Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

Erster Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- un Realschulen neu bearbeitet

Holzmüller, Gustav

Leipzig und Berlin, 1904

δ) Einige andere Konstruktionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-94706

Fig. 50). 29) Aus den Seiten a_1, b_1, c_1 des Höhenfußpunktdreiecks. 30) Aus α, β und der Summe s der beiden anderen Seiten. 31) Aus α, β und der Differenz d der beiden anderen Seiten. (Bei diesen beiden Aufgaben kommen Sätze vom Außenwinkel beim gleichschenkligen Dreiecke zur Anwendung.)

204) Rechtwinklige Dreiecke zu konstruieren aus: 1) Hypotenuse c und Kathete a. 2) Hypotenuse c und α. 3) Hypotenuse c und Höhe h_3. 4) Hypotenuse c und t_1.*) 5) ϱ und spitzem Winkel α 6) ϱ und Kathete a. 7) ϱ_1 (an Kathete a) und α. 8) ϱ_1 und β. 9) ϱ_1 und a. 10) ϱ und ϱ_1. 11) ϱ und ϱ_3. 12) ϱ_1 und ϱ_3. 13) ϱ_3 und a. 14) ϱ_3 und β. 15) Hypotenuse c und Summe s der beiden Katheten. 16) Hypotenuse c und Unterschied d der beiden Katheten.

205) Gleichschenklige Dreiecke zu konstruieren aus: 1) Basis b und Höhe h_2 (oder ϱ_1). 2) Basis b und ϱ. 3) Basis b und ϱ_2. 4) Basis b und $\sphericalangle \beta$. 5) Basis b und t_1. 6) Basis b und h_1. 7) ϱ und ϱ_2. 8) ϱ und h_2 (oder ϱ_1). 9) ϱ und β. 10) ϱ und α. 11) a und h_1. 12) α und w_1. 13) β und w_1. 14) ϱ_2 und β. 15) ϱ_2 und α. 16) ϱ_1 und α. 17) ϱ_1 und β. 18) a und t_2. 19) b und Summe s der Schenkel. 20) a und Summe der beiden anderen Seiten. 21) r und b. 22) r und a. 23) r und β. 24) r und α.

Der Schüler versuche, die Beispiele dieses Abschnitts selbst zu vermehren. (Die Winkelhalbierenden pflegen Schwierigkeiten zu machen.)

δ) Einige andere Konstruktionen.

206) Gegeben seien eine unbegrenzte Gerade KL und zwei Punkte P und Q auf derselben Seite der Geraden. Auf dieser soll ein Punkt X so bestimmt werden, daß dessen Verbindungslinien mit P und Q die Gerade unter entgegengesetzt gleichen Winkeln schneiden.**)

Auflösung. Man spiegele Q gegen die Gerade, was Q_1 gibt, verbinde Q_1 mit P, was den Schnittpunkt X gibt. Dies ist der gesuchte Punkt, wie sich aus der Geraden XQ leicht ergibt. — Beweis dem Schüler zu überlassen.

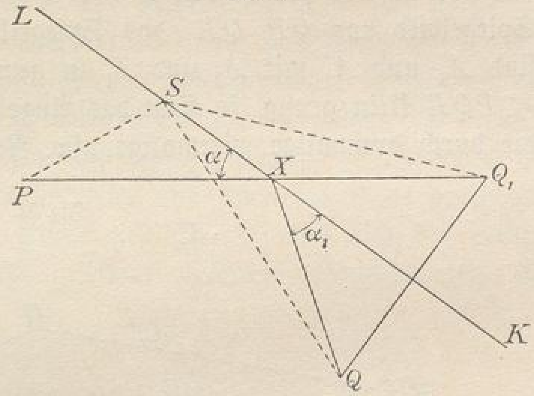
Bemerkungen. Statt Q zu spiegeln, kann man auch P spiegeln. — Geht von Q ein Lichtstrahl an die spiegelnde Gerade KL, so wird er so zurückgeworfen, daß $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$ ist. Er hat also, um von Q

*) Vgl. Anm. 2) auf Seite 77.

**) Diese Aufgabe wird vielfache Anwendung finden.

aus ins Auge, welches sich in P befinden möge, zu gelangen, den konstruierten Weg QXP zurückzulegen. Das Auge sieht dann in der Verlängerung von PX das Spiegelbild Q_1 von Q.

Fig. 51.



Die Gerade $Q_1P = XQ_1 + PX$ ist der kürzeste Weg zwischen Q_1 und P. Folglich ist auch $QX + XP$ der kürzeste Weg, der von Q aus zum Spiegel und dann nach P führt. Der Lichtstrahl, der von Q zum Spiegel und nach dem Auge geht, hat demnach den kürzesten unter den möglichen Wegen eingeschlagen.

207) Gegeben seien eine unbegrenzte Gerade KL und zwei beliebige Punkte P und Q auf verschiedenen Seiten der Geraden. Auf dieser soll ein Punkt X so konstruiert werden, daß dessen Verbindungslinien mit P und Q die Gerade unter entgegengesetzt gleichen Winkeln schneiden.*)

(Die Auflösung soll dem Schüler überlassen bleiben, der wiederum mit der Spiegelung des einen Punktes zu beginnen hat. Er versuche auch zu zeigen, daß der Unterschied der Wege PX und XQ ein Höchstwert für alle möglichen Wege von P zur Geraden und vom Schnittpunkte nach Q ist.)

208) Innerhalb eines gegebenen Winkels PQR seien zwei Punkte A und B gegeben; auf den Schenkeln sollen Punkte C und D so bestimmt werden, daß AC und CD mit dem einen Schenkel entgegengesetzt gleiche Winkel bilden, CD und DB mit dem anderen. (Fig. 52.)

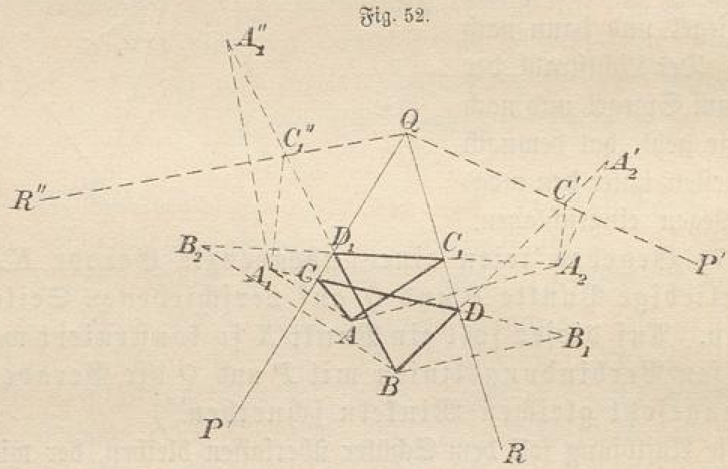
(Man bilde die Spiegelbilder A_1 und B_1 von A und B in bezug auf die Schenkel PQ und QR, dann gibt die Gerade A_1B_1 die gesuchten Punkte C und D. Bildet man die Spiegelbilder A_2 und B_2 in bezug auf die vertauschten Schenkel, so erhält man ein zweites Punktpaar C_1 und D_1. Die Beweise führe der Schüler.)

Bemerkungen. Denkt man sich in A ein Kerzenlicht, in B das Auge der Beobachters, und sind PQ und QR Spiegel, so ist $AC + CD + DB$ der Weg eines zum Auge gelangenden Lichtstrahls, der von jedem Spiegel unter demselben Winkel zurückgeworfen (re-

*) Diese Aufgabe wird vielfache Anwendung finden.

flektiert) wird, unter dem er auf ihn fällt. Das Auge sieht dann in der Verlängerung von BD ein Spiegelbild A_2' von A, und zwar ist $A_2'B = AC + CD + DB$. Auch in A_1'' sieht das Auge ein Spiegelbild von A, und dabei ist $A_1''B = AC_1 + C_1D_1 + D_1B$. — QP' ist das Spiegelbild von QP, QR'' das Spiegelbild von QR. In der Figur sind A_2' und A_1'' mit A_2 und A_1 in gewisse Beziehung gesetzt. — Ist $\sphericalangle PQR$ klein genug, so sieht das Auge B noch weitere Bilder von A, die durch dreimalige, viermalige usw. Reflexion an den Spiegeln her-

Fig. 52.



vorgebracht werden. Auch für diese Spiegelungen versuche man die Wege der Lichtstrahlen zu konstruieren. Man untersuche, ob der Weg $AC + CD + DB$ ein kleinster Weg (Minimalweg) für den Gang von A nach dem ersten, dann zum zweiten Spiegel, dann nach B ist, ebenso ob $AC' + C'D' + D'B$ ein Minimalweg ist usw. — A und B können ihre Rollen vertauschen. Je nach ihrer Lage können gewisse Sonderfälle eintreten.

208a) Man versuche dieselbe Aufgabe für eine von drei spiegelnden Geraden begrenzte Fläche zu lösen.

209) Eine Gerade von gegebener Länge a so in einen festen rechten Winkel PQR einzulegen, daß ihre Endpunkte auf den Schenkeln liegen und sie den einen Schenkel unter gegebenem spitzen Winkel α schneidet.

(Nach dem Satze über den Um-Kreis des rechtwinkligen Dreiecks hat die Mitte der Geraden zum geometrischen Ort einen um Q mit dem Radius $\frac{a}{2}$ beschriebenen Kreisbogen. Man zeichne einen Radius

*) Einiges aus den obigen Übungen wird wiederholt.

$QC = \frac{a}{2}$ so, daß $\sphericalangle CQP$ gleich α ist, und schlage um C einen Kreisbogen mit demselben Radius $\frac{a}{2}$, der QP in A schneidet. AC ist dann die Hälfte der Geraden in der geforderten Lage, die Verlängerung CB bis zum anderen Schenkel vollendet die Konstruktion.)

Bemerkung. Gleitet eine Gerade von gegebener Länge mit den Endpunkten auf den Schenkeln eines festen rechten rechten Winkels, so bewegt sich ihre Mitte auf dem besprochenen Kreise. Gleitet also der eine Endpunkt auf dem einen Schenkel und wird die Mitte durch eine Kurbel auf dem genannten Kreise geführt, so muß sich der andere Endpunkt geradlinig bewegen. (Eine wichtige Geradführung der Maschinenkunde.)

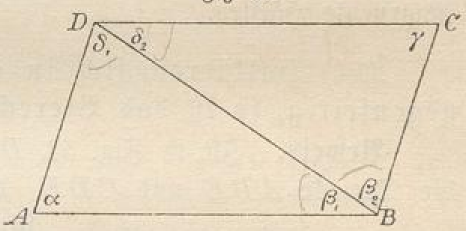
b) Lehre von den Parallelogrammen.

α) Die grundlegenden Sätze in übersichtlicher Zusammenstellung.

210) Die Gegenseiten und ebenso die Gegenwinkel des Parallelogramms sind einander gleich.

Beweis. Durch die Diagonale BD wird das Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 53) in zwei kongruente Dreiecke geteilt, denn beide Dreiecke stimmen überein in der Seite BD, in den Winkeln δ_1 und β_2 (die als Wechselwinkel bei Parallelen gleich sind) und in den Winkeln β_1 und δ_2 (aus demselben Grunde), also nach dem zweiten Kongruenzsatze. Folglich sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich, d. h. $AB = CD$ und $AD = CB$; ferner ist $\alpha = \gamma$, außerdem aber $\delta_1 + \delta_2 = \beta_2 + \beta_1$, d. h. $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$.

Fig. 53.



211) Sind in einem Viereck je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. Die Kongruenz der Dreiecke in Fig. 53 folgt jetzt nach dem dritten Kongruenzsatze. Aus ihr folgt $\delta_1 = \beta_2$, sodaß $AD \parallel BC$ ist; außerdem folgt $\delta_2 = \beta_1$, sodaß auch $CD \parallel AB$ ist.

212) Sind in einem Viereck zwei Seiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. Ist in Fig. 53 $AB \# CD$, so folgt aus dem Parallelismus, daß $\delta_2 = \beta_1$ ist. Die Dreiecke stimmen jetzt in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also kongruent nach dem