung eines kunstgewerblichen ebenen Musters (Flachornament) von mehrfacher Symmetrie braucht nur der einem solchen Zentriwinkel entsprechende Teil gegeben zu sein. Der Rest ist

leicht zu konstruieren, sei es Punkt für Punkt oder Linie für Linie. (Hat man statt des Flachornaments ein mehrfach symmetrisches Relief auf ebener Grundlage, so braucht man auch nur den entsprechenden Teil zu geben, jedoch sind benachbarte symmetrische Teile nicht mehr kongruent, sondern räumlich symmetrisch. Vgl. Vorkursus V, 112 und 113.)

Fig. 31.



160) Die Umklappung eines mehrfach symmetrischen (planimetrischen) Gebildes gibt dessen Teilen entgegengesetzten Drehungssinn; die Umklappung des Bildes um die zweite Achse stellt den ursprünglichen Drehungssinn wieder her; die Umklappung des neuen Bildes um die dritte Achse gibt wieder den entgegengesetzten Drehungssinn usw. Eine gerade Anzahl von Spiegelungen läßt den Drehungssinn ungeändert, eine ungerade Anzahl gibt den entgegengesetzten Drehungssinn.

Fig. 32.

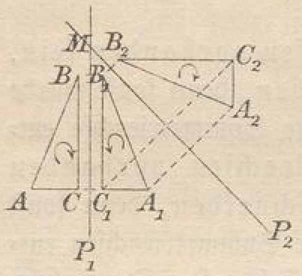


Fig. 31 und 32 veranschaulichen dies an einem mehrfach gespiegelten rechtwinkligen Dreieck. Die schraffierten Dreiecke sind nicht symmetrisch zu einander. Man könnte sie als verkehrtsymmetrisch bezeichnen.

β) Ableitung einfacher Sätze und Konstruktionen mit Hilfe der Symmetrie.

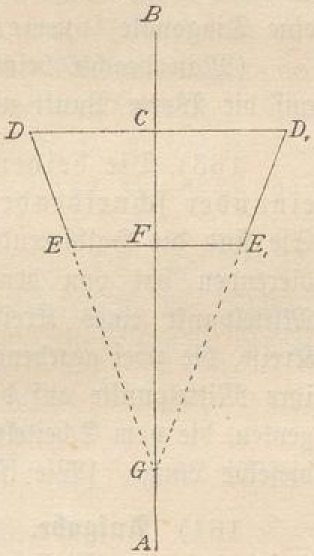
161) Das Spiegelbild zweier Punkte. In Fig. 33 sind zwei Punkte D und E gegen die Gerade AB gespiegelt, was D_1 und E_1 gegeben hat. Dadurch ist zugleich die Gerade DE gespiegelt und ihr Spiegelbild D_1E_1 entstanden. Schneidet nun DE die spiegelnde Gerade in einem im Endlichen liegenden Punkte G, so muß auch D_1E_1 durch den Punkt G gehen und AB unter entgegengesetzt gleichem Winkel schneiden.

Man kann aber auch D und E_1 als die gespiegelten Punkte, D_1 und E als die Spiegelbilder betrachten. Demnach müssen auch DE_1 und D_1E einander auf der Geraden AB schneiden.

Zwei Geraden, die gegen eine dritte Gerade symmetrisch sind, bezeichnet man bisweilen als antiparallel in bezug auf die spiegelnde

Gerade. Deshalb wird das in bezug auf die Mittellinie CF symmetrische Viereck DEE_1D_1, von dem zwei Seiten DD_1 und EE_1 parallel sind, während die anderen DE und D_1E_1 antiparallel sind, als ein *Antiparallelogramm* bezeichnet. (Es heißt jedoch auch ein *symmetrisches Paralleltrapez*.)

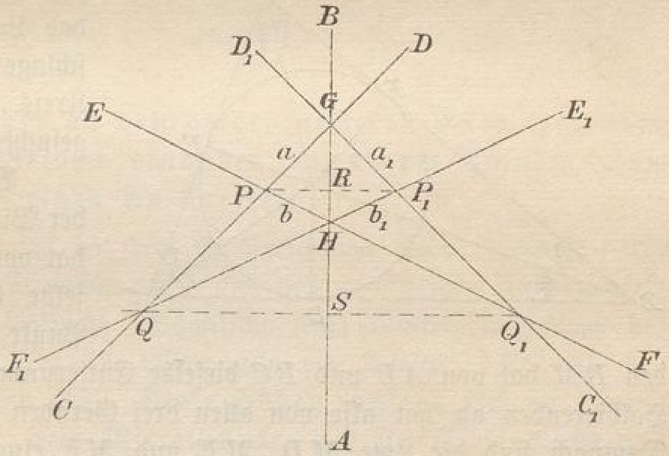
Fig. 33.



Die Diagonalen und die antiparallelen Gegenseiten eines solchen Vierecks schneiden also einander auf dessen Symmetrielinie. Die symmetrisch liegenden Geraden und Winkel stimmen überein.

162) *Das Spiegelbild zweier unbegrenzter Geraden.* In Fig. 34 sind zwei Geraden CD und EF gegen eine dritte Gerade AB gespiegelt, was die Bilder C_1D_1 und E_1F_1 gegeben hat, von denen das eine mit CD durch den Schnittpunkt G, das andere mit EF durch den Schnittpunkt H auf der Geraden AB gehen muß. Die Punkte P und P_1 sind ein symmetrisches Punktepaar. Betrachtet man aber CD und E_1F_1 als die gespiegelten Geraden, so folgt, daß auch die Punkte Q und Q_1 ein symmetrisches Punktepaar sind.

Fig. 34.



Das Viereck PHP_1G ist ein gegen die Diagonale GH symmetrisches. Es besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken, welche die Grundlinie PP_1 gemein haben. Es wird als *Deltoid* bezeichnet. Zu diesem Viereck gehören sechs Verbindungslinien PP_1, GH, GP, GP_1, P_1H, PH. Die Gegenseiten geben drei Schnittpunkte Q, Q_1 und R. Ein Viereck mit seinen sämtlichen sechs Geraden bezeichnet man als ein *vollständiges Viereck*. Das hier vorliegende ist ein gegen eine Diagonale *symmetrisches vollständiges Viereck*.

Die Geraden a, b, a_1, b_1, bilden ein Vierseit mit sechs Schnittpunkten P, P_1, Q, Q_1, G, H. Das Vierseit mit seinen sechs Schnittpunkten besitzt also drei Diagonalen, PP_1, QQ_1, GH. Man nennt es ein vollständiges Vierseit. Hier handelt es sich um ein gegen eine Diagonale symmetrisches vollständiges Vierseit.

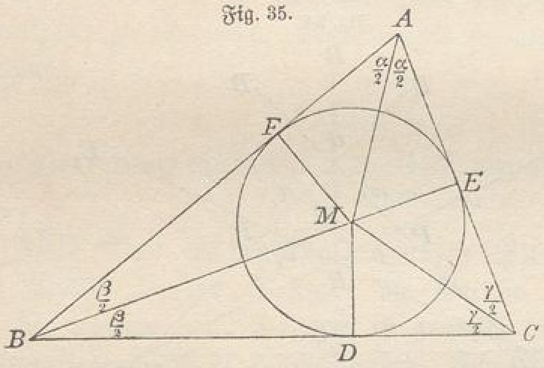
(Man beachte beim Viereck und Vierseit die Reziprozität in bezug auf die Worte Punkt und Gerade.)

163) Die beiden Symmetrielinien zweier unbegrenzten einander schneidenden Geraden stehen aufeinander senkrecht. Sie sind die Halbierenden der vier Winkel. Jeder Punkt jeder Halbierenden hat von den beiden Geraden denselben Abstand, ist also Mittelpunkt eines Kreises, der die beiden Geraden berührt. Alle Kreise, die zwei gegebene einander schneidende Geraden berühren, haben ihre Mittelpunkte auf den beiden Symmetrieachsen. Die beiden Tangenten, die vom Scheitelpunkte an jeden dieser Kreise gezogen sind, haben dieselbe Länge. [Wie ist es, wenn die beiden Geraden parallel sind?]

164) **Aufgabe.** In ein gegebenes Dreieck den einbeschriebenen Kreis (In-Kreis) einzuzeichnen (der die drei Seiten berührt).

Auflösung. In Fig. 35 sei ABC das gegebene Dreieck. Man halbiere die Winkel bei A und B. Die Halbierenden geben den Schnittpunkt M. Von M aus fälle man auf BC das Lot MD. Mit MD schlage man um M einen Kreis. Dieser Kreis ist der gesuchte Berührungskreis.

Fig. 35.



Beweis. Jeder Punkt der Winkehalbierenden AM hat von AB und AC dieselbe Entfernung. Jeder Punkt der Winkelhalbierenden BM hat von AB und BC dieselbe Entfernung. M gehört beiden Halbierenden an, hat also von allen drei Geraden dieselbe Entfernung. Demnach sind die Lote MD, ME und MF einander gleich.

Folgerung. Weil die Abstände MD und ME einander gleich sind, muß M auch auf der Halbierenden des Winkels C liegen. Also ist auch MC eine Winkelhalbierende. Folglich:

Die Halbierenden der Dreieckswinkel schneiden einander in **einem** Punkte, dem Mittelpunkte des In-Kreises.

165) **Aufgabe.** An ein gegebenes Dreieck ABC einen Kreis zu legen, der die Seite BC von außen her, die beiden anderen Seiten von innen her berührt.

Auflösung. In Fig. 36 halbiere man den Winkel bei A und den Außenwinkel CBF. Das gibt, wie vorher, einen Schnittpunkt M_1 als Mittelpunkt eines Kreises, der sowohl die Verlängerungen der Dreiecksseiten AB und AC, als auch die Seite BC berührt. Das von M_1 auf eine der Seiten gefällte Lot, z. B. M_1D, ist der Radius des nun leicht zu zeichnenden Kreises, eines äußeren Berührungskreises oder An-Kreises.

Folgerung. Weil der Kreis M_1 die Seiten AB und BC berührt, muß der Punkt M_1 auch auf der Halbierenden des Außenwinkels BCE liegen. Folglich: Die Halbierenden eines Drei-

Fig. 36.

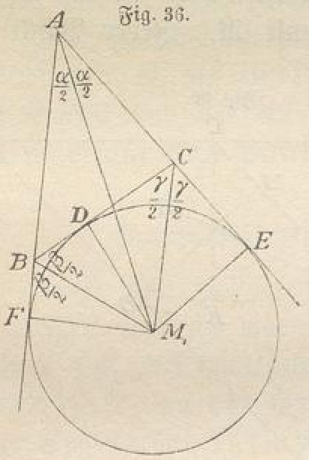
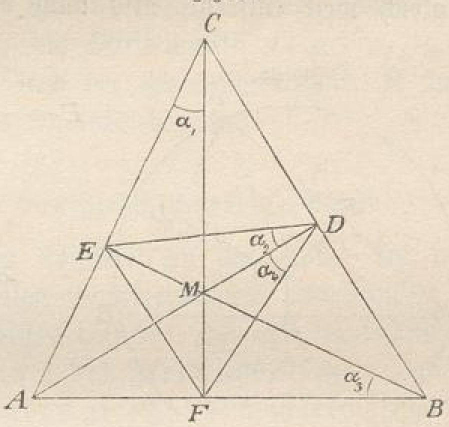


Fig. 37.



eckswinkels und der an den beiden anderen Ecken liegenden Außenwinkel schneiden einander in **einem** Punkte, dem Mittelpunkte des einen An-Kreises.

166) Das Dreieck hat drei An-Kreise und einen In-Kreis. Die Halbierenden jedes Dreieckswinkels und des zugehörigen Außenwinkels stehen aufeinander senkrecht. Sämtliche sechs Winkelhalbierenden des Dreiecks DEF in Fig. 37 bilden also ein Dreieck ABC mit den Höhen AD, BE und CF. Diese Höhen müssen sich in **einem** Punkte schneiden, dem Mittelpunkte des In-Kreises für das Höhenfußpunktdreieck DEF, während A, B und C die Mittelpunkte der An-Kreise dieses Dreiecks sind.

Dieser Satz kommt später noch einmal zur Sprache.

167) Das Mittellot einer Geraden AB ist eine ihrer Symmetrielinien. (Als zweite kann man die Gerade selbst be-

trachten.) Jeder Punkt der Mittelsenkrechten ist von den Endpunkten A und B der Geraden gleich weit entfernt. Er ist also Mittelpunkt eines Kreises, der durch die Punkte A und B geht. Folglich:

Alle Kreise, die durch zwei gegebene Punkte gehen, haben ihre Mittelpunkte auf der zugehörigen Mittelsenkrechten.

168) **Aufgabe.** Einen Kreis zu zeichnen, der durch drei gegebene Punkte geht, die nicht auf einer Geraden liegen.

Auflösung. In Fig. 38 seien A, B und C die drei gegebenen Punkte. Man bilde die Mittelsenkrechte zu AB und die Mittelsenkrechte zu BC, diese schneiden einander in einem Punkte M, der von den drei Eckpunkten gleiche Entfernungen hat und daher Mittelpunkt des nun leicht zu zeichnenden Kreises ist.

Beweis. Jeder Punkt der Mittelsenkrechten FM ist von A und B gleich weit entfernt, also auch der Punkt M. Jeder Punkt der

Fig. 38.

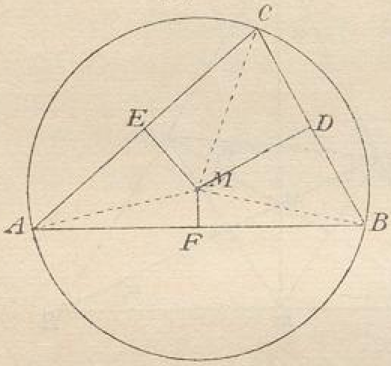
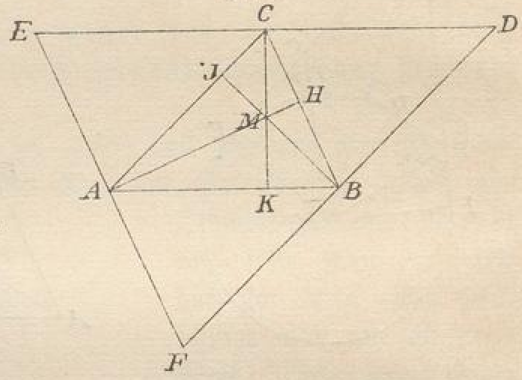


Fig. 39.



Mittelsenkrechten DM ist von B und C gleich weit entfernt, also auch M. Folglich ist M von A, B und C gleich weit entfernt. — Die Aufgabe ist nur auf eine Art lösbar. Haben zwei Kreise drei Punkte gemein, so fallen sie vollständig zusammen.

Folgerung. Weil M von A und C gleich weit entfernt ist, muß M auch auf der Mittelsenkrechten von AC liegen. Also:

Die Mittellote der Seiten eines Dreiecks schneiden einander in **einem** Punkte, dem Mittelpunkte des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises.

Dieser Kreis soll kurz als der Um-Kreis des Dreiecks bezeichnet werden.

169) Denkt man sich auf den Höhen des Dreiecks ABC (Fig. 39) in den Eckpunkten Lote errichtet, so geben diese ein Dreieck DEF, dessen Seiten den Seiten von ABC parallel sind. (Warum?)

Dabei sind also $ABCE$ und $ACBF$ Parallelogramme, sodaß $CB = EA = AF$ ist. Demnach ist das Lot AH die Mittelsenkrechte von EF. Ebenso zeigt sich, daß BJ die Mittelsenkrechte von FD und CK die Mittelsenkrechte von DE ist. Diese Mittelsenkrechten müssen sich aber in einem Punkte schneiden. Demnach schneiden einander die Höhen des Dreiecks DEF und überhaupt jedes Dreiecks in **einem** Punkte. Der bereits ausgesprochene Satz über die Dreieckshöhen ist damit bestätigt. — Der Höhenschnittpunkt M hat also noch zweierlei Bedeutung. Er ist Mittelpunkt des Um-Kreises vom Dreieck DEF und zugleich Mittelpunkt des In-Kreises vom Dreieck HJK.

Bildet man jedoch ein stumpfwinkliges Dreieck ABC und dazu die Figur, so fällt M außerhalb der Dreiecke ABC, DEF und HJK und ist nicht In-Kreis, sondern An-Kreis des letzteren.

Der Durchschnittspunkt S der Mittellinien des Dreiecks, der Mittelpunkt M des Um-Kreises, die Mittelpunkte μ, μ_1, μ_2, μ_3 des In-Kreises und der An-Kreise und der Höhenschnittpunkt H werden als merkwürdige Punkte des Dreiecks bezeichnet

γ) Symmetrisches über das gleichschenklige Dreieck.

170) Die Halbierende des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks war als dessen Symmetrielinie nachgewiesen, sodaß es aus zwei kongruenten Hälften besteht. Zunächst folgte der Satz: Die Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks (die Basiswinkel) sind einander gleich; oder: Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber.

171) Umgekehrt folgt: Sind zwei Winkel eines Dreiecks einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig. Oder: Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber. (Sind nämlich die Winkel bei A und B einander gleich, so sind sie symmetrisch gegen die Mittelsenkrechte, müssen also einander in demselben Punkte C der Mittelsenkrechten schneiden, sodaß auch $AC = BC$ ist.)

172) Die Halbierende des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks halbiert die Grundlinie und steht auf dieser senkrecht; die Mittelsenkrechte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks geht durch die Spitze und halbiert den dortigen Winkel. Die Verbindungslinie der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie steht auf dieser senkrecht und halbiert den Winkel an der Spitze.

Alle diese Sätze sind nur Ausdrucksweisen dafür, daß das gleichschenklige Dreieck aus zwei kongruenten Teilen besteht.

Jedes Lot auf der Symmetrielinie des gleichschenkligen Dreiecks schneidet von den Schenkeln gleiche Stücke ab, von der Fläche ein Antiparallelogramm. Legt man an eine Gerade AB in A und B nach derselben Seite gleiche Winkel so an, daß die Schenkel einander in einem Punkte C schneiden, gibt man den Schenkeln dieselbe Länge $AD = BE$ und verbindet man A mit E und B mit D, so geben die Verbindungslinien gleichschenklige Dreiecke ABF und DEF. Warum?

173) Der Mittelpunkt des Um-Kreises, des In-Kreises, des An-Kreises für die Grundlinie, der Höhendurchschnitt, der Durchschnitt der Mittellinien liegen beim gleichschenkligen Dreieck auf dessen Symmetrielinie. Die Mittelpunkte der beiden anderen An-Kreise sind symmetrisch gegen die Symmetrielinie. Ihre Verbindungslinie geht durch die Spitze des Dreiecks.

174) Die Mittelsenkrechte einer Kreissehne geht stets durch die Mitte des Kreises. Daraus folgt wieder der Satz: Das durch zwei Punkte gehende Büschel von Kreisen hat die Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten. Man konstruiere die betreffenden Linien und einige der Kreise. (Vgl. Nr. 167.)

175) Stehen, wie in Fig. 34, zwei ungleiche gleichschenklige Dreiecke über derselben Grundlinie, so haben sie eine gemeinschaftliche Symmetrielinie, denn die Symmetrielinien beider fallen mit der Mittelsenkrechten der Grundlinie zusammen. Dabei können die beiden gleichschenkligen Dreiecke ihre Spitze auf verschiedenen Seiten der Grundlinie oder auf derselben Seite haben. Stimmen dagegen die beiden gleichschenkligen Dreiecke überein, so hat das Gebilde zwei Symmetrieachsen und ist eine Raute (oder Rhombus).

176) **Aufgaben.** Die mehrfache Symmetrie des gleichseitigen Dreiecks, des Quadrates, des regelmäßigen Fünfecks, des regelmäßigen Sechsecks usw. eingehender zu untersuchen.

(Es soll z. B. untersucht werden, ob parallele Seiten vorhanden sind, ob Diagonalen vorhanden sind, die zu einer Seite parallel sind, wie sich beliebige Diagonalen paarweise verhalten, ob sich kongruente Flächenteile vorfinden. Die Zerlegung jedes regelmäßigen Vielecks in gleichschenklige Dreiecke, deren Spitzen im Mittelpunkte zusammenfallen, ist gleichfalls zu untersuchen. Die Winkel dieser Dreiecke sind zu bestimmen. Die ein- und umbeschriebenen Kreise sind zu untersuchen, besonders hinsichtlich ihrer Sektoren, Segmente und Bogen.

δ) Symmetrisches über Kreise.*)

177) Daß jeder Kreis in bezug auf jeden Durchmesser symmetrisch ist, war schon gezeigt. Zwei oder mehrere konzentrische Kreise haben jeden gemeinschaftlichen Durchmesser zur Symmetrielinie.

178) Errichtet man auf dem Durchmesser eines Kreises einen zweiten rechtwinklig schneidenden Durchmesser, so hat das Gesamtgebilde vier Symmetrieachsen, die den Kreis in gleiche Oktanten zerlegen. Errichtet man auf dem Durchmesser an beliebiger anderer Stelle ein unbegrenztes Lot, so ist das Gesamtgebilde nur gegen den Durchmesser symmetrisch. (Man unterscheide die Fälle, daß das Lot außerhalb des Kreises liegt, daß es den Kreis nur in einem Punkte trifft, daß es innerhalb des Kreises liegt. Man zeige, daß es im letzteren Falle zwei Schnittpunkte mit dem Kreise haben muß und nicht mehr haben kann. Die Folgen der Symmetrie sind anzugeben.)

179) Hat ein Kreis zwei einander schneidende unbegrenzte Tangenten, so ist nur die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Mittelpunkte Symmetrielinie des Gesamtgebildes. Was folgt daraus für gewisse Stücke der Tangenten, für gewisse Winkel, für gewisse Kreisbogen, für gewisse Flächenstücke? Verbindet man die Berührungspunkte der Tangenten mit dem Kreismittelpunkte, was folgt dann weiter hinsichtlich der Symmetrie?

Sind aber die beiden Tangenten parallel, so gibt es für das Gesamtgebilde zwei aufeinander senkrechte Symmetrielinien.

180) Zwei nicht konzentrische ungleiche Kreise haben nur eine Symmetrielinie, die Zentrale, d. h. die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte. Folgende Fälle sind möglich: Die Kreise liegen ganz auseinander; sie berühren einander äußerlich; sie schneiden einander. (Dies geschieht dann in zwei symmetrischen Punkten, aber nicht in mehr Punkten; denn Kreise, die in mehr als zwei Punkten übereinstimmen, stimmen vollständig überein); sie berühren einander innerlich, wobei der größere den kleineren umschließt; der kleinere wird vom größeren ganz umschlossen, ohne daß sie einen gemeinschaftlichen Punkt haben. [$c > (r + r_1)$; $c = (r + r_1)$; $(r + r_1) > c > (r - r_1)$; $c = (r - r_1)$; $c < (r - r_1)$; $c = 0$ gibt konzentrische Kreise.]

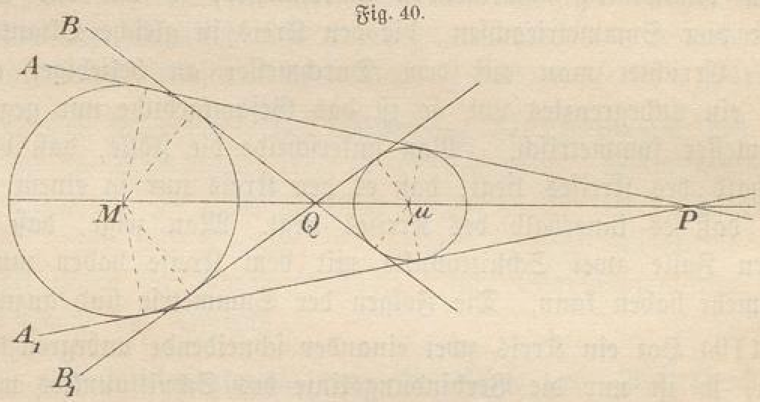
Im Falle des Schneidens haben die Kreise eine gemeinschaftliche Sehne. Welche Symmetrieverhältnisse finden dabei hinsichtlich gewisser Längen, Winkel, Kreisbogen, Flächen statt?

*) Dieser Abschnitt gibt Veranlassung zu zahlreichen Beispielen für das technische Zirkelzeichnen.

181) Im Falle des Auseinanderliegens haben die beiden Kreise vier gemeinschaftliche Tangenten. Aus Gründen der Symmetrie schneiden sich diese paarweise in Punkten P und Q der Symmetrieachse (der Zentrale).

AP und A_1P nennt man die äußeren gemeinschaftlichen Tangenten, BQ und B_1Q die inneren. (Fig. 40.)

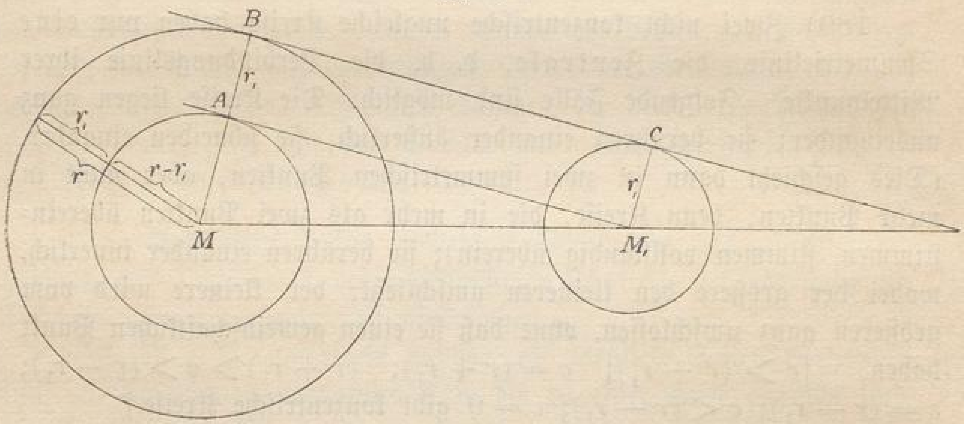
Fig. 40.



Was folgt für die Punkte der Figur, für die einzelnen Tangentenstücke, für die Winkel, Bogen, Flächenstücke der Figur; für die Radien der Berührungspunkte usw.?

Im Falle der äußerlichen Berührung beschränkt sich die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten auf drei; im Falle des Schneidens

Fig. 40 b.



auf zwei; im Falle der inneren Berührung auf eine; im Falle der vollständigen Umschließung des kleineren durch den größeren (ohne Berührung) gibt es keine Tangente.

[Will man die gemeinsamen äußeren Tangenten zweier Kreise konstruieren, so verfahre man vorläufig folgendermaßen: In Fig. 40b seien die Kreise M und M_1 mit den Radien r und r_1 gegeben. Man schlage um M, den Mittelpunkt des größeren Kreises, einen Hilfskreis mit dem Radius $(r - r_1)$, lege an diesen von M_1 aus eine Tangente, die in A berühre, ziehe MA bis zum Schnittpunkte B und errichte auf MB in B ein Lot. Dieses gibt die Tangente BC. Die gegen MM_1 dazu symmetrische Linie ist leicht zu zeichnen. —

Der Beweis der Richtigkeit ergibt sich aus dem Rechteck $ABCM_1$ und ist dem Schüler zu überlassen.

Für die gemeinsamen inneren Tangenten zweier auseinander liegenden Kreise benutze man einen Hilfskreis mit dem Radius $(r + r_1)$.]

182) Sind zwei nicht konzentrische Kreise gleich groß, so hat das Gesamtgebilde stets zwei Symmetrieachsen. Die zweifache Symmetrie soll für die verschiedenen Lagen untersucht werden.

183) Haben drei oder mehr ungleiche Kreise ihre Mittelpunkte auf einer Geraden, so ist diese die einzige Symmetrieachse. Gehen drei oder mehr ungleiche Kreise durch zwei Punkte, so liegen alle Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten dieser Punkte, die demnach die einzige Symmetrielinie ist. Gehen drei oder mehr ungleiche Kreise durch einen Punkt, und liegen dabei ihre Mittelpunkte auf einer durch diesen Punkt gehenden Geraden, so ist diese Symmetrielinie des Gesamtgebildes, alle Kreise berühren einander in den gegebenen Punkten und haben dort eine gemeinschaftliche Tangente.

184) **Aufgabe.** Die Kreisreihe zu konstruieren, die innerhalb eines (z. B. spitzen) Winkels liegt und dessen Schenkel berührt, wobei aber jeder Kreis die beiden benachbarten Kreise äußerlich berühren soll.

(Man gehe von einem beliebigen Lote auf der Winkelhalbierenden aus, welches ein gleichschenkliges Dreieck gibt, dessen In-Kreis und dessen An-Kreis leicht zu zeichnen sind. Dann errichte man Lote in den neuen Schnittpunkten der Winkelhalbierenden, was neue gleichschenklige Dreiecke gibt, für die nun entweder In-Kreise oder Außenkreise zu zeichnen sind. Statt die neuen Winkel stets zu halbieren, ziehe man gewisse Parallelen mit Hilfe des Lineals und Winkelhakens, errichte auch die Lote mit deren Hilfe.)

Sind die beiden Berührungsgeraden parallel, so werden alle Kreise gleich, und die Aufgabe vereinfacht sich.

185) **Aufgabe.** Um einen gegebenen Kreis lassen sich Berührungskreise, die mit ihm denselben Radius haben, so legen, daß jeder seine beiden Nachbarn berührt. Wie groß ist ihre Anzahl, und

konstruiert man diese Kreise? Die Symmetrieverhältnisse des Gesamtgebildes sollen untersucht werden.

(Sowohl die Mittelpunkte als auch die gegenseitigen Berührungspunkte der Kreisreihe liegen auf gewissen Kreisen, auch hat die Reihe einen umbeschriebenen Kreis.)

186a) **Aufgabe.** Einen Kreis zu zeichnen, um den drei, vier, acht, zwölf, sechzehn solcher Berührungskreise von gegebenem Radius gelegt sind, wobei die Reihe jedesmal geschlossen sein soll.

186b) Um einen gegebenen Kreis drei, vier, acht, zwölf, sechzehn solcher Berührungskreise zu zeichnen, wobei die Reihe jedesmal geschlossen sein soll.

(Im ersteren Falle zeichne man zwei Durchmesser, die einander unter 60^0 schneiden. Im Schnittpunkte des ersten Durchmessers mit dem Kreise zeichne man eine Tangente. Man halbiere den Winkel von 150^0, den die Tangente mit dem zweiten Durchmesser bildet. Wo die Winkelhalbierende den ersten Durchmesser schneidet, liegt das Zentrum des gesuchten Kreises. Mit den übrigen Fällen verfahre man in entsprechender Weise.)

187) **Aufgabe.** Einen Kreis in sechs gleiche Sektoren einzuteilen und in jeden Sektor einen Berührungskreis zu zeichnen.

(Man bilde die Symmetrielinie eines der Sektoren, errichte auf ihr im Schnittpunkte mit dem Kreise ein Lot und zeichne den In-Kreis des entstehenden (gleichseitigen) Dreiecks.)

188) **Aufgabe.** Um einen Punkt eines gegebenen Kreises mit dem Radius einen Kreisbogen zu schlagen, der ganz innerhalb des Kreises liegt und zwei Teilpunkte der Kreislinie gibt. Mit den beiden Teilpunkten soll dasselbe geschehen und die Konstruktion so oft wiederholt werden, bis das Ganze schließt.

Das Gesamtgebilde soll beschrieben werden.*)

189) **Aufgabe.** In die Bogendreiecke, welche vom gegebenen Kreise und je zwei aufeinander folgenden der vorher konstruierten Kreisbogen gebildet sind, Berührungskreise einzuzeichnen.*)

---

*) Zahlreiche Beispiele mehrfach symmetrischer Figuren findet man in den Lehrbüchern für gebundenes Zeichnen. Auf gotische Maßwerke, besonders auf Rosetten, sei aufmerksam gemacht, weil sie vortreffliche Zeichenübungen geben und das Verständnis für die gotische Baukunst vermitteln. Man vgl. G. Müller: Übungsstoff für das geometrische Zeichnen (Stuttgart bei P. Neff); Weishaupt-Richter: Das Ganze des Linearzeichnens; Bd. I (Leipzig bei H. Zieger).

(Das Lot, welches auf dem Symmetrieradius eines Bogendreiecks im Endpunkte errichtet ist, berührt die beiden vollendeten Kreisbogen des Dreiecks. Diese Tangente ist bereits halbiert. Man zeichne über der einen Hälfte einen Halbkreis. Dieser gibt auf dem einen Grenzbogen den Berührungspunkt mit dem gesuchten Kreise, denn die drei betreffenden Tangenten müssen gleich lang sein.)

II. Fortsetzung des planimetrischen Lehrgangs.

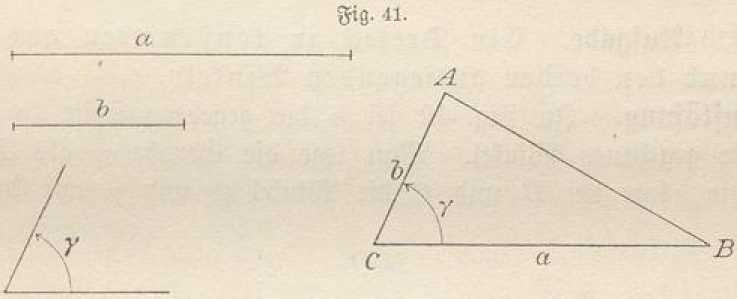
a) Die Lehre von der Kongruenz.

α) Die grundlegenden Kongruenzsätze für das Dreieck.

190) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.

Auflösung. In Fig. 41 seien a, b und $\sphericalangle \gamma$ die gegebenen Stücke. Man lege die Gerade a als CB beliebig hin, trage bei C

Fig. 41.



an sie den Winkel γ an, mache den neuen Schenkel $CA = b$ und verbinde A mit B. Dann ist Dreieck ABC das gesuchte, denn es enthält die gegebenen Stücke.

Bemerkungen. Die Aufgabe ist stets lösbar, sobald nur γ ein konkaver Winkel ist, was vorausgesetzt werden soll. (Ist der $\sphericalangle \gamma = 0$, so fällt Seite b auf a. Ist $\sphericalangle \gamma = 180^0$, so fällt b in die zu a entgegengesetzte Richtung. Im ersteren Grenzfalle wird Seite $c = a - b$, falls a die größere ist, im zweiten wird $c = a + b$. In beiden Fällen wird die Dreiecksfläche gleich Null; im allgemeinen wird die Fläche verschieden von Null.)

Die Aufgabe führt stets zu einer einzigen Lösung. So oft man ein Dreieck aus den gegebenen Stücken konstruiert, sei es im einen oder im entgegengesetzten Sinne (Umklappung), stets erhält man Dreiecke, die sich mit dem zuerst konstruierten decken.