



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

A. Schattenkonstruktionslehre oder Lehre von den Schattengrenzlinien.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

A. Schattenkonstruktionslehre oder Lehre von den Schattengrenzlinien.

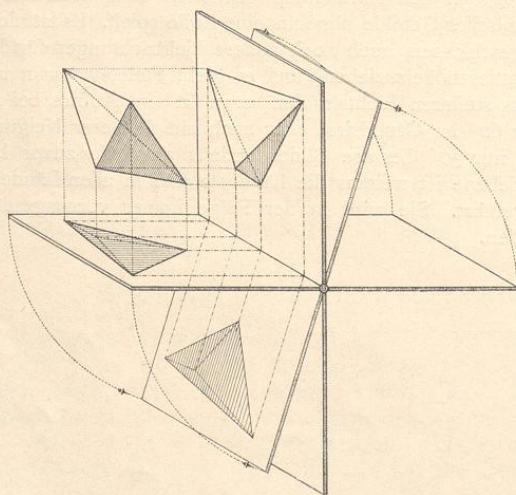
Die Schattenkonstruktionslehre hat unter Annahme der beschriebenen Lichtstrahlrichtung die graphischen Konstruktionen darzulegen, mit welchen die Grenzen zwischen Lichtflächen, Körperschattenflächen und Schlagschattenflächen für die zumeist in der Technik verwendeten mathematisch bestimmbaren Körper in verschiedenen Lagen aufgesucht werden können. Dieser Aufgabe sind die Kapitel II bis X gewidmet. Zusammengesetzte technische Gebilde erheischen zwar im allgemeinen die Anwendung von mehreren Lösungsmethoden nebeneinander; doch bleiben solche Fälle bei Erklärung der einzelnen Methoden besser beiseite.

II. Schlagschatten auf den Grundebenen und Selbstschatten von Körpern mit ebenen Flächen.

S. Hilfsmittel aus der darstellenden Geometrie.

Die Lösung der in den Kapiteln II, III und IV behandelten Aufgaben erfordert nur die Kenntnis elementarer Sätze und Operationen der darstellenden Geometrie; sie sind, der früheren Ankündigung entsprechend, in gedrängter Fassung hier voranzustellen.

a) Das Projizieren. Wenn ein Körper geometrisch, das heisst nach dem Verfahren der darstellenden Geometrie abgebildet werden soll, so geschieht dies



Figur 8.

dadurch, dass man in bestimmter Lage zum Körper eine horizontale und eine vertikale Ebene vorstellt und von jedem Kantenpunkt des Körpers sich ein Lot gefällt denkt

sowohl auf die Horizontalebene als auf die Vertikalebene. Dieses Lotfällen auf die beiden „Grundebenen“ nennt man das „Projizieren“, genauer das „rechtwinklige Projizieren“, und die Figur, welche gebildet wird durch die Fusspunkte der Lote, heisst eine „Projektion“. Auf der Horizontalebene bildet sich die „Horizontalprojektion“ des Körpers, die im folgenden ebensohäufig der „Grundriss“ des Körpers genannt werden wird, um eine Abwechslung und ein kürzeres Wort zu haben; auf der Vertikalebene bildet sich die „Vertikalprojektion“, die auch bezeichnet werden wird als „Aufriss“ oder „Vorderansicht“ des Körpers. Die horizontale Schnittlinie der beiden Grundebenen heisst der „Grundschnitt“. Da man nun beim Zeichnen nicht auf einer horizontalen Tafel und einer aufgesetzten vertikalen zugleich operieren kann, so denkt man sich nach vollendetem Projizieren (Figur zu Art. 8) die Horizontalebene mit allem, was an Projektionen darauf erscheint, um den Grundschnitt nach unten geklappt, und zwar um eine Viertelswendung, so dass sie mit der unter den Grundschnitt erweitert gedachten Vertikalebene zusammenfällt, oder — anschaulicher zu sprechen — vor diese Erweiterung zu stehen kommt. Doch ist für alle Beziehungen zwischen beiden Projektionen immer die ursprüngliche Lage beider Grundebenen wieder vorzustellen. Die Zeichnungsfläche unter dem Grundschnitt bedeutet also ebensowohl den vorderen Teil der Horizontalebene als den unteren Teil der Vertikalebene. Vertikalprojektionen auf diesem letzten, verdeckten Teil werden punktiert gezeichnet, um auszudrücken, dass sie von der Horizontalebene verdeckt sind; die Figuren auf dieser letzteren zeichnet man mit ausgezogenen Linien. — Die hinter den Grundschnitt erweiterte Horizontalebene, welche vielfach ebenfalls Projektionen aufzunehmen hat, klappt sich beim Hinunterdrehen der vorderen Horizontalebene nach oben und legt sich hinter den Oberteil der Vertikalebene. Die Zeichnungsfläche über dem Grundschnitt bedeutet also ebensowohl den hinteren Teil der Horizontalebene als den

Oberteil der Vertikalebene. Horizontalprojektionen auf diesem ursprünglich hinter dem Grundschnitt liegenden Teil der Horizontalebene werden ebenfalls als verdeckt bezeichnet, das heisst punktiert.

Auch in den sichtbar gedachten Projektionen der Körper auf der oberen Vertikalebene und der vorderen Horizontalebene werden diejenigen Kanten und Linien, welche bei Auffassung der Projektion als Vorderansicht beziehungsweise Ansicht von oben vom übrigen verdeckt und dadurch unsichtbar wären, nur punktiert gezeichnet. Anstatt der Ansicht von oben („Oberansicht“, auch „Draufsicht“ genannt) wird eine Horizontalprojektion wohl auch als Ansicht von unten („Unteransicht“, „Ansicht nach oben“) behandelt, wenn hierdurch grössere Deutlichkeit erreicht oder Wichtigeres als sichtbar dargestellt wird.

b) Der Punkt. Ein Punkt A erscheint in der Horizontalprojektion als ein Punkt a und ebenso in der Vertikalprojektion als ein Punkt a' ; beide Projektionen liegen auf derselben Vertikallinie des Zeichenblattes.

c) Die Gerade. Eine gerade Linie erscheint im allgemeinen in beiden Projektionen als gerade Linie. Die Lote, welche ihre Punkte auf die horizontale Grundebene projizieren, bilden eine Ebene, welche die „horizontalprojizierende“ Ebene der Geraden heisst; sie wird im folgenden oft auch ihre „vertikalstehende“ oder „vertikale“ Ebene genannt werden. Die Ebene, welche die Gerade auf die vertikale Grundebene projiziert, heisst die „vertikalprojizierende“.

Die Punkte, in welchen eine Gerade die Grundebenen schneidet, heissen ihre „Spuren“. Die „Vertikalspur“ einer Geraden liegt auf dem Zeichenblatt vertikal über (oder unter) dem Punkt, in welchem die Horizontalprojektion der Geraden den Grundschnitt schneidet; ebenso liegt die „Horizontalspur“ vertikal unter (oder über) dem Schnittpunkt der Vertikalprojektion mit dem Grundschnitt.

Für bestimmte Lagen der Geraden liegt eine Spur unendlich fern, oder es ist dies mit beiden Spuren der Fall. Diese Lagen sind die folgenden:

Eine vertikale Gerade erscheint im Grundriss als ein Punkt, im Aufriss vertikal.

Eine Gerade senkrecht zur Vertikalebene erscheint im Aufriss als ein Punkt, im Grundriss senkrecht zum Grundschnitt.

Eine horizontale Gerade erscheint im Aufriss horizontal, im Grundriss parallel zu ihrer Lage im Raum.

Eine Gerade parallel zur Vertikalebene erscheint im Grundriss horizontal, im Aufriss mit der Neigung, die sie im Raum gegen die Horizontalebene darbietet.

Eine Gerade parallel zum Grundschnitt erscheint in beiden Projektionen horizontal.

Eine Gerade senkrecht zum Grundschnitt erscheint in beiden Projektionen vertikal; sie bedarf zu ihrer unzweideutigen Darstellung der Beifügung der später zu erklärenden Seitenprojektion. Für eine solche Gerade lassen sich beide Spuren als im Grundschnitt zusammengefallen vorstellen.

Ist eine Gerade im Raum in irgend einem Verhältnis eingeteilt, so sind auch ihre beiden Projektionen in diesem Verhältnis eingeteilt.

d) Die Kurve. Eine gekrümmte Linie hat im allgemeinen zwei Kurven als Projektionen; bei ebenen Kurven kann eine Projektion geradlinig werden. Tangenten an einer Kurve projizieren sich als Tangenten an beiden Kurvenprojektionen.

e) Die Ebene. Eine Ebene kann auf zwei Weisen dargestellt werden, entweder durch ihre zwei Schnittlinien mit den Grundebenen, welche als gerade Linien mit Schnittpunkt im Grundschnitt auftreten und die „Spuren“ der Ebene heissen, oder durch die zwei Projektionen einer Figur, welche in der Ebene liegt (Dreieck, Vieleck, Kreis, beliebig begrenzte Figur, auch wohl nur Winkelfeld zweier Geraden). Die letzte Darstellungsweise ist für die Schattenkonstruktion die häufigere.

Zwei beliebige Dreiecke, deren Eckpunkte vertikal übereinander liegen, stellen, aufgefasst als zusammengehörige Projektionen, immer eine Ebene dar. Zwei Vielecke stellen nur dann die Projektionen einer ebenen Figur dar, wenn nicht nur ihre Eckpunkte, sondern auch die Schnittpunkte der einander entsprechenden Diagonalen und Seitenverlängerungen vertikal übereinander liegen. Bei n Seiten eines Vielecks muss diese Probe (abgesehen von den Eckpunkten selbst) für mindestens $n-3$ Schnittpunkte erfüllt sein; dann ist sie für alle erfüllt.

Eine horizontale Ebene hat nur eine Spur, und zwar eine horizontal gerichtete Vertikalspur. Die Horizontalprojektion einer in einer solchen Ebene liegenden Figur ist der Figur kongruent.

Eine vertikale Ebene parallel zum Grundschnitt hat nur eine Spur, und zwar eine horizontal gerichtete Horizontalspur. Die Vertikalprojektion einer in einer solchen Ebene liegenden Figur ist der Figur kongruent.

Eine schief zum Grundschnitt stehende Vertikalebene hat eine vertikale Vertikalspur und eine schief gerichtete Horizontalspur.

Eine geneigte Ebene, die senkrecht zur Vertikalebene steht, hat eine senkrecht zum Grundschnitt stehende Horizontalspur und eine schief gerichtete Vertikalspur.

Eine geneigte Ebene parallel zum Grundschnitt hat zwei horizontal gerichtete Spuren.

Eine Ebene senkrecht zum Grundschnitt hat zwei übereinander stehende Vertikallinien als Spuren.

Jede Ebene, die nicht ganz horizontal ist, enthält eine horizontale Linienrichtung und eine zu dieser senkrechte Linienrichtung, welche die steilste Linienrichtung auf der Ebene ist und zugleich die Neigung der Ebene gegen die Horizontalebene darbietet, weshalb sie die Richtung der „Gefällslinie“ der Ebene heisst. Jede horizontale Richtungslinie der Ebene erscheint im Aufriss horizontal und im Grundriss parallel der Horizontalspur der Ebene; jede Gefällslinie erscheint im Grundriss senkrecht zur Horizontalspur der Ebene oder Horizontalprojektion der Richtungslinie. Die beiden Projektionen einer Gefällslinie bestimmen für sich allein die Ebene, der sie angehört.

Unter „Neigung“ einer Ebene oder Geraden kurzweg ist immer die Neigung gegen die Horizontalebene verstanden.

f) Gerade und Gerade. Zwei Gerade sind im Raum parallel, wenn auf jeder Grundebene ihre beiden

Projektionen parallel sind (oder, mit dem gebräuchlichen Ausdruck, wenn ihre „gleichnamigen“ Projektionen parallel sind). Ausnahme bei Geraden senkrecht zum Grundschnitt, indem diese zur Bestimmung ihrer Richtung der Seitenprojektion bedürfen.

g) Ebene und Ebene. Zwei Ebenen sind parallel, wenn ihre gleichnamigen Spuren parallel sind. (Ausnahmen bei Ebenen parallel zum Grundschnitt.)

Die Gerade, nach welcher sich zwei Ebenen schneiden, hat ihre Spuren in den Schnittpunkten der gleichnamigen Spuren beider Ebenen.

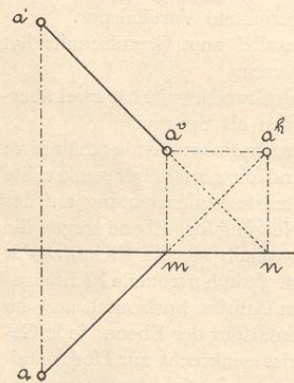
h) Gerade und Ebene. Eine Gerade liegt in einer Ebene, wenn die Spuren der Geraden in die Spuren der Ebene fallen. — Eine Gerade ist parallel einer Ebene, wenn sich durch die Spuren der Geraden die Spuren einer zweiten Ebene parallel zu denjenigen der gegebenen legen lassen. — Eine Gerade steht senkrecht zu einer Ebene, wenn die Projektionen der Geraden senkrecht zu den Spuren der Ebene stehen.

Zur Bestimmung der Spuren der Ebene zweier sich schneidender Geraden verbindet man die gleichnamigen Spuren der letzteren. Nur wenn sich die Verbindungslinien im Grundschnitt schneiden, sind sie die Spuren einer Ebene; andernfalls liegen die gegebenen Geraden nicht in einer Ebene. Um die Spuren der Ebene einer gegebenen Figur zu erhalten, wählt man auf dieser zwei sich schneidende Gerade und behandelt diese in der angegebenen Weise.

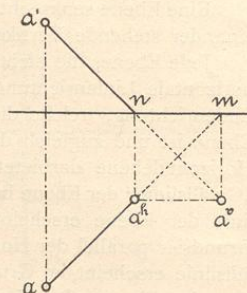
9. Schlagschatten eines Punktes auf den Grundebenen.

Das einfachste Problem der Schattenkonstruktion ist das folgende: „Auf den Grundebenen den Schatten eines Punktes zu suchen.“

Lösung: Man zieht durch den Punkt einen Lichtstrahl; wo dieser zuerst eine Grundebene schneidet, da ist der Schlagschatten des Punktes.



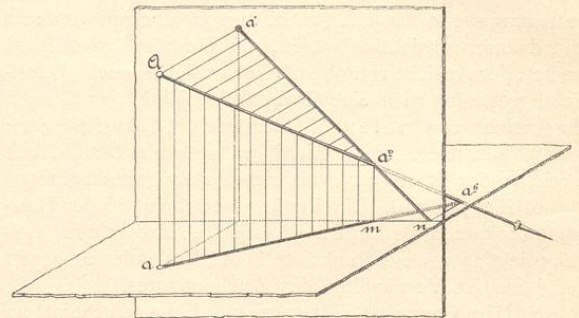
Figur 9a.



Figur 9b.

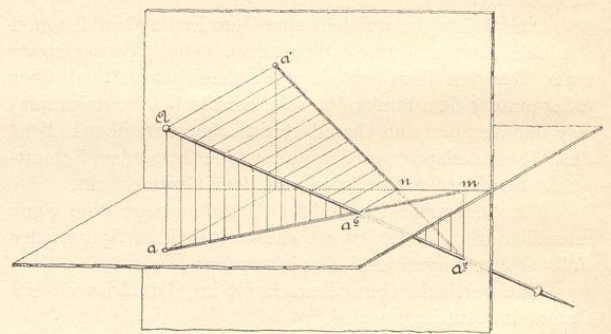
Graphische Ausführung (Figuren 9a u. b): Man zieht durch den Grundriss a des Punktes eine Linie unter 45° zum Grundschnitt geneigt, ebenso durch den Aufriss a' des Punktes. Im Schnittpunkt jeder solchen Linie mit dem Grundschnitt — also in m und n — errichtet man

ein Lot bis zum Schnitt mit der andern Linie. Die beiden Schnittpunkte dieser Lote mit den Projektionen des Lichtstrahls sind die Schattenpunkte a'' und a''' . Die zuerst vom Lichtstrahl getroffene Grundebene enthält den wirklichen Schattenpunkt, die andere den nur gedachten Schattenpunkt, der erscheinen würde, wenn die erste Grundebene nicht da wäre.



Figur 9c.

In Figur 9a ist a'' der wirkliche Schattenpunkt; in Figur 9b ist es a''' . Die Figuren 9c und 9d stellen den Grundgedanken der Konstruktion, die Benützung der projizierenden Ebenen des Lichtstrahls zur Bestimmung seiner



Figur 9d.

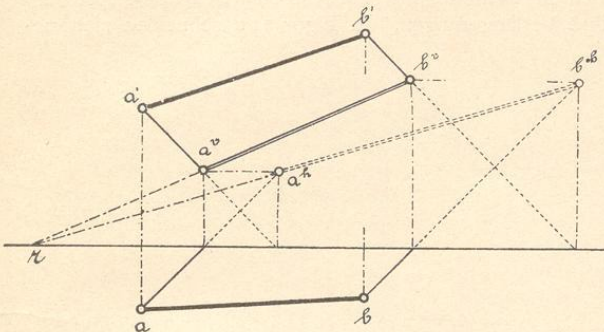
Schnittpunkte mit dem beschatteten Gebilde perspektivisch dar. Dieser Grundgedanke findet sich in der grösseren Hälfte aller Schattenkonstruktionen wieder.

Probe: Die beiden Schattenpunkte liegen auf der Zeichnung in gleicher Höhe.

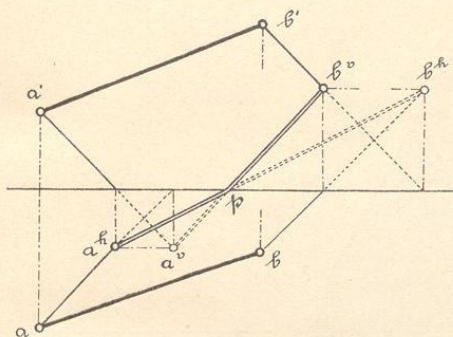
Schlagschatten gerader und gekrümmter Linien. 10.

Der Schlagschatten einer geraden Linie ab auf einer Grundebene (Figur 10a) wird gefunden, indem man die Schatten der Endpunkte auf dieser Grundebene bestimmt und geradlinig verbindet (a'' mit b'' und a''' mit b'''). Wirklicher Schatten ist nur diejenige Schattenlinie ($a''b''$ in Figur 10a), welche zuerst von den Lichtstrahlen getroffen wird; die zweite Schattenlinie bildet nur einen gedachten Schatten, wie er bei Fehlen der andern Grundebene auf-

treten würde. Verteilt sich der Schatten auf beide Grundebenen (Figur 10b), so sucht man ihn ganz auf beiden Grundebenen und erhält als wirklichen Schatten eine gebrochene Linie $a^h b^v$ mit Ecke im Grundschnitt.



Figur 10a.



Figur 10b.

Probe für beide Fälle: Die beiden Schatten schneiden sich im Grundschnitt, im ersten Fall verlängert (in r), im zweiten unmittelbar (in p).

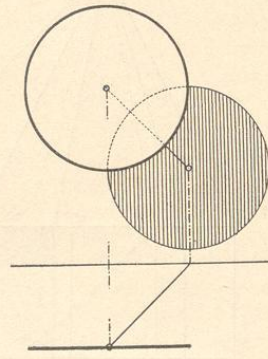
Um den Schlagschatten einer ebenen oder doppelt gekrümmten Kurve zu konstruieren, bestimmt man die Schlagschatten einer genügenden Zahl ihrer Punkte und verbindet die Schattenpunkte in richtiger Reihenfolge durch eine stetige Linie (Beispiel Figur 17c).

Für besondere Fälle der Form und Lage der Linien ergeben sich folgende oft verwertbaren Sätze:

- Eine Gerade parallel einer Grundebene wirft auf diese einen parallelen Schatten; eine horizontale Gerade parallel zum Grundschnitt hat auf beiden Grundebenen einen horizontalen Schatten; eine vertikale Gerade wirft auf die Vertikalebene einen vertikalen Schatten.
- Der Schatten einer Geraden auf einer Grundebene geht immer durch den Schnittpunkt der Geraden mit der Grundebene. (Dieser selbstverständliche Satz gewinnt seinen Wert erst bei getrennter Lage von Linie und Grundebene, in welchem Fall er nicht immer unmittelbar aus der Figur herausgefühlt wird.)
- Der Schatten einer Geraden, die senkrecht zur Vertikalebene steht, ist auf dieser unter 45° ge-

neigt; der Schatten einer vertikalen Geraden auf der Horizontalebene bildet einen Winkel von 45° mit dem Grundschnitt.

- Eine Kurve, deren Ebene parallel zu einer Grundebene steht, wirft auf diese einen ihr kongruenten Schatten. (Denn die Schattenkurve entsteht als Schnitt der von den Lichtstrahlen gebildeten Cylinderfläche durch eine Ebene parallel zur Basis.)



Figur 10c.

- Ein Kreis, dessen Ebene parallel zu einer Grundebene steht, wirft auf diese als Schatten einen kongruenten Kreis. Man findet diesen (Figur 10c) am raschesten, indem man den Schatten des Mittelpunktes bestimmt und aus dem Schattenpunkt einen Kreis mit dem Halbmesser des schattenwerfenden Kreises beschreibt. (Der Schattenkreis entsteht als der ebene Schnitt eines von den Lichtstrahlen gebildeten schiefen Kreiscylinders parallel zu dessen Basis.)
- Ein Kreis wirft im allgemeinen einen elliptischen Schatten auf die Grundebenen. In besonderen Fällen ist der Schatten ein Kreis oder eine gerade Linie. Der zuvor unter e) genannte Fall ist aber nicht der einzige, in dem ein kreisförmiger Schatten entstehen kann.

Schlagschatten eines Körpers mit ebenen Grenz- 11. flächen.

Die nächste Aufgabe wird die folgende sein: „Es ist der Schlagschatten zu konstruieren, den ein Körper mit ebenen Flächen auf die Grundebenen wirft, und die Selbstschattengrenze auf dem Körper zu bestimmen.“

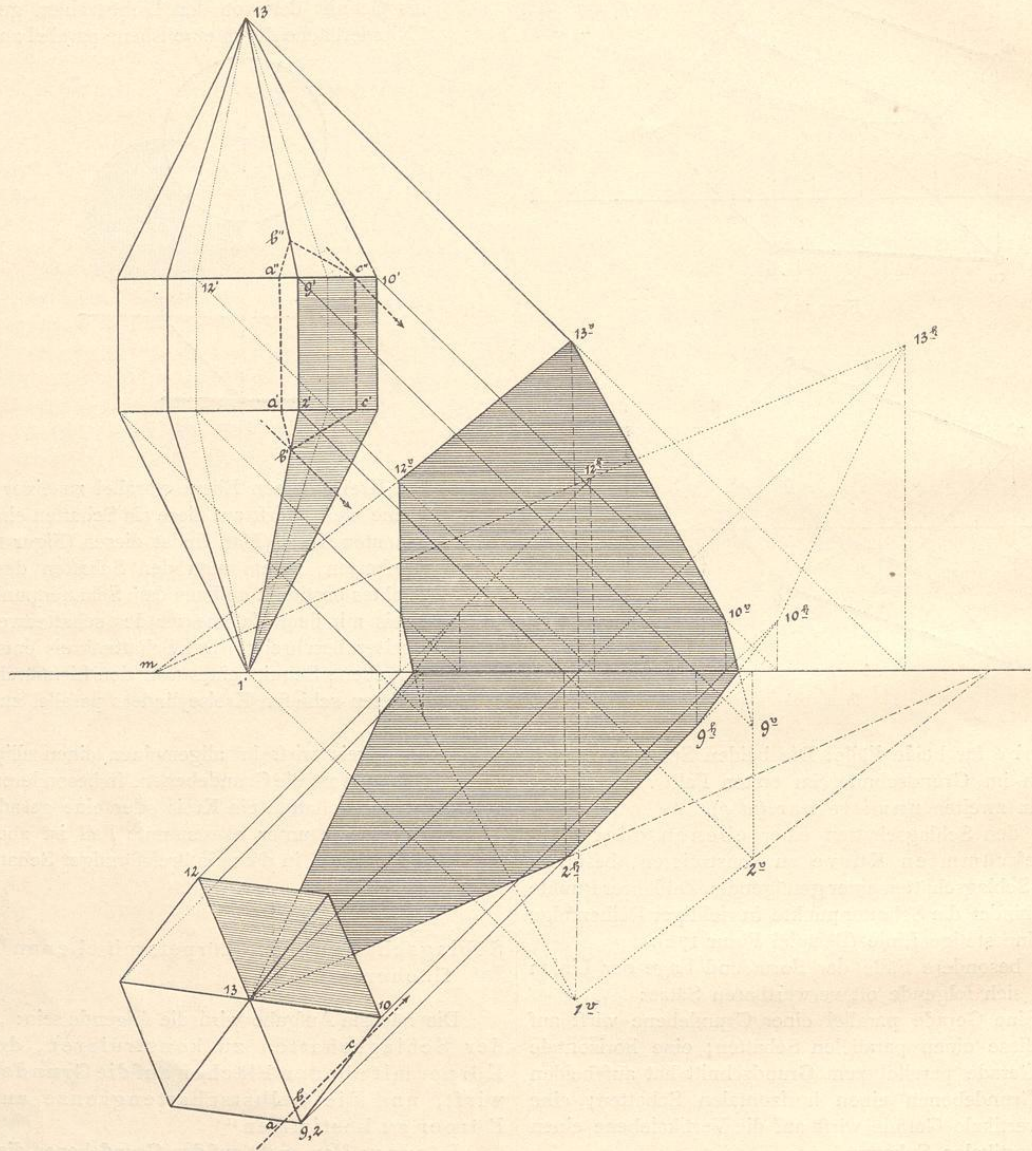
Lösung: Man sucht auf den Grundebenen die Schatten der einzelnen Eckpunkte und verbindet die Schattenpunkte den bestehenden Kanten entsprechend; es bildet sich dann durch die äußersten Schattenlinien die Schlagschattengrenze. Die innerhalb dieser liegenden Schattenpunkte bleiben ohne Verwertung; wenn man daher schon zuvor weiß, dass ein Eckpunkt keinen Schatten wirft, so kann die Konstruktion seines Schlagschattens unterbleiben. Das Numerieren der Eckpunkte ist zu empfehlen, ebenso das Numerieren der gefundenen Schattenpunkte mit Be-

zeichnung ihrer Grundebenen durch h und v , z. B. Schatten des Eckpunktes 13 auf der Horizontalebene 13^h , auf der Vertikalebene 13^v .

Im allgemeinen verteilt sich der Schatten auf beide Grundebenen. Zur Übung und Vervollständigung der Anschauung empfiehlt es sich, den Schlagschatten auf beiden

Proben: 1) Die zwei Schatten eines jeden Punktes liegen auf der Zeichnung in gleicher Höhe, z. B. 13^v mit 13^h in Figur 11 a.

2) Die zwei Schatten einer jeden Kante schneiden sich im Grundschnitt, entweder die Schatten selbst oder ihre Verlängerungen. In Figur 11 a schneiden sich un-



Figur 11 a.

Grundebenen ganz zu suchen, das heisst die nur gedachten Schattengrenzen auf der hinteren Horizontalebene und unteren Vertikalebene als Fortsetzung der wirklichen Schattengrenzen mit punktierten Linien einzutragen. Die Figuren 11 a und 11 b geben ein einfaches und ein schwierigeres Beispiel mit Beifügung dieser nur gedachten Schatten auf den verdeckten Grundebenen.

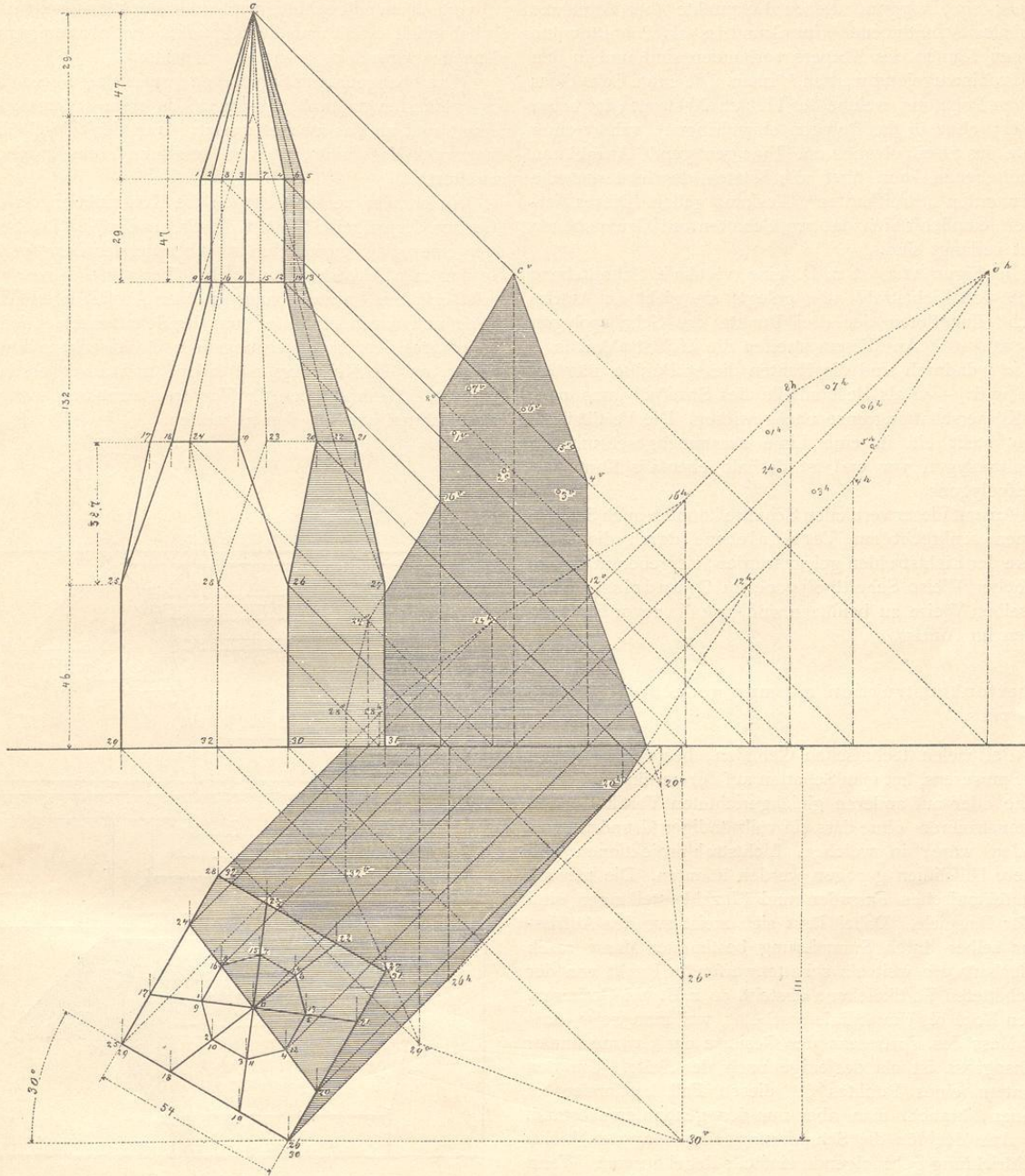
mittelbar im Grundschnitt die Schatten der Kante $10-9$; verlängert schneiden sich im Punkt m des Grundschnitts die Schatten der Kante $13-12$.

3) Kanten, die im Raum parallel sind, haben parallele Schatten. In Figur 11 a z. B. erscheinen parallel die Schattengrenzen 12^h-13^h und 1^h-2^h .

12. Selbstschatten auf Körpern mit ebenen Flächen.

Die Bestimmung der Körperschattengrenze auf dem Vielflach, einer windschief gebrochenen Linie aus einer

und Schatten auf dem Körper.“ In Figur 11a sind z. B. die Kanten $9-10$ und $10-13$ dadurch als Körperschattengrenzlinien nachgewiesen, dass im Schlagschatten-umriss die Linien 9^h-10^h und 10^v-13^v erscheinen.



Figur 11b.

Reihe von Kanten zusammengesetzt, geschieht nach folgender Regel: „Diejenigen Kanten des Körpers, deren Schatten im Umriss der Schlagschattenfigur erscheinen, sind die Grenzen von Licht

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

Ein zweites Hilfsmittel zur Bestimmung der Körperschattengrenze, deren windschief gebrochene Linie zuweilen das „Streifpolygon“ des Lichtes genannt wird, weil die Lichtstrahlen längs dieser Linie den Körper streifen,

ist das Schneiden des Körpers durch einige Ebenen parallel zur Lichtrichtung, und zwar meist durch vertikale Ebenen, die im Grundriss als Linien von 45° Neigung erscheinen. Jede solche Ebene giebt als Schnitt mit dem Körper ein Polygon, dessen Eckpunkte (bei Annahme vertikaler Schnittebenen) im Grundriss als Schnittpunkte mit den Kanten des Körpers vorhanden sind und in den Aufriss hinaufgelotet werden können. Diejenige Ecke eines solchen Polygons, welche der Lichtstrahl streift (das heisst berührt, ohne in das Polygon einzudringen), gehört einer Kante des Streifpolygons an. Eine genügende Anzahl von Schnittebenen kann über alle Kanten des letzteren, die sogenannten „Streifkanten“, Auskunft geben. Dieses Verfahren empfiehlt sich da, wo Schatten auf Grundebenen nicht verlangt sind.

In Figur 11 a ist z. B. eine vertikale Schnittebene durch den Lichtstrahl abc gelegt; sie giebt im Aufriss durch Hinaufloten der drei Punkte das Schnittpolygon $a'b'c'd'e'f'a''$. An diesem streifen die Lichtstrahlen in b' und c'' ; dadurch sind die Kanten dieser Punkte, nämlich 1-2 und 9-10 als Bestandteile des Streifpolygons oder der Körperschattengrenze nachgewiesen. Die Vertikallinie $2'-9'$ stellt ein in eine Linie zusammengeschrumpftes Schnittpolygon vor und ist deshalb ebenfalls Kante des Streifpolygons.

Anstatt dieser vertikalen Schnitte könnten auch Schnittebenen senkrecht zur Vertikalebene durch die Aufrisse der Lichtstrahlen gelegt werden; sie geben in ebenso einfacher Weise Schnittpolygone im Grundriss, die in derselben Weise zu benützen sind, wie die zuvor beschriebenen im Aufriss.

13. Schattenkonstruktion mit nur gedachtem Grundriss.

Bei vielen technischen Gebilden, besonders solchen des Bauwesens, hat man Schatten auf der vertikalen Grundebene oder auf anderen gleichgerichteten Vertikalebenen zu konstruieren, ohne dass ein vollständiger Grundriss vorhanden wäre, in welchem Lichtstrahlprojektionen und andere Hilfslinien gezogen werden könnten. Die meisten architektonischen Fassaden und Einzeldarstellungen sind hiefür Beispiele. Dabei lässt sich meist aus der Aufrissfigur selber durch Summierung bestimmter Masse rasch abstecken, wie weit ein schattenwerfender Punkt von der beschatteten Vertikalebene absteht, so z. B. bei Gesimsen, deren Ecke als Umrisslinie erscheint, weil man weiss, dass das Mass des Vortretens der Gesimse nach vorne immer ebensogross ist als dasjenige nach der Seite. Um den Schatten eines Punktes für diesen Fall bestimmen zu können, braucht man aber nur den genannten Abstand.

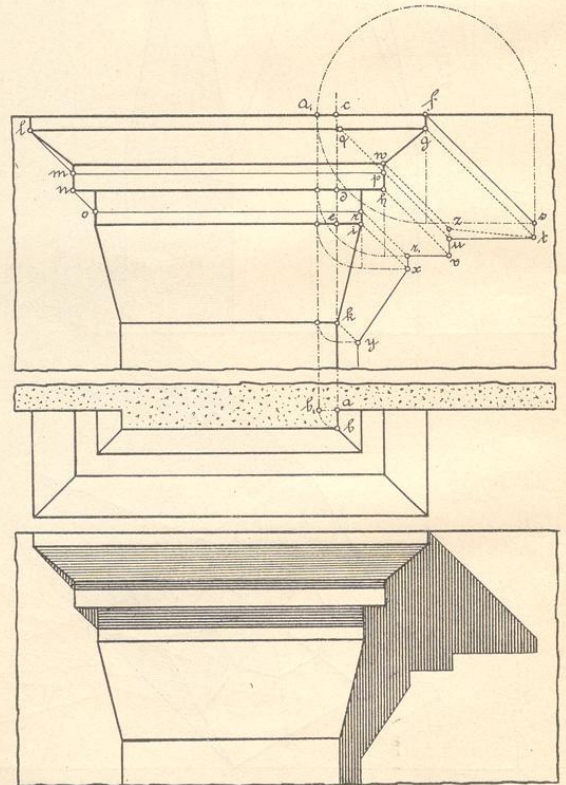
Aus der für die Schattierung eingebürgerten Lichtstrahlrichtung geht folgende einfache Regel hervor: „Wenn ein Punkt seinen Schlagschatten auf die vertikale Grundebene oder auf eine andere gleich gerichtete Ebene wirft, so fällt sein Schatten so weit unter ihn (oder auch so weit rechts von ihm), als er von der Ebene entfernt ist. Man erhält hieraus als einen geometrischen Ort des Schattens eine Horizontalinie (beziehungsweise Vertikallinie).

Einen zweiten geometrischen Ort hat man in der Vertikalprojektion des Lichtstrahls als in einer Linie unter 45° durch den schattenwerfenden Punkt gezogen; hiedurch ist der Schattenpunkt bestimmt.

Indem man die schattenwerfenden Punkte nacheinander so behandelt, erhält man die Eckpunkte der Schattengrenze, ohne den Grundriss beiziehen zu müssen.

(Das obengenannte Summieren zweier Masse geschieht am raschesten dadurch, dass man das erste in den Zirkel nimmt und an das zweite ansetzt, dann den Zirkel über das zweite Mass hinweg bis zu dessen anderem Endpunkt erweitert.)

Noch mehr vereinfacht sich die Konstruktion für die Grenzen derjenigen Schatten, die ein auf der Vertikalebene oder einer gleichgerichteten Ebene sitzendes horizontales Gesims mit Eckbildung auf sich selber wirft. Unter der meist erfüllten Voraussetzung gleicher Ausladungen nach vorne und nach der Seite muss der Schatten eines jeden Eckpunktes der linken Kehrungslinie (Gesimseckprofilinie) wieder auf die Kehrungslinie fallen, und anschliessende horizontale Gesimskanten der Vorderseite müssen horizontale Schatten auf das Gesims werfen.



Figur 13 a.

Figur 13 a bietet ein einfaches Beispiel für diese Schattenkonstruktion mit nur gedachtem Grundriss. An der linken Kehrungslinie des Gesimses sind die Schattenpunkte m und o als Schnitte mit den Lichtstrahlen durch

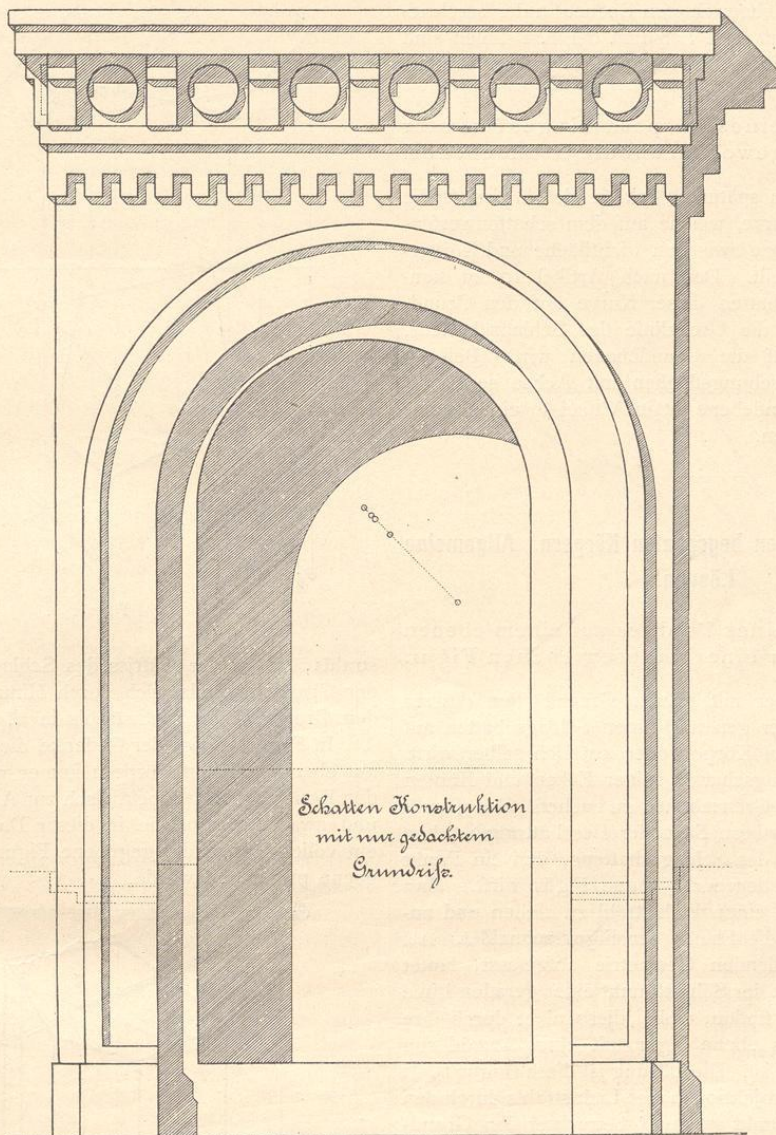
l und n erhalten und die horizontalen Schattengrenzen mp und or daran angeschlossen. Die zur Wandfläche senkrechten Kanten in l und n liefern die unter 45° geneigten Schattengrenzen auf der Wandfläche lm und no .

Der Schatten der rechtseitigen Kehrlinie ist erhalten wie folgt:

linie durch t haben; auch dadurch fällt die Linie tz als Schattengrenzlinie wieder hinaus.

Schattenpunkt v liegt vertikal unter h um $ab + dh$; Schattenpunkt x liegt vertikal unter i um $ab + ei$; Schattenpunkt y liegt vertikal unter k um ab .

Um das Mass ab zu summieren zu cf , dh und ei ,



Figur 13 b.

Schattenpunkt s liegt vertikal unter f um $ab + cf$, ausserdem auf dem Lichtstrahl; Schattenpunkt t liegt vertikal unter g um $ab + cf$.

Schattenpunkt z , von w geworfen, würde vertikal unter w liegen um $ab + dh$; da aber Punkt w selbst im Schatten ist, so kann er keinen Schatten werfen. Wenn ferner g seinen Schatten nach t wirft, so muss die Kante gl , weil parallel zum Grundschnitt, als Schatten eine Horizontal-

kann man sich der Vertikalen a, b , bedienen, die im Abstand ab parallel zu ck gezogen ist. Die Kreise machen das Umklappen der Masse ersichtlich.

Proben: Zieht man durch p einen Lichtstrahl rückwärts bis q , so ist mp der Schatten von lq ; also muss ut der Schatten von qg , als des Restes von lg sein. Das heisst u ist ebenfalls Schatten von q ; also liegen die drei Punkte q, p, u auf einem Lichtstrahl; mit andern Worten:

ρu muss eine Linie von 45° Neigung sein, und dieselbe Bedingung muss erfüllt werden durch $r r, y$.

Ein ausgedehnteres Beispiel der Schattenkonstruktion mit nur gedachtem, beziehungsweise nur zum Abstecken von Massen benütztem Grundriss bietet Figur 13b. In dieser sind nicht nur Schatten auf der Wandfläche, sondern auch auf anderen gleichgerichteten Ebenen in der beschriebenen Weise erhalten. Die Schatten der Kreislinien sind konstruiert wie oben in Artikel 10, Folgerung e) angegeben.

14. Schlagschatten eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche, geworfen auf die Grundebenen.

Man bestimmt in später zu erklärender Weise (siehe Kap. IV u. ff.) die Kurve, welche auf dem schattenwerfenden Körper die Grenze zwischen Lichtfläche und Körperschattenfläche darstellt. Der nach Artikel 10 zu konstruierende Schlagschatten dieser Kurve auf den Grundebenen ist zugleich die Grenzlinie des Schlagschattens, den der Körper auf die Grundebenen wirft (Beispiel Figur 30b). Für Drehungsflächen mit Achse senkrecht zur beschatteten Grundebene ist in Artikel 59 ein weiteres Verfahren beschrieben.

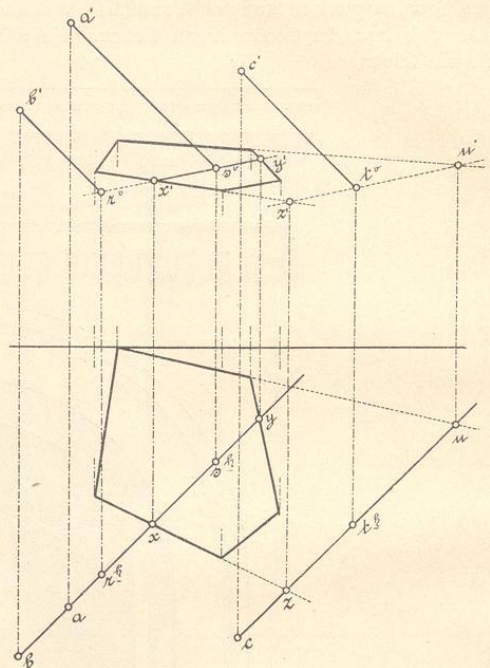
III. Schatten auf eben begrenzten Körpern. Allgemeine Lösung.

15. Schlagschatten eines Punktes auf einem ebenen Polygon oder einer anderen ebenen Figur.

Wenn ein Körper mit ebenen Grenzflächen (kürzer Vielfach und Polyeder genannt) einen Schlagschatten auf einen andern solchen Körper oder auf sich selber wirft, so hat man die Schlagschatten seiner Ecken und Kanten auf den beschatteten Grenzebenen zu suchen. Das grundlegende Problem für diese Fälle der Beschattung ist hiernach das Aufsuchen des Schlagschattens, den ein Punkt auf eine geradlinig begrenzte ebene Figur wirft. Man hat durch den Punkt einen Lichtstrahl zu ziehen und zuzusehen, wo dieser die Fläche der Figur schneidet. Als Problem der darstellenden Geometrie aufgefasst, lautet dies wie folgt: Es ist der Schnittpunkt einer geraden Linie und einer Ebene zu finden, wobei diese nicht durch ihre Spuren, sondern als ebene Figur mit einer Anzahl von Eckpunkten gegeben ist. Die Lösung ist diese (Figur 15a):

Man zieht die Projektionen des Lichtstrahls durch den schattenwerfenden Punkt aa' und betrachtet den Grundriss des Lichtstrahls als die Darstellung seiner horizontalprojizierenden Ebene. Diese vertikalstehende Ebene schneidet die gegebene Figur oder deren Erweiterung nach einer geraden Linie, deren Horizontalprojektion zusammenfällt mit dem Grundriss des Lichtstrahls. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Kanten der gegebenen Figur müssen also im Grundriss zusammenfallen mit den Schnittpunkten der Kanten und des Lichtstrahls. Man hat also diese im Grundriss nach Ziehen des Lichtstrahls erscheinenden Punkte x und y nur hinaufzuloten auf die

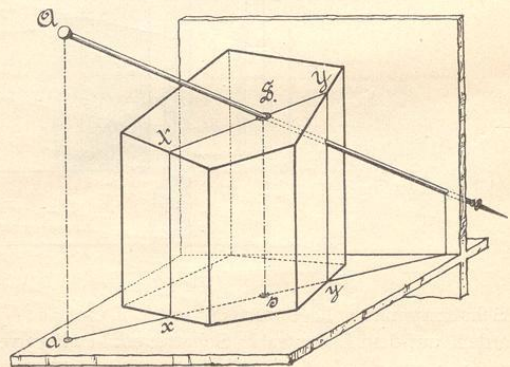
entsprechenden Aufrisskanten nach x' und y' und erhält in der Verbindungslinie $x'y'$ die Vertikalprojektion jener Schnittpunkte. Wo sie getroffen wird vom Aufriss des Licht-



Figur 15a.

strahls, da ist der Aufriss des Schlagschattenpunktes s' ; der Grundriss findet sich durch Hinunterloten von s' auf den Grundriss des Lichtstrahls in s^h .

In Figur 15b ist der Gedanke dieser für die Schatten auf ebenbegrenzten Körpern immer wieder zu verwertenden Konstruktion perspektivisch zur Anschauung gebracht, und zwar erscheint sie in dieser Darstellung so, als ob ein volles Prisma die gegebene Figur auf die Horizontalebene projizieren würde.



Figur 15b.

Der Schatten des Punktes aa' hat sich innerhalb der Grenzlinien der gegebenen Figur gefunden. Ein zweiter Fall ist der, dass zwar der Schatten des Punktes bb' ausser-

halb der Figur fällt, dass aber doch die Vertikalebene des durch den Punkt gezogenen Lichtstrahls die Kanten der Figur unmittelbar schneidet, so dass die Lösung völlig dieselbe bleibt, wie im ersten Fall (Schattenpunkt r'' mit Grundriss in r''), und nur $x' y'$ zu verlängern ist.

Ein dritter Fall erscheint, wenn nicht nur der Schatten des Punktes cc' ausserhalb der Figur fällt, sondern auch die Vertikalebene des durch den Punkt gezogenen Lichtstrahls die Seiten der Figur nicht mehr unmittelbar schneidet. Man muss dann geeignete Seiten oder Diagonalen der Figur verlängern, bis zwei Schnitte mit der Horizontalprojektion des Lichtstrahls erhalten werden (in z und u). Diese Schnittpunkte lotet man wieder hinauf nach z' und u' , zieht $z' u'$ und erhält als Schnitt dieser Linie mit dem Aufriss des Lichtstrahls den Schattenpunkt t'' im Aufriss. Das Hinunterloten auf den Grundriss des Lichtstrahls giebt den Schattenpunkt im Grundriss t'' .

Ungenauere spitzwinklige Durchschnitte zwischen den Seiten der Figur und dem Grundriss des Lichtstrahls oder den Projektionsloten können immer durch bessere Durchschnitte ersetzt werden, indem man bestimmte andere Seiten der Figur verlängert oder bestimmte Diagonalen zieht. Auch die Unsicherheit, welche durch zu geringe Länge der Strecken xy oder zu hereinkommt, lässt sich auf diesem Weg umgehen.

Beim Aufzeichnen der Projektionen des Vielecks ist zu beachten, dass beliebig angenommene n Eckpunkte nur dann eine ebene Figur bilden, wenn die in Art. 8e genannte Bedingung erfüllt ist.

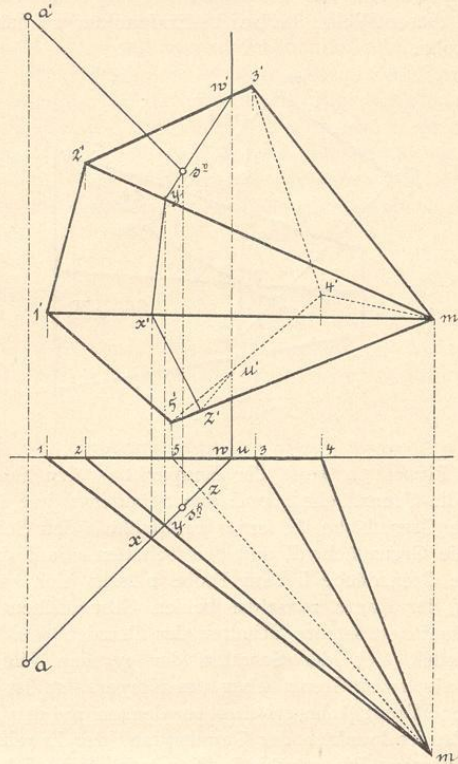
Ist der Schlagschatten eines Punktes auf einer ebenen Figur mit gekrümmter Umrisslinie zu bestimmen, so wählt man auf dieser Linie einige Punkte als Eckpunkte eines Vielecks und konstruiert den Schlagschattenpunkt auf diesem in der zuvor beschriebenen Weise.

16. Schlagschatten eines Punktes auf einem Vielflach.

Auf Grund der vorgeführten Konstruktion ist folgendes Problem lösbar: „Den Schatten eines Punktes auf einem Polyeder zu suchen.“ Man hat die Konstruktion nur auf die einzelne Grenzebene des Körpers anzuwenden.

Nicht immer, wenn der Schatten eines Punktes auf einem Polyeder zu suchen ist, weiss man nun aber zum voraus, auf welche der ebenen Grenzflächen des Körpers der Schatten fällt. Es ist daher meist notwendig, die Schnittlinie der lotrechten Lichtstrahlenebene nicht nur mit einer Körperfläche zu suchen, sondern mit mehreren, ja oft mit allen, die von ihr geschnitten werden, so dass eine gebrochene Schnittlinie, ein „Schnittpolygon“, an die Stelle der früheren geraden Schnittlinie tritt. Die Horizontalprojektionen der Eckpunkte der gebrochenen Schnittlinie sind sämtlich im Grundriss des Lichtstrahls und des Polyeders schon vorhanden und dürfen nur auf die Kanten der Vertikalprojektion des Körpers hinaufprojiziert werden. Wo der Lichtstrahl die gebrochene Schnittlinie schneidet, da ist der Schatten des Punktes auf dem Polyeder.

Es sei z. B. in Figur 16 der Schlagschatten des Punktes aa' auf der fünfseitigen Pyramide mit Basis in der Vertikalebene zu suchen. Nachdem die Lichtstrahl-



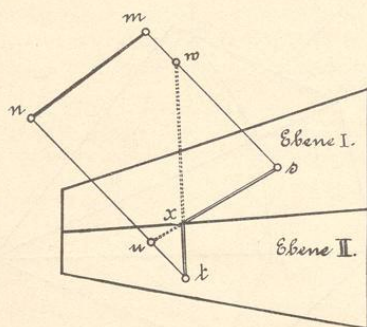
Figur 16.

projektionen gezogen sind, lotet man aus dem Grundriss die Schnittpunkte $uzxyw$ hinauf nach $u'z'x'y'w'$ und erhält hiedurch im Aufriss die gebrochene Schnittlinie $u'z'x'y'w'$. Sie wird vom Aufriss des Lichtstrahls im Punkt s'' getroffen; dieser ist Schlagschattenpunkt im Aufriss; sein Hinunterloten auf den Lichtstrahlgrundriss nach s^h giebt den Schlagschattenpunkt im Grundriss.

Schlagschatten einer geraden oder gekrümmten Linie auf einem Vielflach. Schlagschattenpunkte einer Linie auf einer andern.

Der nächste Schritt wird zu folgendem Problem führen: Den Schatten einer begrenzten geraden Linie auf einem Polyeder zu suchen. Man hat dabei zunächst zu suchen die Schatten der beiden Endpunkte der Geraden. Gewöhnlich werden sie auf zwei verschiedene, aber benachbarte Flächen des Körpers fallen, und man weiss dann zunächst über die Richtung der gebrochenen Schattenlinie nichts, wenn man auch die beiden Endpunkte derselben hat. Es ist daher notwendig, wenigstens für einen Endpunkt den Schatten auch auf der Erweiterung derjenigen Grenzebene zu bestimmen, die der andere Punkt beschattet. Um den Schatten eines

Punktes auf der Erweiterung einer Grenzfläche zu erhalten, darf man nur die auf dieser befindliche Strecke der gebrochenen Schnittlinie bis zum Schnitt mit der Vertikalprojektion des Lichtstrahls verlängern. Verfährt man in dieser Weise für beide Endpunkte, so hat man eine Probe.



Figur 17 a.

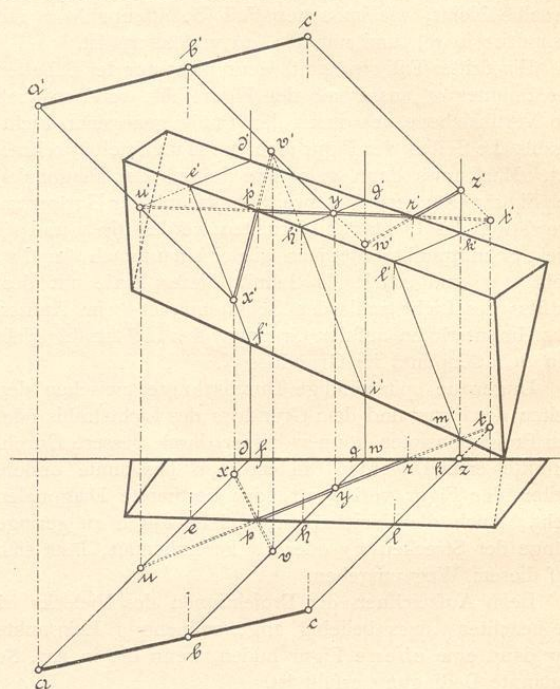
In Figur 17a werfe der Endpunkt m den Schatten s auf die Grenzfläche I und den Schatten w auf die erweiterte Grenzfläche II, ferner Endpunkt n den Schatten t auf die Grenzfläche II und den Schatten u auf die erweiterte Grenzfläche I. Zur Probe müssen sich su und tw auf der Kante zwischen beiden Grenzflächen in x schneiden; st ist der Schatten der Geraden mn .

Verteilt sich der Schatten der geraden Linie auf mehr als zwei Grenzflächen des Körpers, so ist jede getroffene Grenzfläche erweitert zu denken und der Schatten jedes Endpunktes der Geraden auf der Erweiterung zu bestimmen. Die graphische Konstruktion ist dabei zunächst dieselbe wie bei den vorhergehenden Problemen; man bestimmt zuerst die gebrochenen Schnittlinien der beiden lotrechten Lichtstrahlenebenen mit dem Körper und verlängert jede Strecke der Schnittlinien, die auf einer beschatteten Grenzfläche liegt, bis zum Schnitt mit beiden Lichtstrahlprojektionen.

Oft fällt ein Teil des Schattens der Geraden auf die Grundebenen, der andere auf den Polyeder; doch macht dies für die Lösung der Aufgabe keinen wesentlichen Unterschied, sondern man behandelt die Grundebene, als ob sie eine Grenzfläche des Polyeders wäre. Zur vollständigen Lösung gehört das Hinunterloten der Schattenpunkte und das Ziehen der Schattenlinien in der Horizontalprojektion.

Beispiel. Die gerade Linie abc in Figur 17b werfe ihren Schatten teils auf das schräge Prisma, teils auf die Vertikalebene. Die gebrochenen Schnittlinien der drei durch die Punkte abc gehenden vertikalen Lichtstrahlenebenen, erhalten wie zuvor in Art. 16, seien $d'e'f'$, $g'h'i'$, $k'l'm'$. Unmittelbar werden als Schnitte dieser Linien mit den drei Lichtstrahlen erhalten die Schattenpunkte $x'y'z'$. Durch Verlängerung von $d'e'$ wird erhalten u' als Schatten von a' auf der erweiterten oberen Grenzfläche; durch Verlängerung von $i'h'$ wird erhalten v' als Schatten von b' auf der erweiterten unteren Grenzfläche; durch Verlängerung von $l'k'$ wird erhalten t' als Schatten

von c' auf der erweiterten oberen Grenzfläche, und durch Ziehen von $g'i'$ wird erhalten w' als Schatten von b' auf der Vertikalebene. Nun sind zu ziehen die Linien $x'v'$



Figur 17 b.

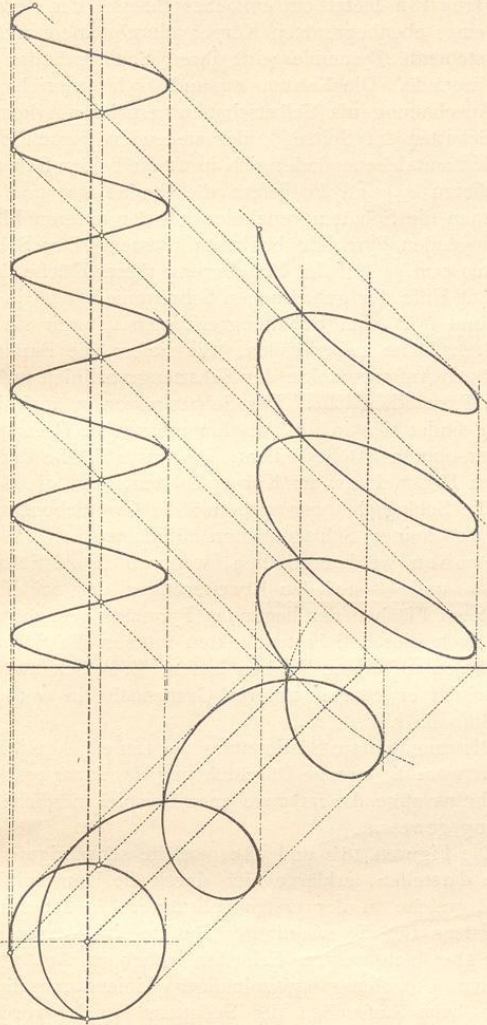
$u'y't'w'z'$; zur Probe muss $u'y't'$ eine Gerade werden und die Schnittpunkte der drei Linien p' und r' müssen auf die Kanten fallen. Die gebrochene Linie $x'p'y'r'z'$ ist der Schlagschatten von $a'b'c'$. Durch Hinunterloten ihrer Punkte auf die Lichtstrahlprojektionen und Kanten in den Grundriss findet sich in diesem die Schattenlinie $xpyrz$.

Ein zweites, mittelbar bestimmendes Verfahren ist das Aufsuchen des Schlagschattens der Geraden und der Schlagschatten der Kanten des Vielfachs auf einer Grundebene. Wo der Schlagschatten der Geraden den Schlagschatten einer Kante schneidet, da ist der Schlagschatten desjenigen Punktes, in welchem die auf dem Vielfach zu suchende Schlagschattenlinie über die Kante weggeht; ein rückwärts durch den Schattenpunkt auf der Grundebene gezogener Lichtstrahl führt also zu dem Schattenpunkt auf der Kante. Hat man auf allen beschatteten Kanten solche Punkte bestimmt, so führt deren geradlinige, in richtiger Reihenfolge vollzogene Verbindung ebenfalls zu der gesuchten gebrochenen Schlagschattenlinie. Dieses Verfahren kann zuweilen rascher zum Ziel führen als das erstbeschriebene; auch bei dem zuvor betrachteten Beispiel würde dies zutreffen.

Der Schlagschatten einer gekrümmten Linie auf einem Vielfach findet sich dadurch, dass man die Schatten einer genügenden Zahl von Punkten der Linie auf dem Vielfach aufsucht und stetig verbindet. Zur schärferen Bestimmung des Verlaufs der gebrochenen Schattenkurve,

insbesondere der Eckpunkte, die sie auf den Kanten des Körpers bildet, ist es zu empfehlen, für jedes Schattenkurvenstück auch noch ein Stück weit die beiden Verlängerungen auf der Erweiterung der beschatteten Grenzebene aufzusuchen.

Wenn etwa nur die Schlagschattenpunkte auf den Kanten des Vielfachs verlangt sind, so lassen sich diese Punkte rascher dadurch erhalten, dass man die Schlag-



Figur 17c.

schatten der Kanten des Vielfachs und diejenigen der Kurve auf einer Grundebene aufsucht. Der Schnittpunkt der hiedurch erhaltenen Schattenkurve mit dem Schatten einer Kante ist der Schatten desjenigen Punktes der Kante, auf welchen die gegebene Kurve ihren Schatten wirft.

Eine in der praktischen Schattenkonstruktion kaum selbständig vorkommende Aufgabe: „Den Schlagschattenpunkt oder die Schlagschattenpunkte einer geraden oder gekrümmten Linie auf einer anderen solchen Linie zu suchen“, kann immerhin als Bestandteil zusammengesetzter

Aufgaben Bedeutung gewinnen, etwa wenn es sich darum handelt, wichtige Punkte der Schlagschattengrenzen unabhängig von der übrigen Lösung scharf zu bestimmen. Diese Aufgabe löst sich dadurch, dass man die Schlagschatten beider Linien auf einer Grundebene sucht. Wo sich die hiedurch erhaltenen Schattenlinien schneiden, da ist der gemeinschaftliche Schlagschattenpunkt derjenigen zwei Linienpunkte, die einander in Schatten setzen, und die zuweilen als „Fixpunkte“ beider Linien bezeichnet werden. Ein rückwärts gezogener Lichtstrahl führt also zu beiden. Eine naheliegende Aufgabe: „Es sind die Punkte der Selbstbeschattung einer Schraubenlinie aufzusuchen“ ist in Figur 17c behandelt.

Schlagschatten eines Vielfachs auf einem andern Vielfach und Selbstbeschattung von Körpern mit ebenen Flächen. Schatten im Innern hohlgedachter ebenbegrenzter Körper.

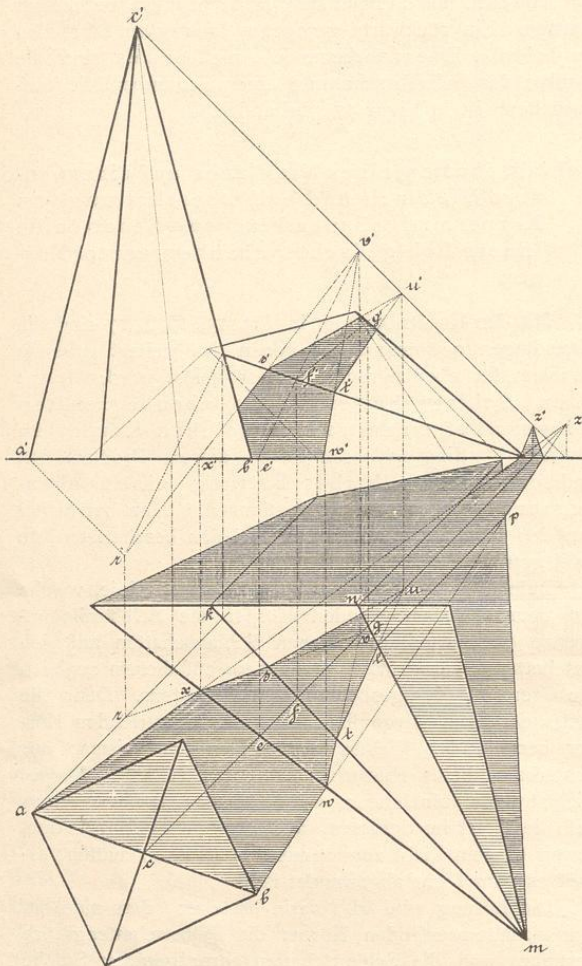
Mit den Konstruktionen in Art. 15, 16 u. 17 sind die Grundlagen gewonnen, auf denen das weitest gehende Problem für ebenbegrenzte Körper gelöst werden kann: „Den Schlagschatten eines ebenbegrenzten Körpers auf einem andern solchen Körper zu suchen.“ Eingeschlossen ist in diesem Problem das andere: „Die Selbstbeschattung eines ebenbegrenzten Körpers zu bestimmen.“ Man hat hiebei nur den schattenwerfenden Teil und den beschatteten wie zwei getrennte Körper zu behandeln.

Indem die gebrochene oder Streifpolygonlinie, welche auf dem schattenwerfenden Körper die Selbstschattengrenze darstellt, ihren eigenen Schlagschatten auf den beschatteten Körper wirft, erzeugt sie auf diesem zugleich die Grenzlinie des gesuchten Schlagschattens. Denn die längs der Streifpolygonlinie den schattenwerfenden Körper berührenden Lichtstrahlen bilden ein Prisma; nur ausserhalb dieses Prismas kann der beschattete Körper Lichtstrahlen aufnehmen; was von seiner Oberfläche innerhalb liegt, ist im Schatten, und zwar im Schlagschatten, soweit es dem Licht zugewendet, im Körperschatten, soweit es vom Licht abgewendet ist.

Die Lösung wird also darin bestehen, dass man auf dem schattenwerfenden Körper die Selbstschattengrenze bestimmt und die Schlagschatten ihrer geraden Stücke auf den Grenzebenen des beschatteten Körpers nach Art. 17 aufsucht.

Diese Selbstschattengrenze kann in vielen Fällen oft schon nach der Anschauung festgestellt werden; ein Fehler in dieser Richtung macht sich später im Resultat meist von selbst bemerklich und hat nur ein wenig vergebliche Arbeit zur Folge. Wo die Entscheidung schwieriger ist, bestimmt man das genannte Streifpolygon etwa mit Hilfe des Schlagschattens, den der schattenwerfende Körper auf eine Grundebene wirft, unter Anwendung des in Art. 12 ausgesprochenen Satzes für die Selbstschattengrenze. Häufig fällt ohnehin ein Teil des Schlagschattens auf die Grundebene. Oder man macht von den in Art. 12, zweiter Teil, genannten Schnittpolygonen auch für die

Selbstschattengrenze auf dem schattenwerfenden Körper Gebrauch, wie es für den beschatteten ohnehin nahe liegt. Denn die geraden oder gebrochenen Schnittlinien, die auf diesem zur Bestimmung der Schlagschattenspunkte dienen, sind ja Bestandteile der Schnittpolygone, mit welchen seine Körperschattengrenze bestimmt werden kann, und können also, genügend weit fortgesetzt, auch in dieser zweiten Richtung verwertet werden.



Figur 18a.

Ein besonderer Fall der Selbstbeschattung ebenbegrenzter Körper erscheint im Innern von solchen, wenn man ihre Oberfläche als dünne Schale auffasst, wie sie etwa in einem Papier- oder Blechmodell geboten ist. Die Selbstschattengrenze, von bestimmten Kanten als „Streifpolygon“ gebildet, ist für das Innere eines solchen Hohlkörpers ganz dieselbe wie für das Äussere; die Lichtflächen des Äusseren erscheinen im Innern als die Körperschattenflächen, da sie vom Licht abgewendet sind; die Körperschattenflächen des Äusseren sind im Innern dem Lichte zugewendet, aber durch die andern Flächen

verdeckt; sie sind also durchaus Schlagschattenflächen. Erst wenn ein Teil der Grenzflächen weggebrochen wird, kann ein Teil dieser dem Lichte zugewendeten inneren Flächen beleuchtet werden; die Grenzlinie zwischen diesem inneren Licht und dem inneren Schlagschatten hat für das Äussere keine Bedeutung, wie es auch äussere Selbstbeschattung geben kann, ohne dass deren Grenzlinien auf den Lichtflächen für das Innere etwas bedeuten.

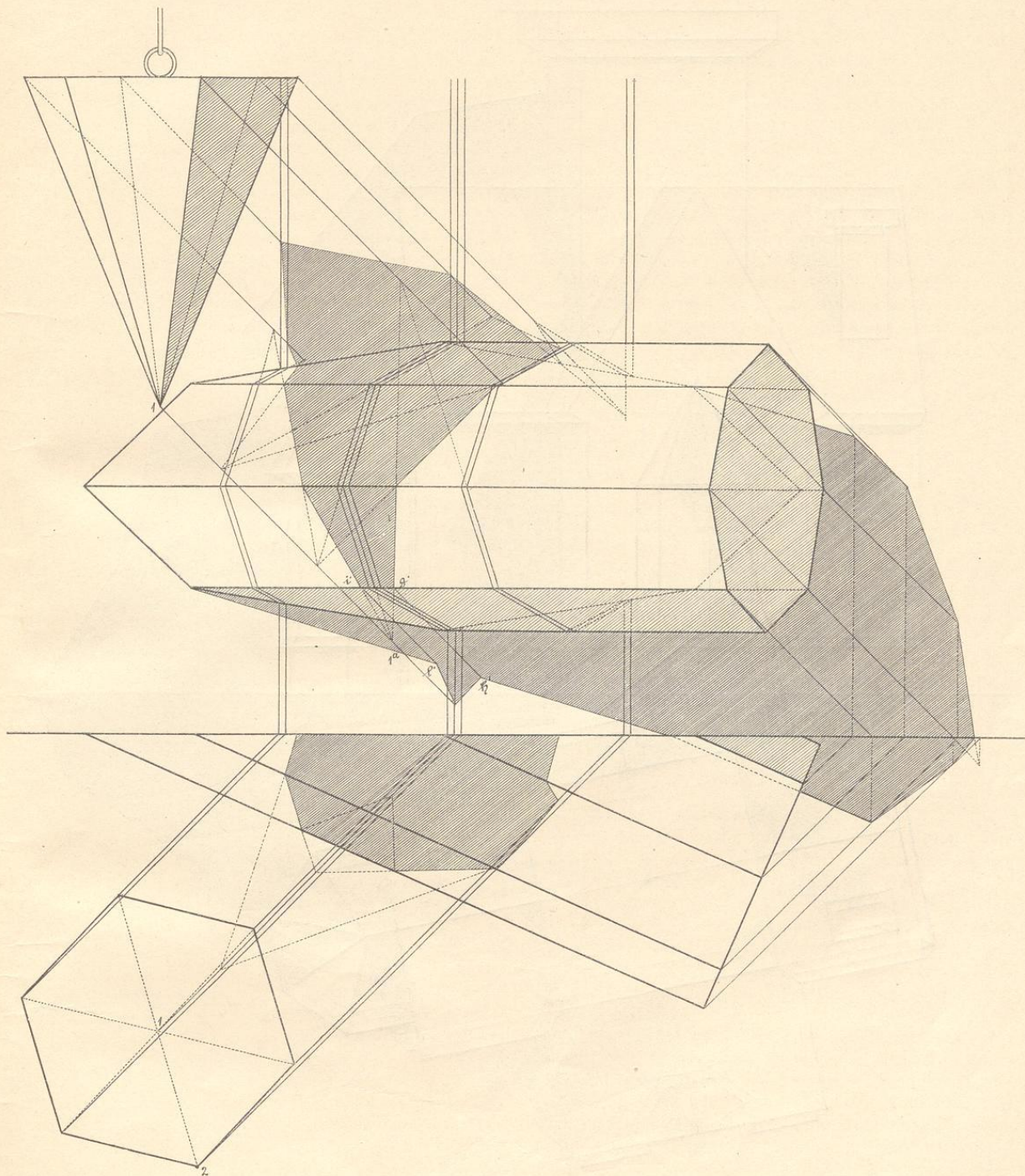
Figur 18a bietet ein einfaches Beispiel der Beschattung eines ebenbegrenzten Körpers durch einen andern; eine stehende Pyramide wirft ihren Schlagschatten auf eine liegende. Die Kanten ac und bc lassen sich nach der Anschauung als Selbstschattengrenzlinien erkennen. Der Schatten der Spitze cc' der stehenden Pyramide auf der Horizontalebene findet sich in z ; die beiden Schattengrenzlinien az und bz liefern die Punkte xx' und ww' , an denen die Schattengrenzlinien auf der unteren Fläche der liegenden Pyramide beginnen müssen. Der Schlagschatten von cc' auf der Erweiterung dieser Fläche findet sich mit Hilfe der gebrochenen Schnittlinie $e'f'g'$ in vv' ; $x'v'$ und $w'v'$ sind Schattengrenzlinien, soweit sie auf die Grenzfläche selber fallen. Sie liefern die Punkte s' und t' als Anfangspunkte der Schattengrenzlinien auf der oberen Pyramidenfläche. Der Schatten von cc' auf dieser Fläche findet sich in uu' ; dorthin müssen die Grenzlinien auf der oberen Fläche laufen. Die dritte Fläche der liegenden Pyramide ist im Körperschatten, weil die Kante mn die Schlagschattengrenze auf die Grundebene wirft, kann also keinen Schlagschatten aufnehmen.

Proben werden erhalten, wenn noch die Schatten von aa' und bb' auf den Erweiterungen der beiden beleuchteten Flächen der liegenden Pyramide gesucht werden; nach diesen Schattenpunkten müssen die Schattengrenzlinien auf diesen Flächen laufen. Z. B. Schatten von aa' auf der erweiterten unteren Grenzfläche in rr' ; dorthin läuft die Linie $v'r'$.

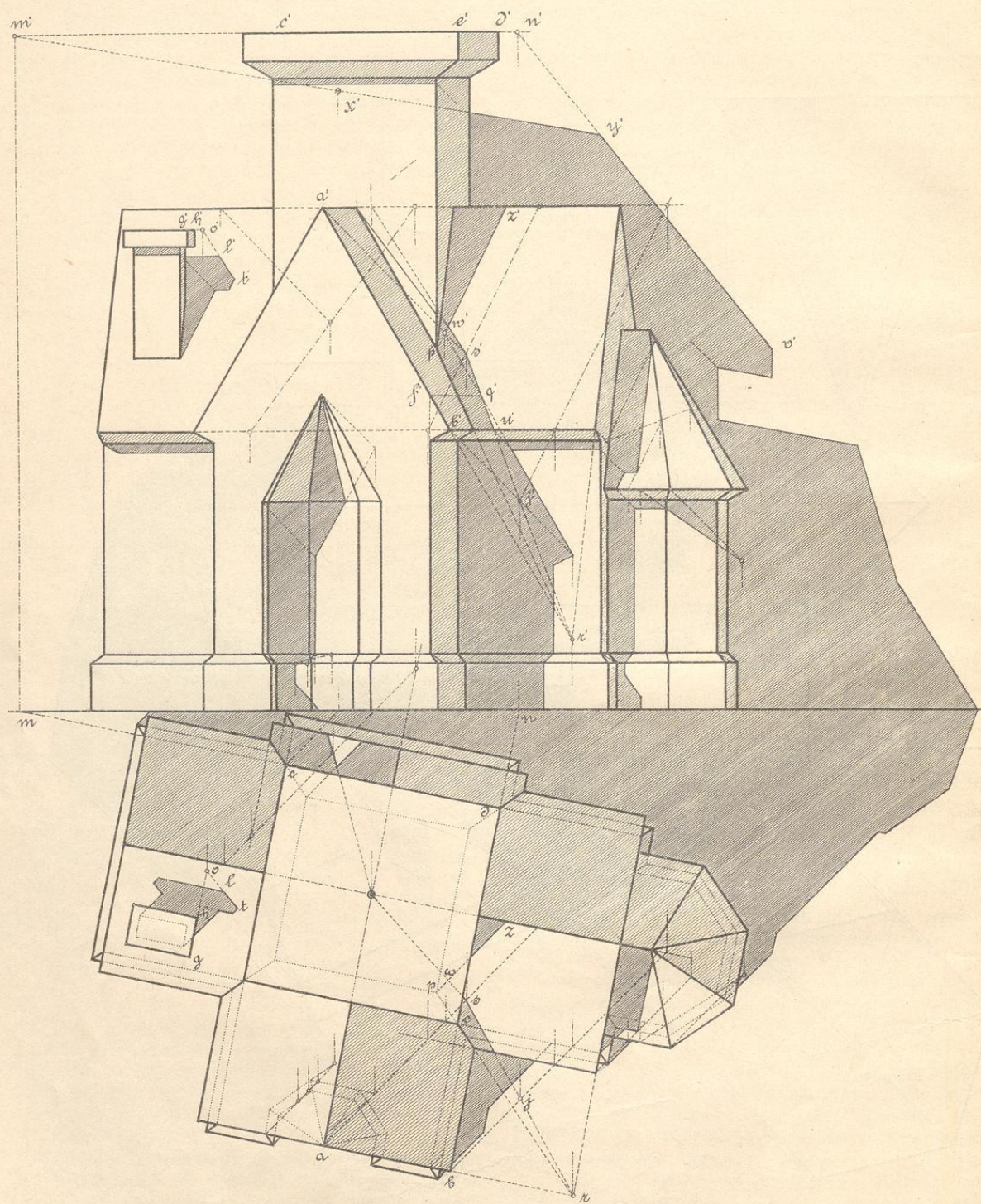
Die unmittelbare Bestimmung der Linie $r'v'$ mit Hilfe von rr' wäre die strenge Durchführung des zuvor erklärten Verfahrens ohne die im gegebenen Beispiel mögliche Abkürzung gewesen.

Die Figuren 18b und 18c, welche schwierigere Beispiele darstellen, erklären sich durch die Konstruktionslinien, welche in der ersten vollständig, in der zweiten wenigstens für die wichtigeren Punkte eingetragen sind. Figur 18c bietet einen Fall der früher in Art. 15 erwähnten Umgehung spitzwinkliger Liniendurchschnitte, indem beim Aufsuchen des Schattens ss' der vorderen Giebelspitze aa' auf der langseitigen Dachfläche nicht die steile Kehllinie zwischen beiden Dächern, sondern die Verlängerung der langseitigen Trauflinie benützt ist. Ebenso ist beim Aufsuchen des Schattens jj' der unteren Giebelecke bb' auf der Erweiterung der langseitigen Dachfläche nicht die steile Randlinie der letzteren, sondern die Verlängerung ihrer Firstlinie benützt.

Selbstverständlich wird man die in Figur 18b zu grösserer Anschaulichkeit vollständig gezeichneten Schnittpolygone in der praktischen Verwertung des Verfahrens nur bruchstückweise, soweit sie sich als notwendig vermuten lassen, in die Zeichnung aufnehmen.



Figur 18 b.



Figur 18 c.

19. Die Umkehrung der in Art. 18 erklärten allgemeinen Lösung.

Alle Lösungen, die bisher für Schatten auf ebenen Figuren und Körpern mit ebenen Flächen gezeigt wurden, lassen sich auch in der Weise durchführen, dass zum Schneiden des beschatteten Gebildes nicht die vertikale Ebene des Lichtstrahls gewählt wird, sondern die unter 45° geneigte, die ihn auf die vertikale Grundebene projiziert (die sogenannte vertikalprojizierende Ebene). Man erhält dann die Schnittpolygone im Grundriss anstatt im Aufriss, und der Schattenpunkt erscheint zuerst im Grundriss. Diese Lösung ist nichts anderes als eine Umkehrung des allgemeinen Verfahrens mit Vertauschung von Horizontal- und Vertikalprojektion; sie ist etwa vorzuziehen, wenn man die Schatten nur im Grundriss braucht. Da jedoch weitaus in den meisten Fällen die Benützung der vertikalen Schnittebenen näher liegt, so mag die Lösung mit diesen auch fernerhin als die „allgemeine“ für Schatten auf Polyedern bezeichnet werden.

Noch eine zweite Abänderung der allgemeinen Lösung erscheint in der Benützung der später zu erklärenden Seitenprojektion anstatt des Grundplans und der seitlich projizierenden Ebenen der Lichtstrahlen anstatt der vertikalen. Diese Lösung wird beizuziehen sein, wenn etwa das zu schattierende Gebilde nur durch Aufriss und Seitenprojektion gegeben ist, so dass die allgemeine Lösung das Zeichnen eines Grundplans erfordern würde. Ein weiterer Fall ist geboten bei prismatischen und cylindrischen Körpern parallel zum Grundschnitt, worüber auf Kap. IV zu verweisen ist.

20. Schlagschatten eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche auf einem Vielflach.

Man bestimmt in später zu erklärender Weise die Kurve, welche auf dem schattenwerfenden Körper die Grenze von Lichtfläche und Körperschattenfläche darstellt. Der nach Art. 17 zu konstruierende Schlagschatten dieser Kurve auf dem Vielflach ist zugleich die Grenze des Schlagschattens, den der Körper auf das Vielflach wirft.

21. Hilfssätze für die Schatten auf Körpern mit ebenen Flächen.

Beim Aufsuchen der Schattengrenzen auf Polyedern (und zum Teil auch andern Körpern) gelangen fortwährend folgende Sätze zur Verwertung, indem sie entweder als Konstruktionsmittel dienen oder Proben liefern. Eines Beweises bedürfen sie nicht.

a) Was im Schatten ist, kann keinen Schatten werfen. In keiner Schattengrenze kann ein Punkt oder eine Kante als schattenwerfend auftreten, der oder die ringsum von Körperschatten oder Schlagschatten umgeben ist.

b) Punkte und Kanten, die ringsum von Lichtflächen umgeben sind, können ebenfalls keine Schatten werfen. Nur die Grenzlinien zwischen Licht- und Körper-

schatten erscheinen als schattenwerfend in den Schlag-schattengrenzen.

c) Der Schatten einer geraden (oder gekrümmten) Linie auf einer Ebene (oder anderen Fläche) beginnt da, wo die Linie mit der Fläche zusammentrifft. Dieser selbstverständliche Satz bietet willkommene Proben besonders dann, wenn der Schnittpunkt nicht unmittelbar am Gebilde vorliegt, sondern Linie und Fläche räumlich getrennt liegen, in welchem Fall das Gerichtetsein der Linie nach dem Schnittpunkt nicht unmittelbar aus dem Bild herausgeföhlt wird.

So läuft z. B. in Figur 18c der Schatten der Kante cd auf der Vertikalebene, $x'y'$ nach dem Punkte m' , der den Schnittpunkt dieser Kante mit der Vertikalebene darstellt; ebenso läuft $v'y'$ nach n' , dem Schnittpunkt von $e'd'$ mit der Vertikalebene. Am Körper selbst läuft $z'w'$ nach p' und $s'u'$ nach r' , dem Schnittpunkt der Kante $a'b'$ mit der langseitigen Dachfläche. Für den Schatten des Kamins auf der Dachfläche bestimmt sich leicht oo' als Schnittpunkt der Kante gh mit der Dachfläche; nach diesem Punkt muss in Grundriss und Aufriss der Schatten dieser Kante tl laufen.

d) Der Schatten einer Geraden auf jeder ihr parallelen Ebene ist eine Parallellinie. So ist z. B. in Figur 18c der Schatten der Giebelkante $a'b'$ auf der Langwand dieser Kante parallel; die linke geneigte Kante der Nische in der Giebelwand hat auf der vertikalen Rückwand der Nische einen parallelen Schatten und ebenso die rechte Giebelkante der langseitigen Dachfläche auf der ersten Chor-Dachfläche einen parallelen Schatten in Grundriss und Aufriss.

e) Die Schattenstücke einer Geraden auf zwei verschiedenen Ebenen treffen sich auf der Schnittlinie dieser Ebenen. Auch dieser Satz, selbstverständlich wenn die Ebenen am Gebilde selbst sich schneiden, liefert oft willkommene, nicht sofort in die Augen springende Proben, wenn die Ebenen räumlich getrennt liegen. In Figur 18c ist z. B. $f'q'$ die Schnittlinie der vertikalen Langwand mit der langseitigen Dachfläche. Die Giebelkante $a'b'$ wirft getrennte Schattenstücke auf diese beiden Ebenen. Dasjenige auf der vertikalen Wand muss verlängert nach q' als dem Schnittpunkt von $f'q'$ und $s'u'$ laufen.

f) Wenn der Schatten einer Geraden am Rand einer Ebene aufhört, um auf einer anderen getrennt liegenden Ebene sich fortzusetzen, so liegen die Endpunkte beider Schattenstücke auf einem Lichtstrahl. Das heisst sie liegen in beiden Projektionen auf einer Linie von 45° Neigung. So liegen z. B. in Figur 18a die Punkte l und p , in Figur 18b die Punkte g' und h' , ferner i' und l' auf einem Lichtstrahl, und besonders häufig findet sich die genannte Probe in Figur 18c, wofür mehrere Linien eingezeichnet sind.

g) Der Schatten einer senkrecht zur Vertikalebene gerichteten Geraden auf einem Vielflach (und auf jedem andern Körper) fällt im Aufriss mit der Lichtstrahlprojektion zusammen, ist also immer eine gerade Linie von 45° Neigung.

Ebenso fällt der Schatten einer Vertikallinie auf jedem Körper im Grundriss mit der Lichtstrahlprojektion zusammen.

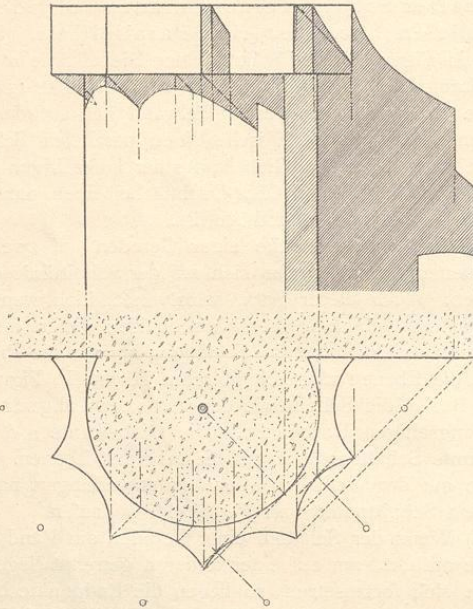
h) Eine gerade Linie parallel zum Querschnitt hat auf jeder Ebene parallel zum Querschnitt einen horizontalen Schatten im Grundriss und Aufriss. (Besonderer Fall von d.)

i) Eine vertikale Gerade wirft auf jede vertikalstehende Ebene einen vertikalen Schatten. Der Schatten einer Geraden, die senkrecht zur Vertikalebene steht, ist auf jeder zur Vertikalebene senkrecht stehenden Ebene ebenfalls senkrecht zur Vertikalebene. (Besondere Fälle von d.)

k) Der Schatten einer parallel zum Querschnitt liegenden Geraden auf einer Ebene normal zum Querschnitt ist unter 45° geneigt.

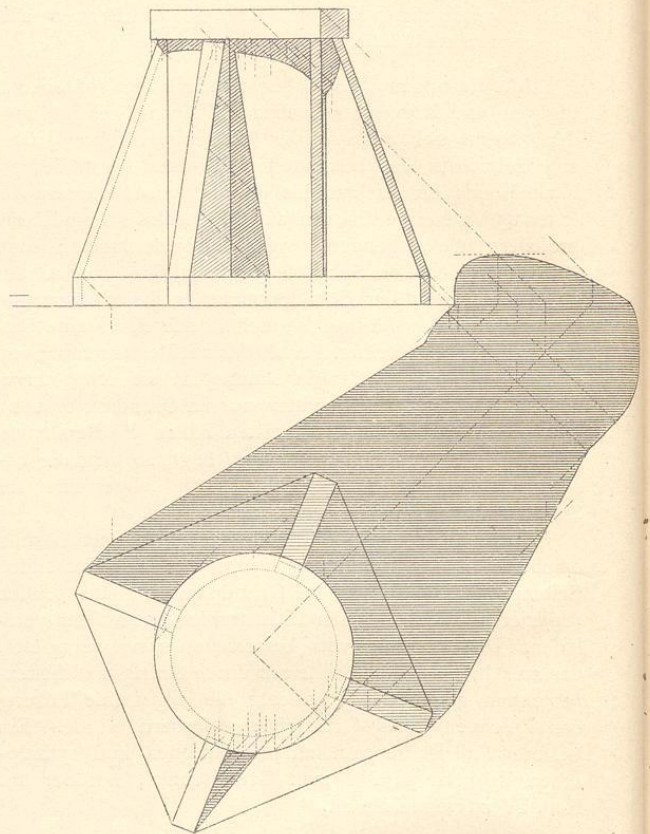
22. Schatten auf vertikalstehenden prismatischen und cylindrischen Flächen.

Die Anwendung der in Art. 18 beschriebenen allgemeinen Lösung für Schatten auf ebenbegrenzten Körpern auf diesen besonderen Fall gestaltet sich sehr einfach, indem für jeden schattenwerfenden äusseren Punkt die Schnittlinie der Vertikalebene des Lichtstrahls mit der be-

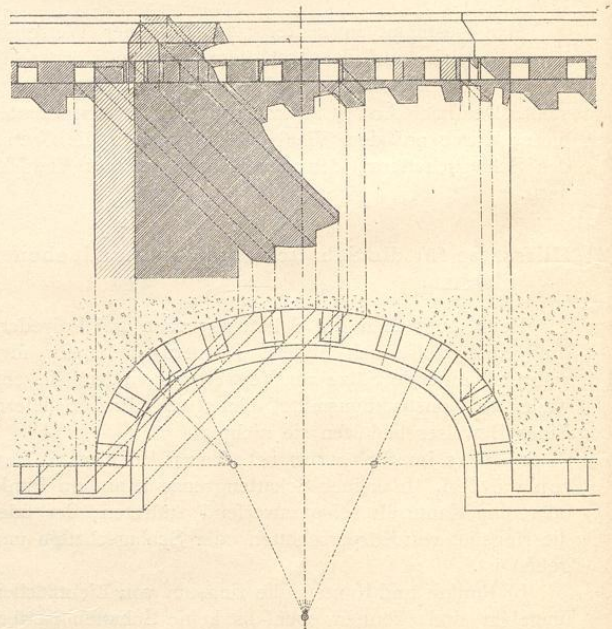


Figur 22a.

schatteten Fläche eine vertikale Gerade wird, die im Grundriss als ein Punkt vorhanden ist, sobald die Lichtstrahlprojektionen gezogen sind. Cylindrische Flächen, obgleich gekrümmt, können hier einbezogen werden, indem der Cylinder als ein Prisma von sehr vielen kleinen Seiten aufgefasst wird und als Schnittlinie mit der Vertikalebene des Lichtstrahls ebenfalls eine vertikale Gerade, nämlich eine Mantellinie des Cylinders, erscheint. Die Körperschattengrenze auf dem Cylinder ist die Mantellinie durch den Berührungspunkt des als Tangente am Cylinder im Grundriss gezogenen Lichtstrahls.



Figur 22b.

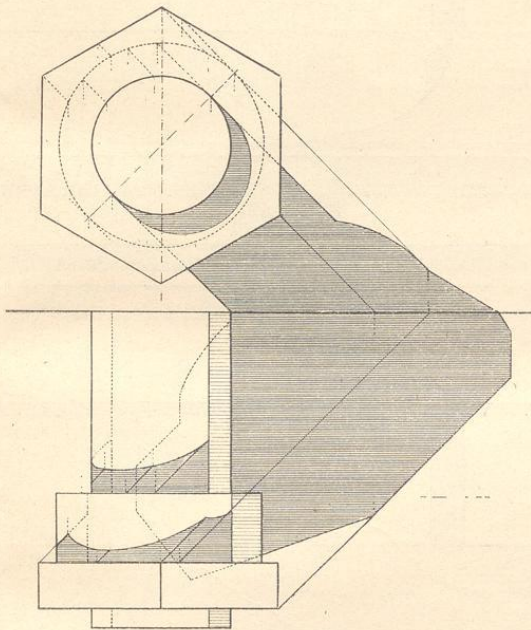


Figur 22c.

Die 3 Beispiele, Figuren 22a, 22b, 22c, erklären sich durch die für einige Schlagschattenpunkte und die Körperschattengrenzen eingezeichneten Lichtstrahlen.

23. Schatten auf prismatischen und cylindrischen Flächen senkrecht zur Vertikalebene.

Wenn man die allgemeine Lösung für Schatten auf eben begrenzten Körpern auf diesen besonderen Fall anwendet, so findet sich, dass im Aufriss die Schnittlinien, welche die Vertikalebenen des Lichtstrahls mit den Grenzflächen bilden sollen, mit dem Umriss des beschatteten Körpers zusammenfallen. Man erhält nun zwar trotzdem die Schattenpunkte im Aufriss und kann sie auf den Lichtstrahl im Grundriss hinunterloten; doch wird dieses Verfahren einfacher erklärt als die in Art. 19 beschriebene Umkehrung der allgemeinen Lösung, entstanden durch Vertauschung von Horizontal- und Vertikalprojektion, wo-



Figur 23.

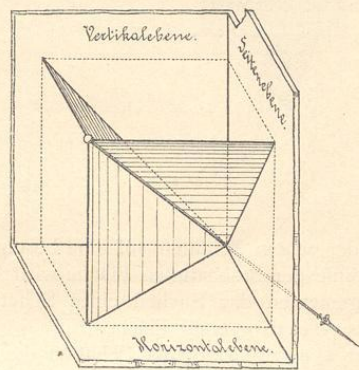
nach die vertikalprojizierenden Ebenen der Lichtstrahlen als Schnittebenen des beschatteten Körpers auftreten. Auch die hiehergehörigen Probleme lösen sich äusserst einfach; Figur 23 erklärt sich durch die Lichtstrahlen, die für einige Schlagschattenpunkte und die körperschattenabgrenzenden Mantellinien der Cylinder gezogen sind.

IV. Schatten auf prismatischen und cylindrischen Flächen parallel zum Grundschnitt.

24. Grundlagen aus der darstellenden Geometrie.

Als neues Element aus der darstellenden Geometrie erscheint für die hieher gehörigen Lösungen die „Seiten-

projektion“ der Körper, auch „Seitenriss“ und „Kreuzriss“ genannt. Ausser den früher besprochenen Projektionen auf eine horizontale und vertikale Grundebene benützt nämlich die darstellende Geometrie zuweilen auch die Projektion auf eine dritte Grundebene, welche senkrecht zum Grundschnitt steht, eben die Seitenprojektion oder Seitenansicht der Körper. Sie zeigt den Körper so, wie er von der Seite, entweder von der linken oder von der rechten Seite, aus unendlicher Entfernung gesehen erscheinen würde; im ersten Fall denkt man sich die Seitenebene rechts vom Körper, im zweiten links. Die Projektionslote sind dabei parallel zum Grundschnitt. In der Seitenprojektion müssen alle Punkte gleich hoch liegen wie im Aufriss, und mit denselben horizontalen Entfernungen voneinander auftreten, die sie im Grundriss in der Richtung senkrecht zum Grundschnitt darbieten. Es geht aus dieser Definition hervor, dass die Projektion des Lichtstrahls auch auf der Seitenebene unter 45° geneigt ist, und zwar ist sie in einer Ansicht des Körpers von der



Figur 24.

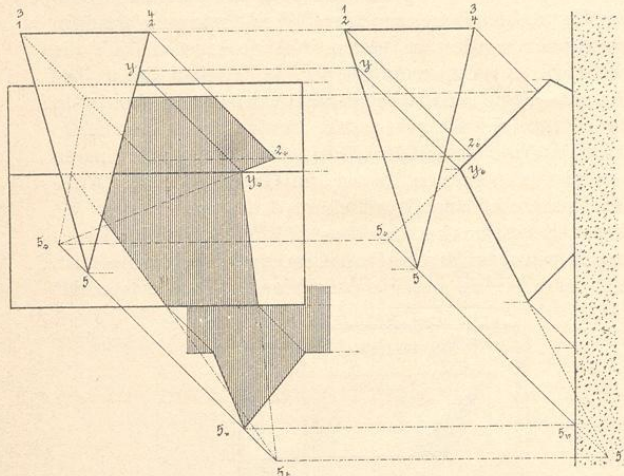
rechten Seite nach rechts unten geneigt. Figur 24 zeigt einen Lichtstrahl mit seinen drei projizierenden Ebenen perspektivisch: dabei ist die Seitenebene rechts angenommen.

Die allgemeine Lösung nicht der kürzeste Weg. 25. Benützung der Seitenprojektion.

Die zuletzt behandelte allgemeine Lösung für Schlagschatten von Polyedern auf Polyedern ist zwar auch möglich für den besonderen Fall, dass der beschattete Körper prismatisch oder cylindrisch und parallel zum Grundschnitt ist. Aber die allgemeine Lösung bildet nicht den kürzesten Weg für diesen besonderen Fall, indem die Schnittlinie der vertikalen Ebene des Lichtstrahls mit der beschatteten Fläche eine gebrochene Linie oder Kurve, mit einer andern Schnittebene dagegen weit einfacher wird. Daher folgende bessere Lösung: Man zeichnet die Seitenprojektion der beiden Körper, zieht durch jeden schattenwerfenden Punkt einen Lichtstrahl im Aufriss und in der Seitenprojektion und betrachtet die unter 45° geneigte Ebene, die den Lichtstrahl auf die Seitenebene projiziert. Die Schnittlinie dieser Lichtstrahlenebene mit der beschatteten

Fläche ist eine horizontale Gerade und in der Seitenprojektion als ein Punkt vorhanden; sie kann durch die Reißschiene in den Aufriss hinüber liniert werden. Wo sie geschnitten wird vom Aufriss des Lichtstrahls, da ist der Schattenpunkt.

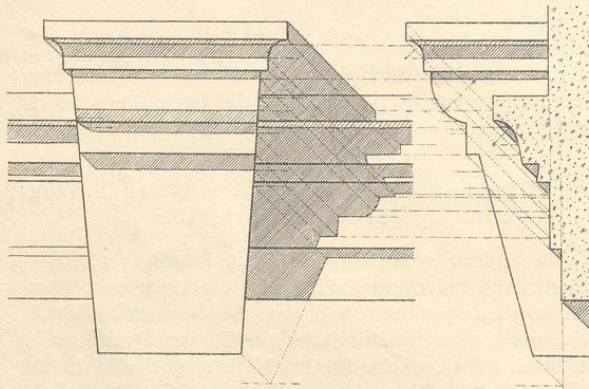
Das Verfahren lässt sich auch derart umkehren, dass derjenige Punkt einer schattenwerfenden Kante ge-



Figur 25 a.

sucht wird, der seinen Schatten auf eine bestimmte Kante oder Mantellinie der beschatteten Fläche wirft; es erspart dies im allgemeinen das Suchen eines Schattenpunktes auf der Erweiterung einer Fläche.

In Figur 25a wird z. B. der Schatten des Punktes 2 erhalten durch Aufsuchen des Punktes in der Seiten-

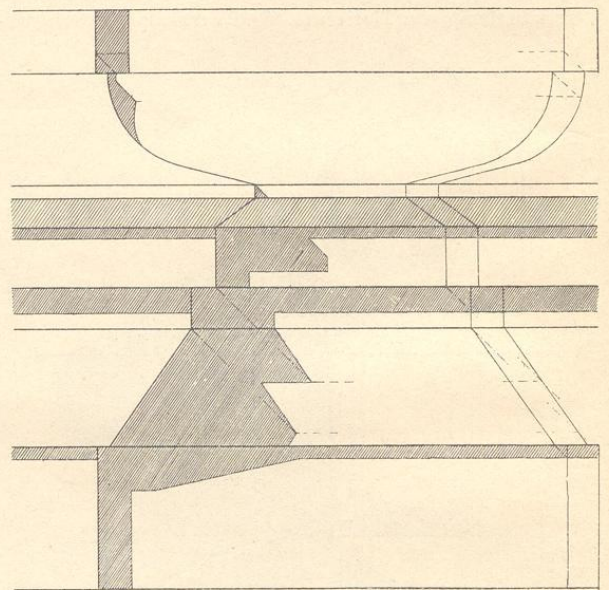


Figur 25 b.

projektion, Ziehen des Lichtstrahls in der Seitenprojektion bis zum Schnitt mit der oberen Prismenfläche in $2''$ und horizontales Hinüberlinieren auf den Lichtstrahl im Aufriss nach $2'$. Der Schatten der Pyramidenspitze 5 auf der Erweiterung der oberen Prismenfläche wird erhalten durch Rückwärtsziehen des Lichtstrahls in der Seitenprojektion bis $5''$ und Hinüberlinieren dieses Punktes auf den im

Aufriss rückwärts verlängerten Lichtstrahl nach $5'$. Die Pyramidenkante $2-5$ wirft also auf die obere Prismenfläche den Schatten $2''-5''$; von diesem ist jedoch nur das Stück $2''-y''$ wirklicher Schatten.

Anstatt den Punkt $5''$ zu bestimmen, hätte man sich auch fragen können: „Welcher Punkt der Pyramidenkante $2-5$ wirft seinen Schatten auf die vordere Kante des Prismas?“ Der gesuchte Schattenpunkt ist in der Seitenprojektion der Kante, also im Punkt y'' schon vorhanden; der durch diesen Punkt rückwärts gezogene Lichtstrahl liefert in der Seitenprojektion als Schnitt mit der Kante $2-5$ den schattenwerfenden Punkt y ; dieser giebt in den Aufriss auf Kante $2-5$ hinüberliniert den schattenwerfenden Punkt y' im Aufriss und der Lichtstrahl durch diesen Punkt auf der Prismenkante den Schattenpunkt y'' im Aufriss. So hätte das Schattenstück $2''-y''$ auch ohne die Bestimmung

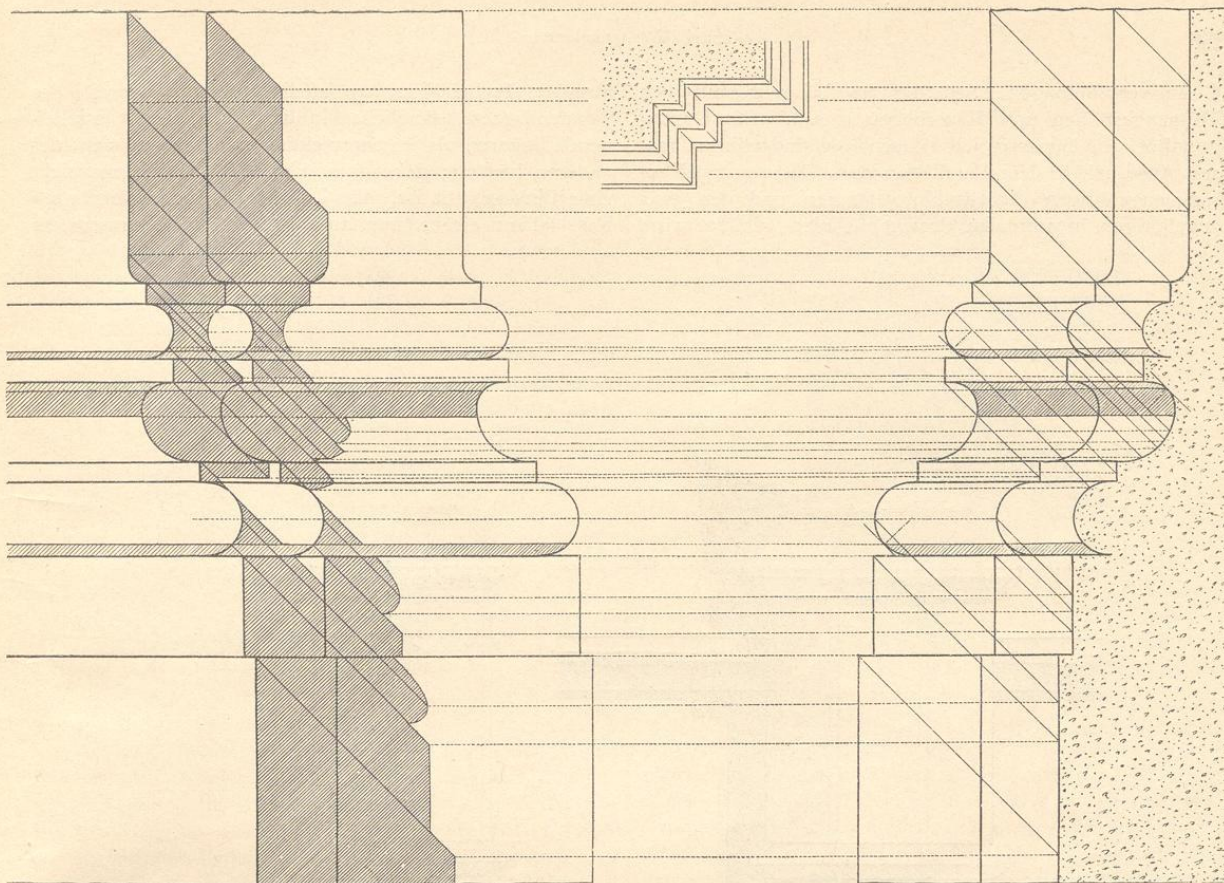


Figur 25 c.

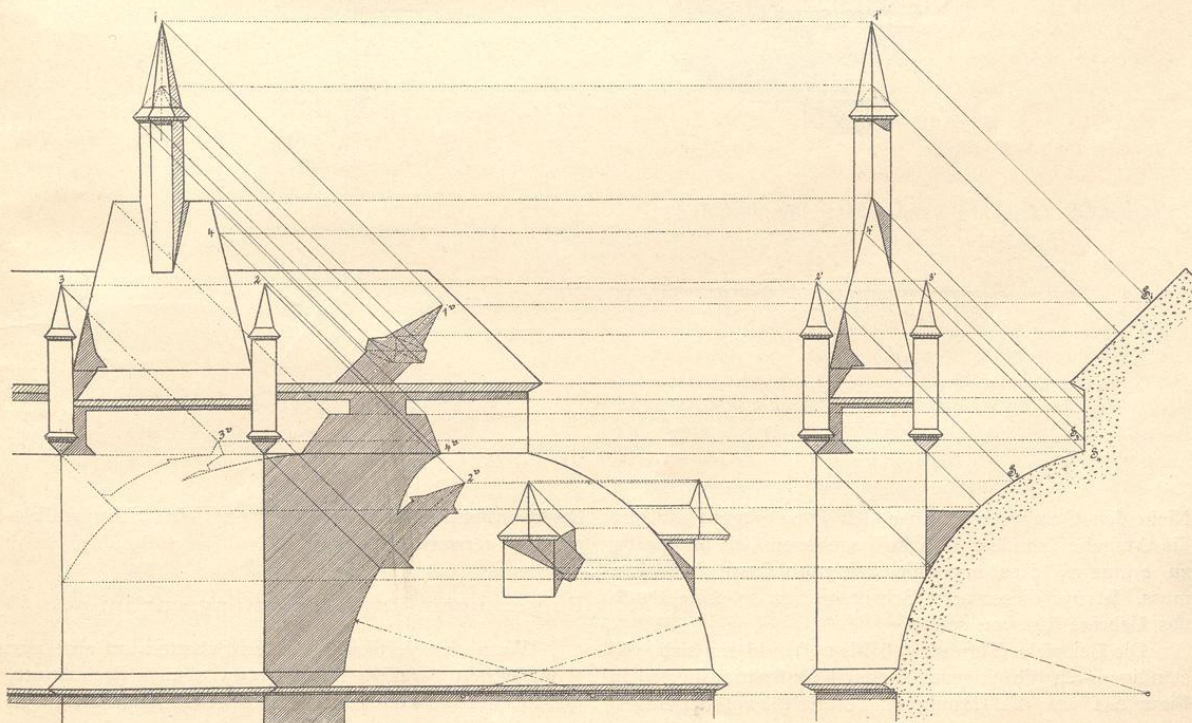
von $5''$ gefunden werden können, wenn auch weniger sicher. Die Verbindung beider Wege liefert eine Probe.

Wie in der Figur die Bestimmung des Schattens der Pyramidenspitze 5 auf der erweiterten unteren Prismenfläche in $5'$ die Fortsetzung des Schattens der Kante $2-5$ auf der unteren Prismenfläche geliefert hat, bedarf keiner Erklärung.

Obgleich eine Lösung für einen besonderen Fall der Gestalt und Lage der beschatteten Fläche, kann das beschriebene Verfahren doch ausserordentlich häufig beim Schattieren technischer Gebilde verwertet werden; denn überwiegend häufig erscheinen in diesen horizontale prismatische und cylindrische Flächen in der Längenschnitt, das heisst parallel zum Grundschnitt. Es gehören hieher die Schatten von Türmen, Giebeln, Fialen, Kaminen auf ebenen, gebrochenen und cylindrischen Dachflächen, ferner Schatten von Gesimsen und



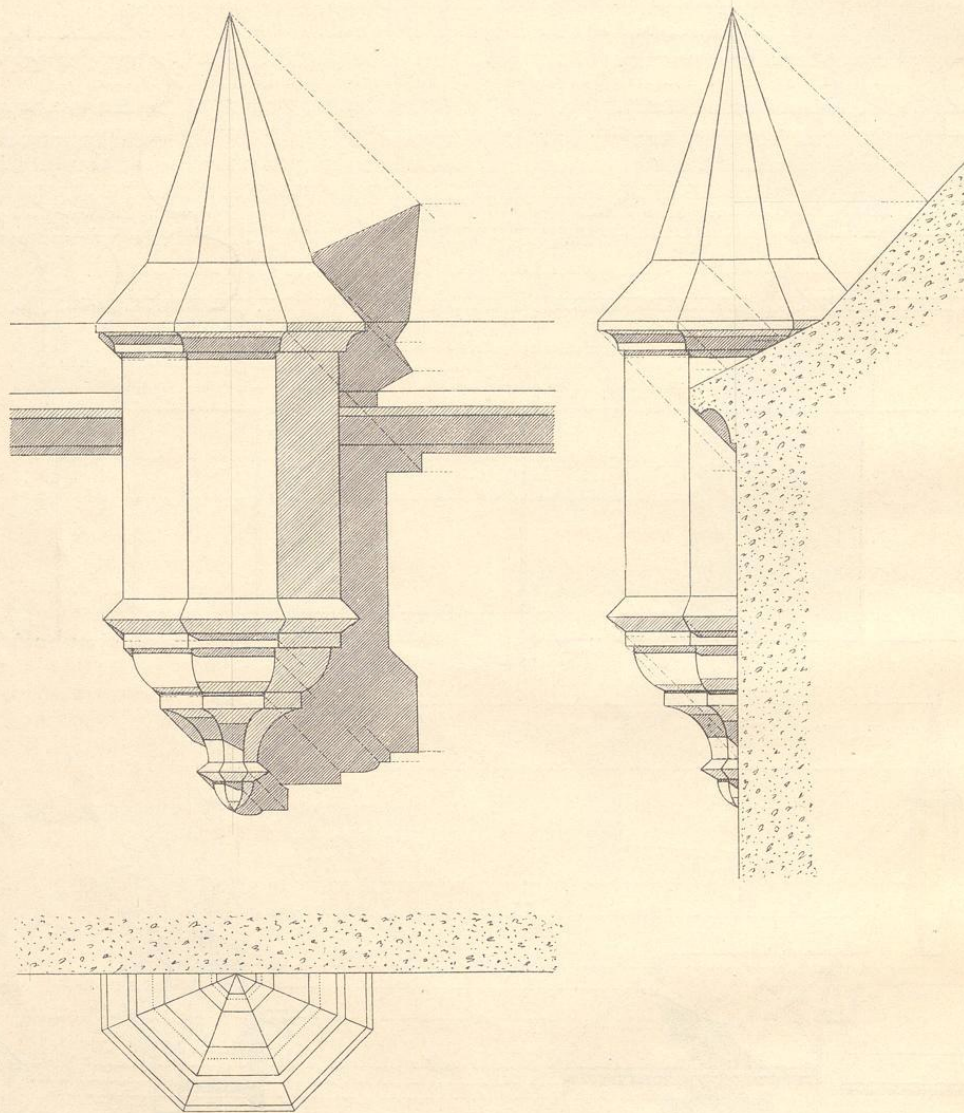
Figur 25 d.



Figur 25 e.

Gesimsverkröpfungen, Schatten im Längenschnitt von Tonnengewölben und Mauerbögen u. s. f. Die Lösung gestaltet sich immer gleich einfach; sie findet ihren ganzen Ausdruck in dem Parallelogramm, das von zwei zusammengehörigen Lichtstrahlprojektionen und den zwei zugehörigen horizontalen Projektionslinien gebildet wird.

aus Art. 18; bei Figur 24e ist die auf der Nebenseite des Tonnendaches befindliche, in der Seitenansicht erscheinende Lukarne als Seitenprojektion zur Vorderansicht der anderen benützt; dabei war jedoch, da die Seitenansicht eine Linksansicht ist, der Lichtstrahl von rechts nach links fallend einzuführen, so dass das Parallelogramm der



Figur 25 f.

Nicht den Gang der Lösung sich einzuprägen, ist hier die Aufgabe, sondern sich im gegebenen Fall rechtzeitig zu erinnern, dass man die Seitenprojektion beiziehen muss. Ist nur dieser erste Schritt gethan, so ergibt sich das Uebrige fast von selbst.

Die Beispiele (Figuren 25 b bis 25 f) erklären sich vollständig durch die eingezeichneten Konstruktionslinien; in Figur 24 f war die Lösung zu verbinden mit derjenigen

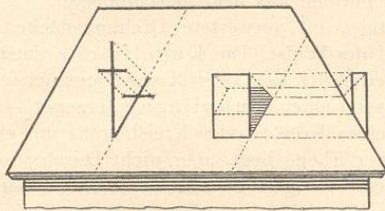
Rechtsansicht sich in ein Trapez, ein „Antiparallelogramm“, verwandelte.

Folgerungen für die Schattengrenzlinien.

26.

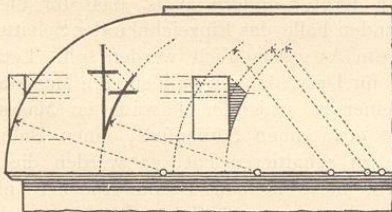
Wenn eine Vertikallinie ihren Schatten auf eine zum Grundschnitt parallele Ebene, etwa eine in der Längenschnitt gezeichnete Dachfläche wirft (Figur 26 a), so er-

giebt folgende Betrachtung, dass der Schatten dieser Vertikallinie eine gerade Linie wird mit derselben Neigung wie die der Ebene. Denkt man sich den Grundriss, so erscheint in diesem der Schlagschatten als Linie mit einem Winkel von 45° gegen die Vertikalebene wie gegen die Seitenebene, also symmetrisch zu diesen beiden Grundebenen. Die Projektion der im Raum schräg ansteigenden Schattenlinie muss also auf der Vertikalebene dieselbe Neigung darbieten wie auf der Seitenebene. Auf dieser fällt aber die Projektion der Schattenlinie zusammen mit derjenigen der Dachfläche, also muss auch die Vertikalprojektion der Schattenlinie dieselbe Neigung zeigen wie die Dachfläche in der Seitenprojektion, oder, was dasselbe ist, wie die Dachfläche im Raum.



Figur 26a.

Dieselbe Bemerkung gilt für eine gebrochene oder Mansardendachfläche; auf jeder Teilebene einer solchen erscheint der Schatten der vertikalen Geraden im Aufriss mit der Neigung, welche die Teilebene selbst hat. Ebenso ist der Schatten einer solchen Geraden auf einem cylindrischen Dach, das parallel zum Grundschnitt liegt, im Aufriss dieselbe gekrümmte Linie wie der Querdurchschnitt des Daches, also bei einem kreiscylindrischen Dach ein Kreisbogen vom gleichen Radius (Figur 26b). Horizontale Linien parallel zur Dachfirstlinie werfen immer einen horizontalen Schatten auf ein in der Längsansicht gezeichnetes Dach, sei es eben oder cylindrisch. Ein vertikalstehendes Kreuz wirft also den Schatten nach Figur 26a oder 26b. Diese Folgerungen sind hier hervorzuheben, weil viel dagegen gefehlt wird.

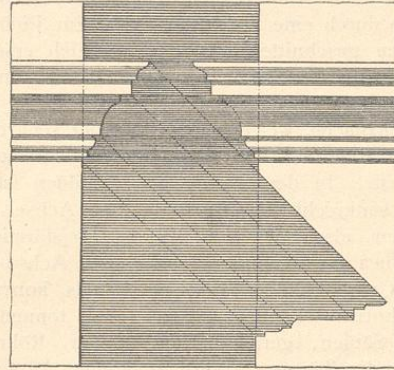


Figur 26b.

Aus der Symmetrie des Lichtstrahls gegen Vertikalebene und Seitenebene ergibt sich ferner, dass der Schatten einer vertikalen Kante auf einem in der Längsansicht gezeichneten Gesims dieselbe Linie bildet wie das Profil des Gesimses, nur nach links umgelegt und unterbrochen durch die fortlaufenden Streifen von Körper- und Schlagschatten des Gesimses. Bei der Gesimsverkröpfung, Fig. 26c, wirft die obere Wandkante einen

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

solchen Schatten, wogegen die Gesimsecke ihren Schatten tiefer wirft und nach Art. 13 zu behandeln war. Auch gegen diese Folgerung wird oft gefehlt. Wenn der Vorsprung der einen Mauer über die andere nur klein ist,



Figur 26c.

so greifen übrigens beide Schattenprofile übereinander; die Lösung wird dann komplizierter und verlangt die Benützung der Seitenprojektion, wofür die Figuren 25c und 25d Beispiele darbieten.

Die Benützung der Seitenprojektion anstatt des Grundplans ist — wie schon oben ausgesprochen — auch für andere Körper als Prismen und Cylinder parallel zum Grundschnitt möglich, und zwar können hiebei als Schnittebenen des beschatteten Körpers sowohl die seitlich projizierenden als die vertikal projizierenden Ebenen der Lichtstrahlen benützt werden. Doch liegt ein Grund zu dieser Abänderung der allgemeinen Lösung für Schatten auf eben begrenzten Körpern nur etwa dann vor, wenn das Gebilde nur durch die genannten zwei Projektionen, nicht auch durch einen Grundriss gegeben ist.

V. Schatten auf gekrümmten Flächen. Allgemeine Lösung.

Definitionen aus der darstellenden Geometrie 27. und Beispiele technischer Verwertung.

Mit den nun bekannten Konstruktionen lassen sich die Schattengrenzen bestimmen für alle diejenigen Fälle, in welchen ein Körper mit ebenen Flächen einen Schatten wirft auf die Grundebenen, oder auf einen andern Körper mit ebenen Flächen, oder auf sich selber. Nicht minder häufig als diese Schatten erscheinen in den Darstellungen technischer Gebilde solche auf gekrümmten Flächen, insbesondere auf Cylinderflächen, Kegelflächen und Drehungsflächen. Der früheren Ankündigung entsprechend sind die Definitionen für diese Flächen als Repetition der Grundlagen aus der darstellenden Geometrie kurz einzuschalten.

Eine Cylinderfläche entsteht, wenn eine Gerade längs einer gekrümmten Linie, die nicht in derselben

Ebene liegt, parallel fortschreitet; jede Lage der Geraden bildet eine Mantellinie oder Erzeugende des Cylinders; die gekrümmte Linie heisst die Leitlinie; in der Folge wird aber unter Leitlinie eines Cylinders nur diejenige gekrümmte Linie zu verstehen sein, nach welcher die Fläche durch eine Ebene senkrecht zur Richtung der Mantellinien geschnitten wird. Gewöhnlich erscheint in den technischen Gebilden der gerade Kreiscylinder, das heisst der Cylinder, dessen Leitlinie ein Kreis ist. Die ebene Grenzfläche, welche einen Cylinder senkrecht oder schief zur Richtung der Mantellinien begrenzt, heisst dessen Basis. In den technischen Gebilden ist sie gewöhnlich senkrecht zur Richtung der Achse und der Mantellinien, also beim Kreiscylinder kreisförmig. Jeder Schnitt eines Kreiscylinders schief zur Achse ist eine Ellipse. Cylinderflächen erscheinen teils konvex, teils konkav, horizontal oder vertikal, bei tonnenförmigen Dächern, Säulen, geraden Rundstangen, Röhren, Gesimsen, runden Türmen, Erkern, Balkonen, Aussenmauern und Innenräumen mit kreisförmigem Grundriss, Brückenpfeilern, Mauerbögen, Tonnengewölben u. s. f.

Eine Kegelfläche entsteht, wenn eine gerade Linie derart fortschreitet, dass sie einerseits immer durch denselben Punkt geht, andererseits an einer gekrümmten Linie gleitet, die mit dem Punkte nicht in derselben Ebene liegt. Der Punkt heisst die Spitze des Kegels; jede Lage der Geraden heisst eine Mantellinie. Eine ebene Grenzfläche, welche den Kegel abschliesst, heisst seine Basis. Gewöhnlich erscheint in den technischen Gebilden der gerade Kreiskegel, das heisst der Kegel, dessen Basis kreisförmig ist und dessen Spitze sich auf dem Lot im Mittelpunkt der Basis befindet. Das Lot heisst die Achse des Kegels. Der Schnitt eines Kreiskegels schief zur Achse liefert als Schnittlinie entweder eine Ellipse, oder eine Parabel, oder eine Hyperbel. Kegelflächen erscheinen in den technischen Gebilden teils konvex, teils konkav, mit vertikaler oder horizontaler Achse, bei runden Turmdächern, Umrahmungen von mittelalterlichen Fenstern und Thüren, bestimmten Gewölbformen, z. B. den sogenannten Stichkappen, Decken über kreisförmigen Räumen, Gesimsen auf cylindrischen Wandflächen, Gussteilen für Eisenkonstruktionen, bei zahlreichen kunstgewerblichen Gegenständen, bei runden Böschungen der Bahn- und Strassendämme oder Ufermauern und endlich bei vielen Formen im Maschinenbau.

Eine Drehungsfläche entsteht, wenn irgend eine gekrümmte oder gebrochene Linie um eine Gerade gedreht wird. Die Gerade heisst die Achse der Drehungsfläche. Jeder Punkt der gedrehten Linie beschreibt einen Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Drehungsachse steht und der ein Parallelkreis genannt wird. Legt man durch die Achse eine Anzahl Ebenen, so schneiden diese die Drehungsfläche nach gekrümmten oder gebrochenen Linien, die alle kongruent sind; jede solche Linie heisst ein Meridian der Drehungsfläche. Der Schnitt durch eine Ebene parallel oder schief zur Achse liefert im allgemeinen eine Kurve höherer Ordnung. — Drehungsflächen erscheinen in den technischen Gebilden teils konvex, teils konkav, teils mit konvexen Parallelkreisen bei

konkavem Meridian, teils mit konkaven Parallelkreisen bei konvexem Meridian. Die Achse steht entweder vertikal oder senkrecht zur Vertikalebene oder parallel zum Grundschnitt; schiefgerichtete Drehungsflächen liefern sehr zeitraubende Probleme, sind aber selten. Beispiele von Drehungsflächen bilden Säulenfüsse und Kapitäle, überhaupt Gesimse auf cylindrischen Wandflächen, Kuppeldächer und Kuppelräume, bogenförmige Umrahmungen von Fenstern und Thüren, bogenförmige Nischen, Masswerke der gotischen Hochfenster und Rosenfenster, Baluster und Kandelaber, verzierte Dachspitzen, gedrehte Knäufe und Rosetten, bogenförmige Röhren, Füsse und andere Stützenformen an Mobilien, überhaupt alle Arbeiten des Drehers, Vasen und Gefässe aller Art und zahlreiche Formen aus dem Maschinenbau.

Wichtige, oft verwertete Drehungsflächen sind die Kugel und der Wulst. Die Kugelfläche entsteht durch Drehung eines Kreises oder Kreisbogenstücks um einen Durchmesser; eine Wulstfläche erzeugt sich durch Drehung eines Kreises oder Kreisbogens um eine Achse, die in seiner Ebene liegt, aber nicht Durchmesser ist.

Von den übrigen gekrümmten Flächen sind es nur etwa noch Wendelflächen und Schraubenflächen, die in der Technik Verwertung finden, nicht nur bei Schraubengewinden flachgängig oder scharfgängig, sondern auch bei Wendeltreppen und überhaupt Treppen mit gekrümmtem Lauf; doch sind solche Gebilde selten ausführlich zu schattieren, abgesehen etwa von grossen Schrauben in Maschinenzzeichnungen. Konoidische Flächen erscheinen bei bogenförmiger Durchbrechung von kreisförmigen Mauern; Röhrenflächen und Rückungsflächen sind verwirklicht in Gesimsformen, Gewölbformen, kunstgewerblichen und maschinentechnischen Gebilden u. s. f. Die Definitionen dieser seltener verwerteten Flächen folgen später. Andere gesetzmässig gekrümmte Flächen als die genannten dürften an den technischen Gebilden nur sehr selten zu finden sein.

Der Zweck des Studiums der Schattenkonstruktionen ist nicht nur der, dass man die zur vollkommenen Darstellung nötigen Schatten auf solchen Flächen konstruieren lernt, sondern auch, dass für die häufiger vorkommenden Fälle das Einzeichnen der Schattengrenzen aus freiem Auge möglich werden soll. Letzteres gilt besonders für Darstellungen im kleineren Massstab. Wenn man an einer zu malenden Fassade im Massstab 1:50 oder 1:20 etwa einen Säulenfuss, einen Baluster oder eine Vase zu schattieren hat, so werden die Schattengrenzen für diese kleinen Drehungsflächen nicht konstruiert, sondern nur nach Schätzung eingetragen. Wer einige Uebung hat, der kann solche Schatten aus freiem Auge mit solcher Sicherheit einzeichnen, dass die graphische Konstruktion nur geringe Fehler nachweisen würde und die Schattierung für den Zweck der guten Anschaulichkeit, dem sie ja allein dienen soll, vollkommen genügt. Dazu gehört nur, dass man für wenige solcher Flächen die Schatten einmal wirklich konstruiert und das Resultat aufmerksam entstehen sehen hat. Diese Ausbildung des Gefühls für richtige Schattierung ist ein ebenso grosser Gewinn aus dem Studium der Schatten-

konstruktion, als das Wissen von den Verfahren, mit deren Hilfe man die Schattengrenzen finden kann. Dies zur Ermutigung, wenn sich in der Folge zeigen sollte, dass das Konstruieren der Schattengrenzen auf vielen gekrümmten Flächen unverhältnismässig viel Arbeit erfordert.

28. Allgemeine Lösung für Schatten auf gekrümmten Flächen.

Die Schatten auf gekrümmten Flächen sind wieder entweder Körperschatten oder Schlagschatten, geworfen von aussenstehenden Gebilden oder von Teilen des beschatteten Körpers selber.

Denkt man sich den Körper mit gekrümmter Oberfläche zunächst konvex, so wird eine Seite der Oberfläche von den Lichtstrahlen getroffen, die andere nicht. Zwischen beiden Flächenteilen muss eine Grenze bestehen, eben die Körperschattengrenze. Sie erscheint — wie schon früher ausgesprochen — bei runden Körpern dem Auge sehr verschwommen, indem der Uebergang von Licht zu Schatten durch zahllose feine Zwischenstufen vor sich geht, ist aber mathematisch betrachtet doch eine scharfe Linie. Sie bildet sich, wie leicht einzusehen — da, wo die Lichtstrahlen berührend am Körper vorbeistreichen; die Berührungspunkte sind eben die Punkte der Körperschattengrenze. Hierauf gründet sich die folgende Konstruktion dieser letzten:

Man schneidet den Körper durch eine Anzahl von Vertikalebene, die zur Lichtrichtung parallel stehen, also Lichtstrahlen enthalten und im Grundriss mit deren geradlinigen Projektionen zusammenfallen. Man sucht die gekrümmten Schnittlinien dieser Ebenen mit dem Körper in der Vertikalprojektion auf. Man zieht im Aufriss tangierende Lichtstrahlen an diese Schnittlinien, bestimmt die Berührungspunkte und verbindet sie durch eine stetige Kurve. Diese ist die Körperschattengrenze.

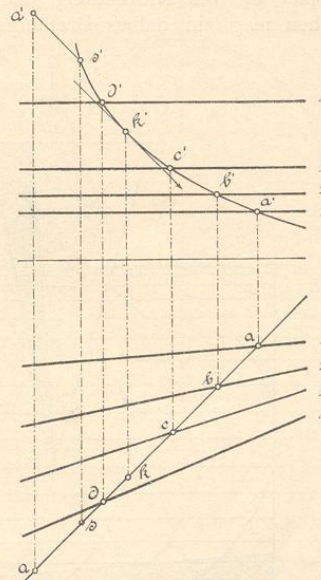
Ist der Schlagschatten eines äusseren Punktes auf einer gekrümmten Fläche zu suchen, so zieht man einen Lichtstrahl durch den Punkt, betrachtet die vertikale Ebene dieses Lichtstrahls und sucht die gekrümmte Schnittlinie dieser Ebene mit dem Körper im Aufriss auf. Wo der Aufriss des Lichtstrahls diese Kurve schneidet, da ist der Schlagschatten des Punktes. Diese Lösung ist nichts anderes als die Uebertragung der früher für Polyeder vorgeführten Konstruktion auf die runden Körper.

Das Aufsuchen der gekrümmten Schnittlinien im Aufriss gestaltet sich verschieden je nach der Art der beschatteten Fläche und ist nur durch Wahl bestimmter Arten von Flächen zu erklären.

29. Anwendung auf Regelflächen.

Ist die beschattete Fläche eine Regelfläche (das heisst durch irgend eine Bewegung einer geraden Linie erzeugt), so hat man nur die erzeugende Gerade in einer genügenden Zahl ihrer Lagen zu zeichnen und die Schnittpunkte jeder Schnittebene mit jeder Geraden aus dem Grundriss in den Aufriss hinaufzuloten. Sind in Fig. 29a

in den Geraden 1 2 3 4 vier Lagen der erzeugenden Geraden gezeichnet, so hat der im Grundriss gezeichnete Lichtstrahl die vier Schnittpunkte $a b c d$; deren Hinaufloten in den Aufriss nach $a' b' c' d'$ ergibt die Schnittkurve der Fläche mit der Lichtstrahlenebene; der Berührungspunkt k' des als Tangente im Aufriss gezogenen



Figur 29a.

Lichtstrahls ist ein Punkt der Körperschattengrenze im Aufriss; sein Hinunterloten auf den Lichtstrahlgrundriss nach k giebt den entsprechenden Punkt der Körperschattengrenze im Grundriss. Wirft ein äusserer Punkt aa' seinen Schatten auf die Fläche, so liefert nach Konstruktion der Schnittkurve der im Aufriss durch a' gezogene Lichtstrahl den Schlagschattenpunkt s' und dessen Hinunterloten auf den Lichtstrahlgrundriss den zugehörigen Grundrisssschlagschattenpunkt s .

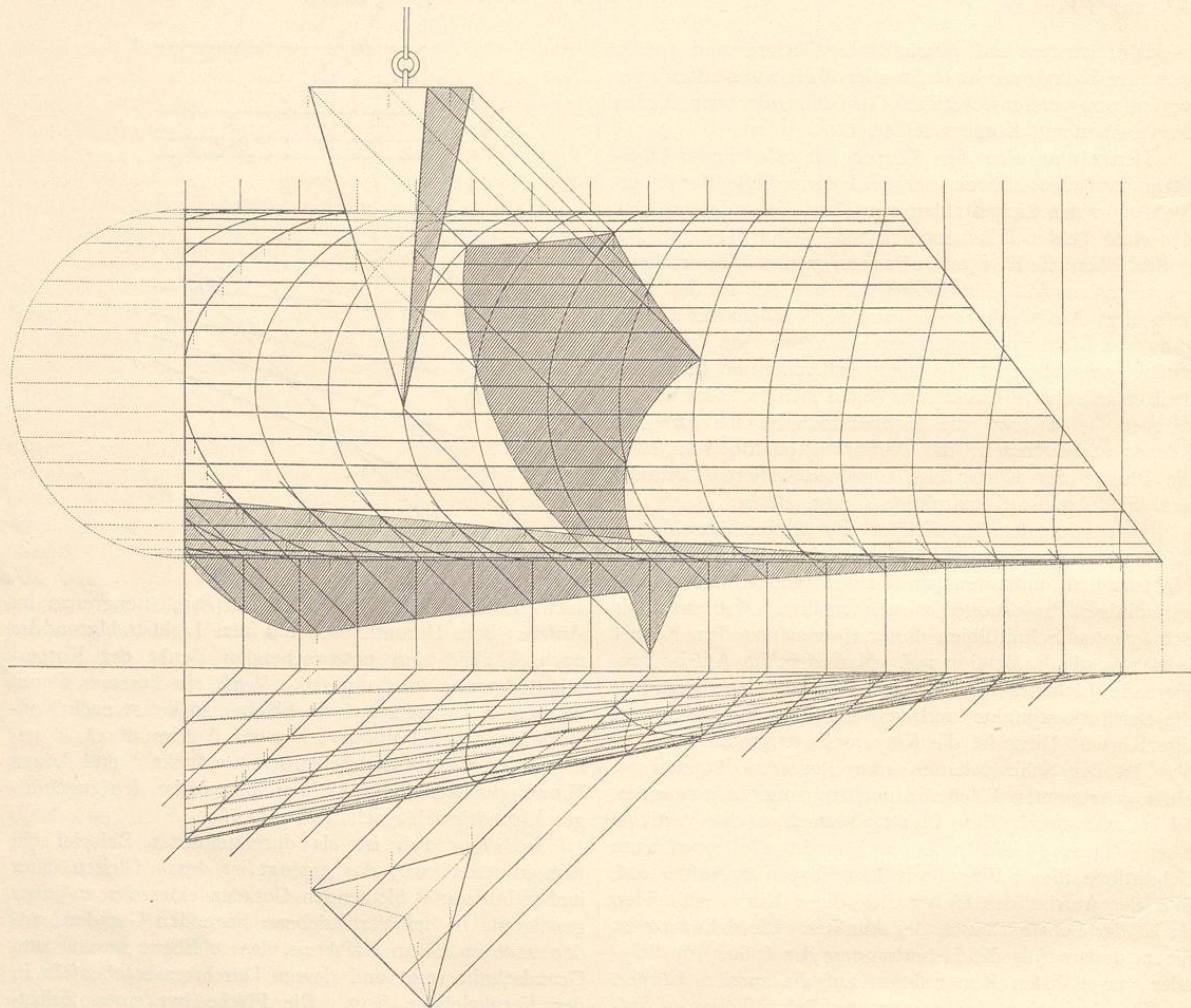
In Figur 29b ist als durchgeführtes Beispiel ein Konoid gezeichnet, das erzeugt ist durch Gleiten einer immer horizontal bleibenden Geraden einerseits an einer geneigten, in der Vertikalebene liegenden Geraden, andererseits an einem Halbkreis, dessen Ebene normal zum Grundschnitt steht und dessen Durchmesser ebenfalls in der Vertikalebene liegt. Die Fläche hat einen Selbstschatten und ist von aussen durch eine hängende Pyramide beschattet. Die Konstruktion erklärt sich durch die eingezeichneten Lichtstrahlen und Schnittkurven. Die Entfernungen der ersten im Grundriss wurden gleich gross angenommen; dies musste zur Folge haben, dass auch im Aufriss alle Mantellinien der Fläche durch die Schnittkurven in gleiche Teile geteilt wurden. Waren also zwei entfernte dieser Kurven durch Hinaufloten aus dem Grundriss abgeleitet, so mussten nur die zwischenliegenden Mantellinienstücke in gleiche Teile eingeteilt werden, um die Punkte der zwischenliegenden Schnittkurven zu erhalten.

Ein weiteres hierher gehöriges Beispiel, das zugleich die Selbstbeschattung einer Regelfläche darbietet, ist die Schraubenfläche in Figur 70.

30. Anwendung auf Drehungsflächen.

Als Beispiel für die Anwendung der Lösung auf Drehungsflächen mag ein halbes Drehungsellipsoid mit

punkte 1, 2, 3, die im Grundriss zwischen Lichtstrahl und Parallelkreisen sich ergeben, lotet man hinauf auf die Parallelkreisprojektionen im Aufriss und verbindet die hiedurch erhaltenen Punkte. Die entstehende Kurve ist ein Ellipsenstück, würde aber bei anderen Drehungsflächen eine Linie höherer Ordnung sein. An dieser Schnittkurve ist in k' ein tangierender Lichtstrahl möglich; k' ist also ein Punkt der Körperschattengrenze; er



Figur 29 b.

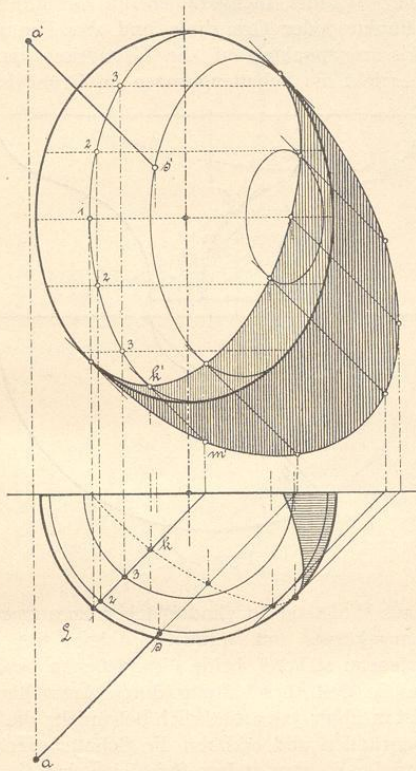
vertikaler Achse dienen, das aus der Vertikalebene vorragt. (Das Drehungsellipsoid entsteht, wenn man eine Ellipse um eine ihrer Achsen dreht; in Figur 30a ist die in der Vertikalebene liegende vertikale Achse die Drehachse.) Um die Schnittkurve der vertikalstehenden Ebene eines Lichtstrahls L mit dem Körper zu erhalten, zeichnet man im Grund- und Aufriss einige Parallelkreise 1, 2, 3 etc.; sie projizieren sich im Grundriss als konzentrische Kreise, im Aufriss als Horizontallinien. Die Schnitt-

ist auf den Grundriss des Lichtstrahls nach k hinunterzuloten. Weitere Lichtstrahlen ergeben weitere solche Punkte.

Um den Schlagschatten eines äusseren Punktes aa' auf dem Ellipsoid zu bestimmen, zieht man seinen Lichtstrahl und konstruiert für diesen die Schnittkurve wie für die andern. Der Aufriss, des Lichtstrahls schneidet die Schnittkurve in s' ; dieser Punkt ist der Schlagschatten im Aufriss; durch sein Hinunterloten auf den Lichtstrahl-

grundriss wird auch die Horizontalprojektion des Schlagschattenpunktes s erhalten.

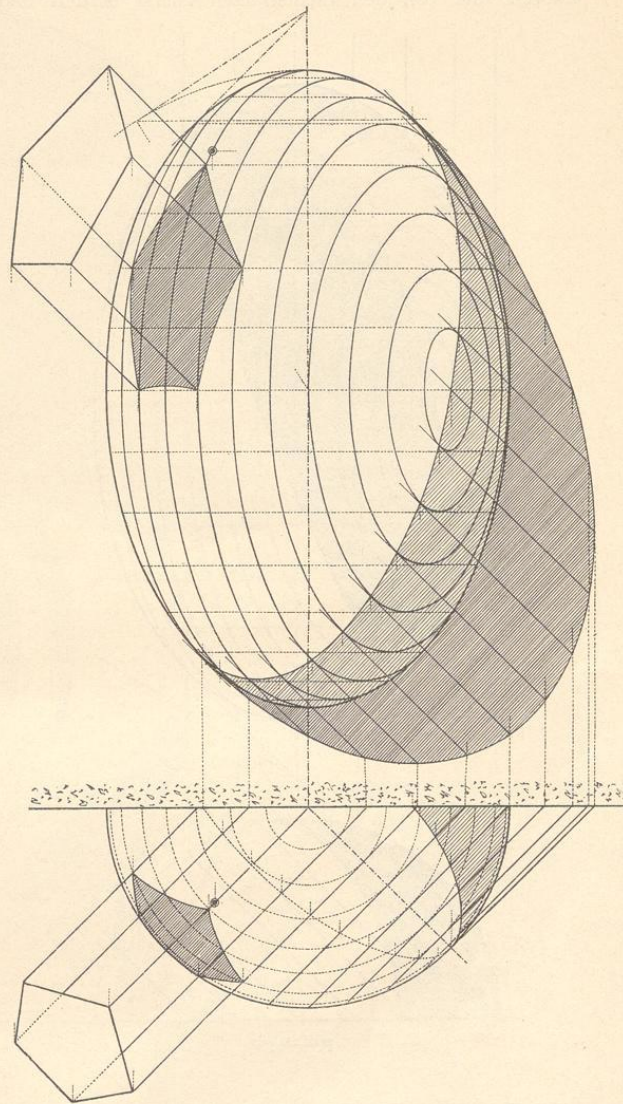
Wo die Tangenten, die in der Vertikalprojektion gezogen wurden, die Grundebene schneiden, da erscheinen die Punkte (m' u. s. w.) der Grenze des Schlagschattens, den das halbe Ellipsoid auf die Grundebene wirft. Wäre etwa statt der Grundebene eine andere Ebene vorhanden,



Figur 30 a.

so wäre der Schnittpunkt jeder Tangente mit dieser andern Fläche ein Punkt der Grenze des Schlagschattens, den das halbe Ellipsoid werfen würde.

In Figur 30b ist die Konstruktion mit thunlichster Vollständigkeit unter Beschattung des Ellipsoids durch eine äussere ebene Figur zur Anschauung gebracht.



Figur 30b.

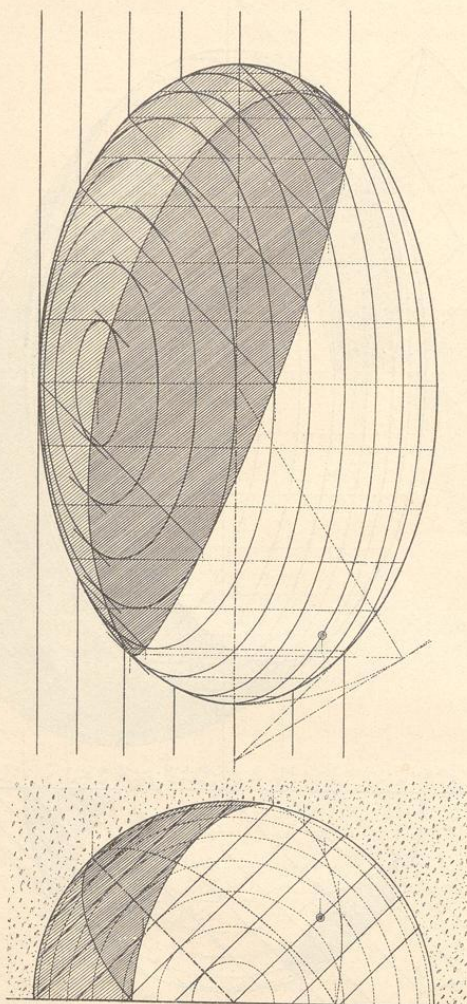
31. Selbstbeschattung gekrümmter Flächen.

Es gibt zwei Arten von äusserer Selbstbeschattung gekrümmter Flächen, diejenige durch Kanten oder Grenzlinien einerseits und Beschattung durch Auswölbung andererseits. Ein einfachstes Beispiel der ersten Art erhält man, wenn man das halbe Ellipsoid nicht als Vollkörper, sondern in die Vertikalebene vertieft annimmt. Die Lösung bleibt im wesentlichen dieselbe wie beim konvexen Ellipsoid. Man konstruiert auch hier (Figur 31a) die Schnittkurven mit Hilfe der Parallelkreise. Ein Teil der Schnittkurven öffnet sich gegen die Vertikalebene und findet seine Fortsetzungen in lotrechten Schnittlinien auf

der Vertikalebene. Die oberen Endpunkte der meisten dieser Kurven, aufgefasst als äussere Punkte und wie solche behandelt, ergeben Schlagschattenpunkte auf dem Innern der Kurve; die Verbindungslinie dieser Schlagschattenpunkte giebt die Grenze von Licht und Schlagschatten.

Selbstbeschattung durch Kanten bietet auch Figur 70.

Der zweite Fall der Selbstbeschattung, diejenige durch Auswölbung, ist geboten, wenn die streifenden Lichtstrahlen zuerst die Fläche berühren und dann schneiden. Diese Tatsache gelangt in der Form der Schnittkurven zum Ausdruck (Figur 31b). Es entstehen hier Schnittkurven, die von den Lichtstrahlen zuerst berührt und

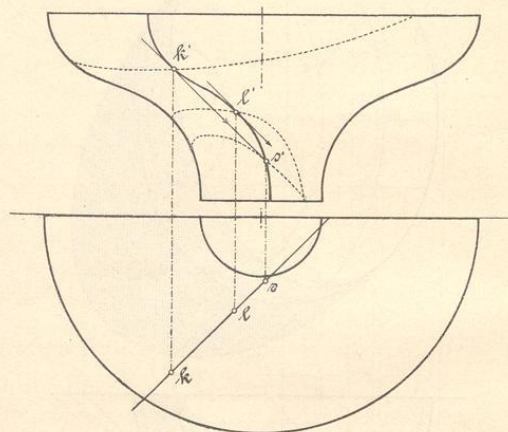


Figur 31a.

dann geschnitten werden. Meist ist auch noch eine zweite Tangente mit der Lichtrichtung an jede solche Schnittkurve möglich, deren Berührungspunkt einer Grenzlinie zwischen Körperschatten und Schlagschatten angehört.

In Figur 31b liefert der im Grundriss gezogene Lichtstrahl die im Aufriss gezeichnete Schnittkurve. An dieser sind zwei Tangenten parallel zur Lichtrichtung möglich; die erste giebt den Berührungspunkt k' und den Schnittpunkt s' , die zweite den Berührungspunkt l' . Oberhalb k' ist die Kurve, als Grenzlinie der Schnittfläche aufgefasst, dem Lichtstrahl zugewendet; von k' bis l' ist sie vom Lichtstrahl abgewendet; von l' bis s' ist sie wieder

dem Licht zugewendet, aber zugleich durch das mittlere Stück $k'l'$ dem Licht verdeckt. Daher ist oberhalb k' Licht, von k' bis l' Körperschatten, von l' bis s' Schlagschatten, unterhalb s' wieder Licht. Also ist k' ein Punkt der Grenze zwischen Licht und Körperschatten, l' ein Punkt der Grenze zwischen Körperschatten und Schlagschatten, s' ein Punkt der Grenze zwischen Schlagschatten und Licht. Weitere Lichtstrahlen im Grundriss liefern weitere Punkte jeder Grenzlinie und das Hinunterloten der Aufrissgrenzpunkte auf die Grundrisse der Lichtstrahlen ergibt die Schattengrenzen im Grundriss.

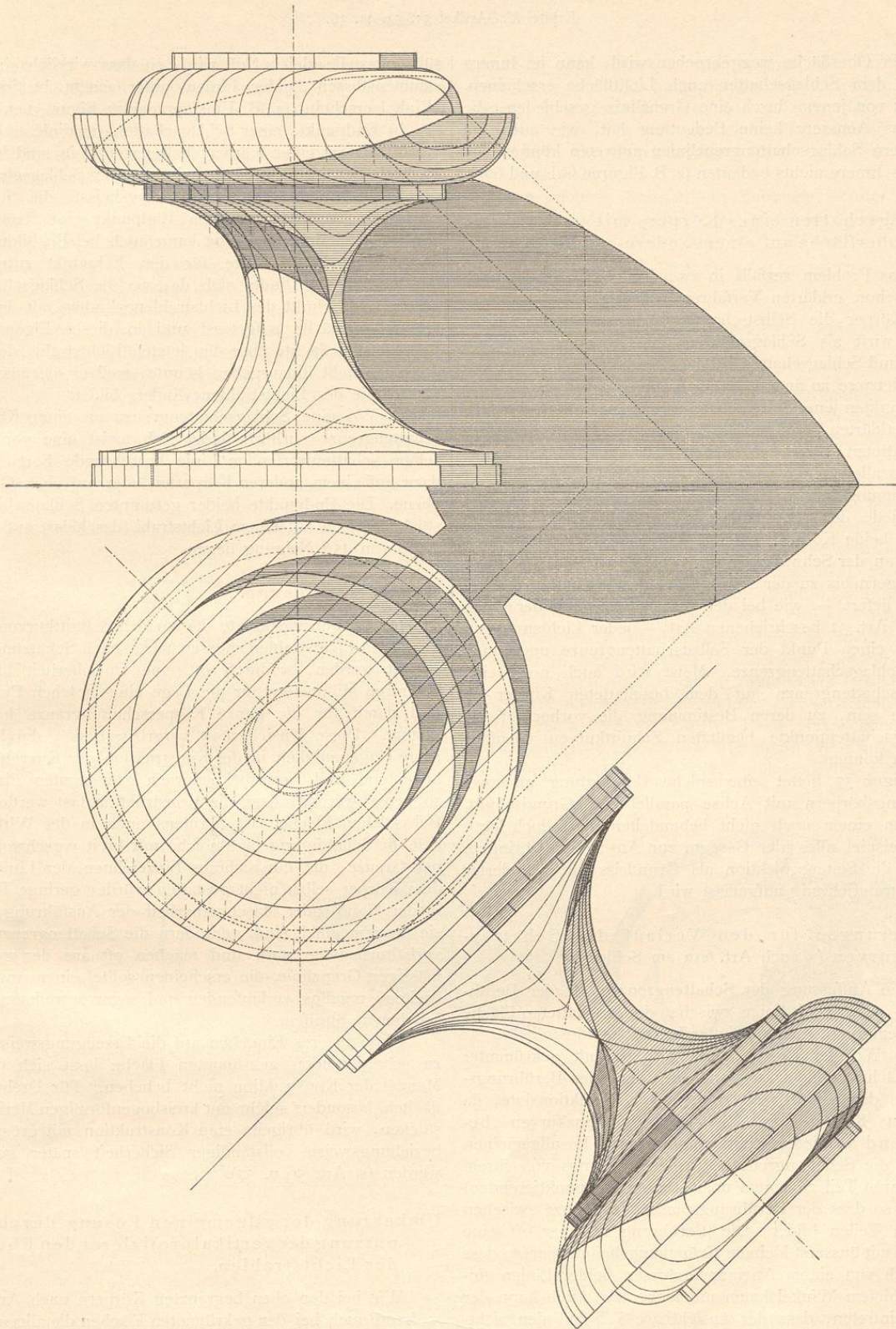


Figur 31b.

Ein aus Wulst- und Cylinderflächen zusammengesetzter Drehungskörper mit vertikaler Achse, frei auf der Horizontalebene stehend, beide Grundebenen beschattend und ebenfalls Selbstbeschattung durch Auswölbung darbietend, ist in Figur 31c ausführlich behandelt; die Schnittkurven begründen und erklären die Schattengrenzen. In diesem und den meisten andern Beispielen sind die Schnittkurven der beschatteten Flächen ganz gezeichnet, weil dies die Lösungen anschaulicher macht und vollständiger erklärt. In der praktischen Verwertung der Verfahren genügt es aber, nur kleine Stücke der Schnittkurven zu zeichnen, deren Lage und Ausdehnung nach Schätzung entsprechend der etwa zu erwartenden Lage der gesuchten Schattengrenze gewählt wird. Mit einiger Uebung kann diese Schätzung dem Ergebnis der Konstruktion sehr nahe kommen.

Schatten im Innern hohler Körper mit gekrümmter Oberfläche.

Ein letzter besonderer Fall der Selbstbeschattung krummflächiger Körper erscheint im Innern von solchen, wenn ihre Oberfläche als papierdünne Schale aufgefasst wird. Die Körperschattengrenzlinie gilt für das Innere ganz ebenso wie für das Aeußere; nur wird im Innern zur Körperschattenfläche, was am Aeußern Lichtfläche ist, und was am Aeußern Körperschattenfläche ist, wird im Innern durchaus Schlagschatten, weil es dem Lichte zugewendet und zugleich verdeckt ist. Erst wenn ein



Figur 31c.

Teil der Oberfläche weggebrochen wird, kann im Innern neben dem Schlagschatten auch Lichtfläche erscheinen. Sie ist von jenem durch eine Grenzlinie geschieden, die für das Äussere keine Bedeutung hat, wie auch am Äusseren Schlagschattengrenzlinien auftreten können, die für das Innere nichts bedeuten (z. B. Figuren 69b und 69c).

33. Schlagschatten eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche auf einem andern solchen Körper.

Das Problem zerfällt in zwei Teile. Zuerst ist nach dem schon erklärten Verfahren auf dem schattenwerfenden Körper die Selbstschattengrenze zu suchen; denn diese wirkt als Schlagschatten die Grenzlinie zwischen Licht und Schlagschatten auf dem beschatteten Körper. Um diese letztere zu finden, hat man für eine genügende Zahl von Punkten jener Selbstschattengrenze nach dem ebenfalls oben erklärten Verfahren die Schlagschattenpunkte auf dem beschatteten Körper zu suchen und stetig zu verbinden.

Im allgemeinen wird man dieselben Lichtstrahlen zur Bestimmung beider Grenzlinien benützen; das heisst, man wird jede der angenommenen vertikalen Schnittebenen durch beide Körper zugleich führen und dann die Tangente an der Schnittkurve des schattenwerfenden Körpers verlängern bis zu der Schnittkurve des beschatteten. Hiedurch liefert — wie bei der Selbstbeschattung der zweiten in Art. 31 beschriebenen Art — jeder Lichtstrahl zugleich einen Punkt der Selbstschattengrenze und einen der Schlagschattengrenze. Meist wird auch noch eine Selbstschattengrenze auf dem beschatteten Körper zu suchen sein, zu deren Bestimmung die vorher für die Schlagschattenpunkte benützten Schnittkurven ebenfalls dienen können.

Figur 37 bietet eine solche Beschattung an zwei Drehungskörpern mit Achse parallel zum Grundschnitt, also an einem noch nicht behandelten Fall; doch kann das Beispiel alles hier Gesagte zur Anschauung bringen, wenn die Seitenprojektion als Grundriss mit geänderter Lichtstrahlrichtung aufgefasst wird.

34. Folgerungen für den Verlauf der Schattenkurven (s. auch Art. 69a am Schluss).

Die Auffassung der Schattengrenzen als der Berührungs- oder Schnittlinien zwischen der beschatteten Fläche und dem Lichtstrahlencylinder lehrt folgendes:

a) Wo der Umriss eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche gebildet ist durch die Reihe der Berührungspunkte der am Körper tangierenden Projektionslote, da müssen Körper- und Schlagschattengrenzkurven berührend an diesem Umriss ankommen. Im allgemeinen gehen die Schattengrenzen an diesem Umriss von ihrem sichtbaren Teil zu einem unsichtbaren (zu punktierenden) über, so dass der Berührungspunkt die Grenze zwischen beiden Teilen bildet. Die Berührung ist aber oft eine solche mit äusserst kleinem Krümmungshalbmesser, so dass sie sich von einem Aneinanderstossen beider Linien unter schiefer Winkel kaum unterscheidet. Auch kann der Fall eintreten, dass der unsichtbare Teil auf den sichtbaren fällt, also der Krümmungshalbmesser an der Be-

rührungsstelle gleich Null wird, so dass wirklich ein Zusammenstossen beider Linien unter einem bestimmten Winkel erscheint (z. B. Umklappung in Figur 31c).

b) Endpunkte einer Schlagschattengrenzlinie an deren Anstossen an einer Körperschattengrenzlinie sind häufig zugleich Berührungspunkte zwischen der Schlagschattengrenze und einem Lichtstrahl, das heisst, die Schlagschattengrenze hat an ihrem Endpunkt eine Tangente von 45° Neigung. Dasselbe kann auch bei Eckbildungen der Schlagschattengrenze für den Eckpunkt zutreffen. Die Erscheinung findet sich da, wo die Schlagschattengrenze, als Schnitt des Lichtstrahlencylinders mit der gekrümmten Fläche aufgefasst und in dieser Eigenschaft fortgesetzt gedacht, über den letzten Lichtstrahl, den sie erreicht, nicht hinausgehen könnte, weil er die äusserste Mantellinie des Lichtstrahlencylinders bildet.

c) Wo eine Schlagschattengrenze an einer Körperschattengrenze aufhört, findet sich meist eine von derselben schattenwerfenden Linie herrührende Fortsetzung dazu auf einem anderen Körperteil oder auf einer Grundebene. Die Endpunkte beider getrennten Schlagschattenstücke müssen auf einem Lichtstrahl, das heisst auf einer Linie von 45° Neigung liegen.

Mängel der Lösung.

35.

Die Berührungspunkte der an den Schnittkurven tangierenden Lichtstrahlen müssen meist nach Schätzung bestimmt werden, wodurch oft eine Unsicherheit bis zu mehreren Millimetern für die Lage eines solchen Punktes und damit für die ganze Körperschattengrenze hereinkommt. Diese Unsicherheit vergrössert sich durch geringe Ungenauigkeit in der Konstruktion der Kurven sehr bedeutend und kann bei schwach gekrümmten Flächen so gross werden, dass die Konstruktion fast wertlos ist. Bei solchen Flächen ist übrigens auch in der Wirklichkeit die Schattierung eine solche mit breit verschwommener Grenze, die ein sicheres Einzeichnen der Linie auf dem Körper selbst nicht gestatten würde; geringe Fehler in der Hand- oder Maschinenarbeit der Ausführung, wie sie unvermeidlich sind, verändern die Schattengrenze unverhältnismässig stark und machen oft aus der gesetzmässigen Grenzlinie, die erscheinen sollte, einen ungleich breiten, regellos verlaufenden und sogar zuweilen unterbrochenen Streifen.

Ohne tieferes Eingehen auf die Erzeugungsweise der zu schattierenden gekrümmten Fläche lässt sich dieser Mangel der Konstruktion nicht beheben. Für Drehungsflächen, besonders solche mit kreisbogenförmigen Meridianstücken, wird übrigens eine Konstruktion mit grösserer, beziehungsweise vollständiger Sicherheit später gezeigt werden (s. Art. 56 u. 57).

Umkehrung der allgemeinen Lösung durch Benutzung der vertikalprojizierenden Ebenen der Lichtstrahlen.

Wie bei den eben begrenzten Körpern nach Art. 19, so kann auch bei den gekrümmten Flächen die allgemeine Lösung häufig derart umgekehrt werden, dass die vertikal-

projizierenden Ebenen des Lichtstrahls anstatt der horizontalprojizierenden verwendet werden. Bei bestimmten Arten und Lagen der Körper ist dieser Weg sogar der bessere. So liegt er z. B. bei Drehungskörpern mit Achse senkrecht zur Vertikalebene näher; die Lösung gestaltet sich dann ganz wie bei vertikalstehenden Drehungskörpern nach Art. 30; nur erscheinen Grundriss und Aufriss vertauscht.

In andern Fällen kann ein Grund für die Umkehrung der allgemeinen Lösung darin liegen, dass die Schattengrenzen nur im Grundriss, in dem sie dann zuerst erscheinen, verlangt sind.

In bestimmten Fällen empfiehlt es sich, vertikalstehende und vertikalprojizierende Schnitte nebeneinander zu verwenden, indem etwa für einen Teil der Schattenkurve jene, für einen andern Teil diese letzten ein schärferes Resultat geben oder sich rascher zeichnen, oder die einen eine willkommene Probe für das Resultat aus den andern liefern. So werden z. B. für die Selbstbeschattungsgrenze des verdrehten Stabs in Figur 107 oben besser die vertikalstehenden, unten besser die vertikalprojizierenden Schnittebenen verwendet.

37. Zuhilfenahme der Seitenprojektion.

Wie bei den ebenbegrenzten Körpern, so sind auch bei manchen solchen mit gekrümmten Flächen Aufriss und Seitenprojektion anstatt Aufriss und Grundriss zu benützen; sei es, dass die Fläche nur mit Hilfe der Seitenprojektion unzweideutig darstellbar, oder ohne Grundriss gegeben ist; sei es, dass die Benützung der Seitenprojektion den kürzeren Weg bildet. Als Schnittebenen des Körpers treten dann im allgemeinen die seitlich pro-

scheinen zwei solche Drehungskörper, die einander in Schatten setzen und mannigfaltige Selbstbeschattung darbieten. Eine Erklärung der Konstruktion würde nur die Wiederholung des für die allgemeine Lösung Ausgesprochenen mit Ersatz des Grundplans durch die Seitenprojektion sein.

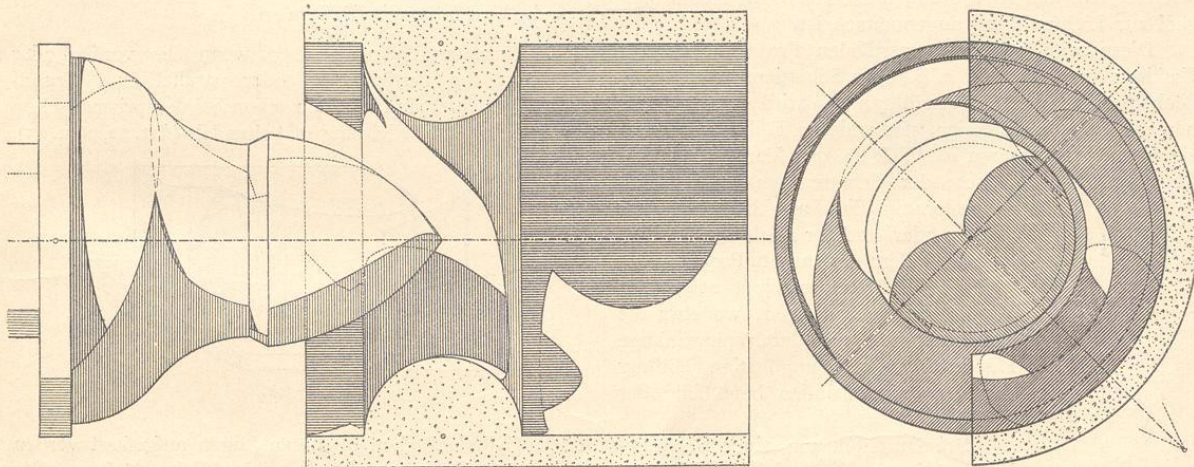
Ein weiteres Beispiel der Zuhilfenahme der Seitenprojektion und der seitlich projizierenden Schnittebenen ist in Figur 73 (Röhrenfläche mit veränderlicher Erzeugenden) gezeichnet.

Zuhilfenahme von weiteren Projektionsebenen 38. und von Umklappungen.

Bei der Schattenkonstruktion auf gekrümmten Flächen bestimmter Art nimmt man zuweilen noch andere Projektionen zu Hilfe als die bisher betrachteten auf die drei Grundebenen.

a) Man denkt sich z. B. den Körper, auf dem die Schattengrenzen zu suchen sind, projiziert auf eine vertikale Ebene, die der Lichtstrahlrichtung parallel steht (also selbst die horizontalprojizierende Ebene eines Lichtstrahls darstellt), und zeichnet entweder diese neue Projektion als selbständige Figur neben die ursprüngliche Vertikalprojektion, oder denkt sich die neue Projektionsebene mit der darauf erscheinenden Figur durch Drehung um ihre Fusslinie in die horizontale Grundebene umgelegt.

Eine solche in eine der ursprünglichen Grundebenen umgelegte ebene Figur bezeichnet die darstellende Geometrie als „Umklappung“. Beim Aufzeichnen einer Umklappung ist nur zu beachten, dass alle Punkte beim Umlegen Kreisbögen um die Fusslinie der umzuklappen-



Figur 37.

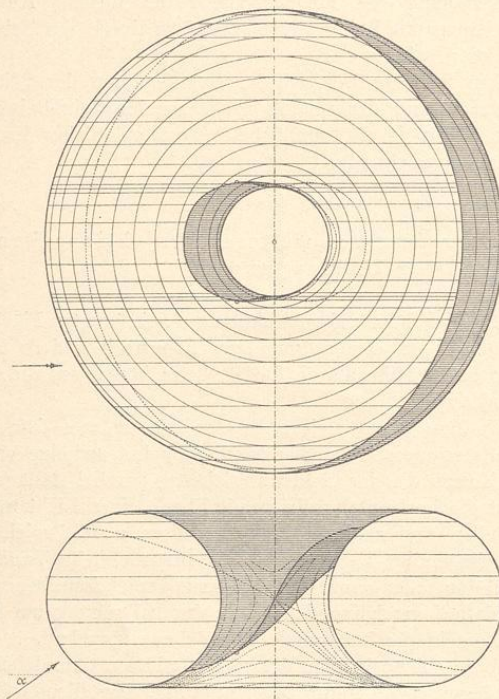
jizierenden Lichtstrahlebenen auf; doch können auch hier zuweilen die vertikalprojizierenden mit grösserem Nutzen verwendet werden.

Die nächstliegenden Beispiele bilden Drehungsflächen mit Achse parallel zum Grundschnitt. In Figur 37 er-

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

den Ebene beschreiben, und dass sich diese Kreisbögen als gerade Linien senkrecht zur Fusslinie oder Umklappungsachse projizieren, endlich dass in der Umklappung deren Radien und alle Masse und Winkel der Figur in ihrer wahren Grösse erscheinen.

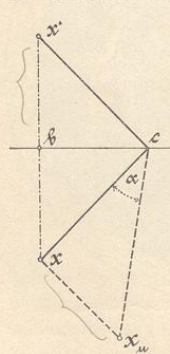
Figur 31c zeigt eine solche Umklappung der Projektion auf eine vertikale Lichtstrahlenebene in die horizontale Grundebene, wogegen in Figur 38a eine Wulst-



Figur 38a.

fläche in solcher Projektion als Vertikalprojektion gezeichnet, mit andern Worten, die Vertikalgrundebene parallel zur Lichtrichtung angenommen ist.

Diese schräggestellten vertikalen Projektionen oder Umklappungen ersparen z. B. beim Schattieren von Kugel- flächen — wie später auszuführen sein wird — das Zeichnen elliptischer Hilfslinien. In anderen Fällen gewähren sie oft einen besseren Einblick in den Verlauf und das

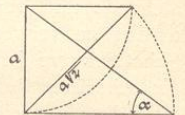


Figur 38b.

Gesetz der Schattengrenzkurven, insbesondere in die Lage höchster oder tiefster oder anderer wichtiger Punkte, oder sie liefern erwünschte Proben, oder endlich sie führen zu einer schärferen Bestimmung der Kurven, wo etwa die anderen Projektionen durch spitzwinklige Durchschnitte oder ungünstige Häufung der Konstruktionslinien bemühen oder versagen.

Bei Durchführung einer Schattenkonstruktion in einer solchen Projektion auf die schräggestellte vertikale Ebene eines Lichtstrahls ist zu beachten, dass der Neigungswinkel der Lichtstrahlprojektion hier nicht ebenfalls gleich 45° ist, sondern gleich der wirklichen Neigung des Lichtstrahls im Raum, welche erst aus den zwei ursprünglichen Projektionen abzuleiten ist. Man erhält diesen Neigungs-

winkel, indem man (Figur 38b) auf einem durch den Grundschnitt gezogenen Lichtstrahl einen Punkt X annimmt und das horizontalprojizierende Dreieck des Lichtstrahls cxX in die Horizontalebene umklappt. Hierbei beschreibt der Raumpunkt X einen Viertelskreis und legt sich nach x_u , indem $xx_u = bx'$ wird; cx_u ist die Umklappung des Lichtstrahls und xcx_u oder a ist der gesuchte Winkel, den der Lichtstrahl als Raumlinie mit seiner Horizontalprojektion einschließt. Er erweist sich als der kleinere Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen vertikale Kathete gleich einem beliebigen Mass a und dessen horizontale Kathete die Diagonale eines Quadrats über a oder gleich $a\sqrt{2}$ ist. Die Rechnung ergibt $a = 35^\circ 15,9'$. Im folgenden wird die Ableitung dieses Winkels immer mit Figur 38c erscheinen.



Figur 38c.

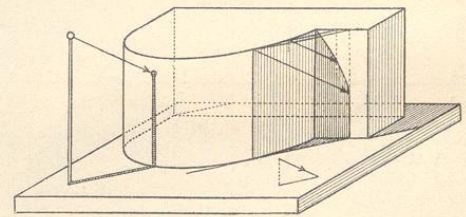
b) Was im vorhergehenden über die Benützung der Projektion auf die horizontalprojizierende (vertikalstehende) Lichtstrahlenebene gesagt worden ist, gilt auch von der vertikalprojizierenden.

Auch auf diese wird der Körper, auf dem die Schattengrenzen zu suchen sind, zuweilen projiziert gedacht und dann die Projektion in die Vertikalebene umgeklappt. Auch in dieser Umklappung bildet die Lichtstrahlprojektion mit der ursprünglichen Vertikalprojektion des Lichtstrahls den zuvor bestimmten Winkel $a = 35^\circ 15,9'$. Figur 65b bietet ein später näher zu erklärendes Beispiel.

VI. Schatten auf Cylinder- und Kegelflächen.

Cylinderflächen senkrecht zu einer Grundebene 39. behandelt wie Prismen.

Schatten auf Cylinderflächen, wenn diese vertikal oder senkrecht zur Vertikalebene oder parallel zum Grundschnitt gerichtet sind, wurden schon bei den prismatischen Flächen derselben Richtung mitbehandelt (Art. 22, 23 u. 25),

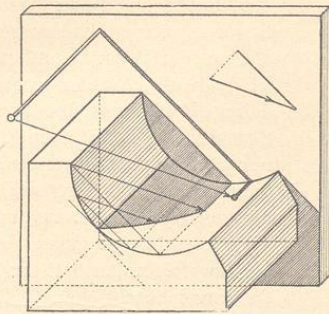


Figur 39a.

indem Cylinderflächen in diesen Lagen aufgefasst werden können als Prismen mit sehr vielen Seitenflächen. Die hieraus entspringenden Lösungen sind zugleich besondere Formen der allgemeinen Lösung für Schatten auf gekrümmten Flächen, beziehungsweise ihrer Umkehrungen mit Vertauschung von Grundriss und Aufriss oder mit Ersatz des Grundplans durch die Seitenprojektion.

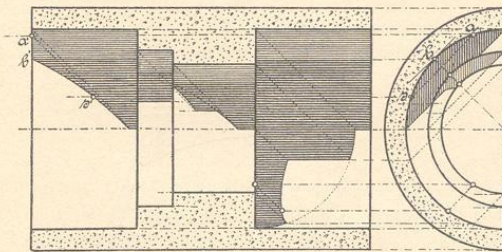
Die Figuren 39a und 39b bringen das Prinzip der Lösung für die zwei ersten Fälle perspektivisch zur An-

schaung; in Figur 39c ist als Beispiel für den dritten Fall eine kreisrunde Röhre mit Verengerungen im Längenschnitt, also eine Cylinderfläche parallel zum Querschnitt



Figur 39b.

gezeichnet und der Schatten eines Randpunktes $a'a$ durch



Figur 39c.

das Parallelogramm $a'a's's'$ bestimmt ganz wie in Art. 25, ebenso die Körperschattengrenze im Aufriss durch Hinüberlinieren des Berührungspunktes b als Mantellinie im Aufriss.

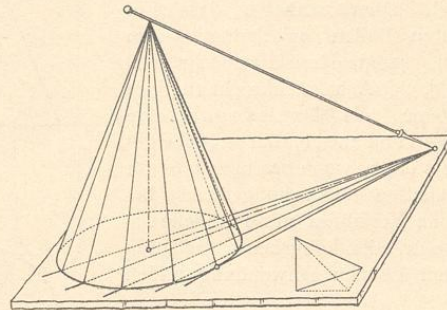
40. Verlassen der allgemeinen Lösung bei Kegel- und schiefgerichteten Cylinderflächen.

Bei Schatten auf schiefgerichteten Cylinderflächen und auf Kegelflächen in allen möglichen Lagen würden die Schnittebenen, welche die allgemeine Lösung für gekrümmte Flächen benützt, gekrümmte Schnittlinien mit den beschatteten Flächen ergeben, und zwar bei Kreiscylindern und Kreiskegeln elliptische, parabolische und hyperbolische Linien; die Lösung würde sich also sehr zeitraubend gestalten. Daher wird hier die Benützung der projizierenden Ebenen des Lichtstrahls als der Schnittebenen des beschatteten Körpers aufgegeben.

41. Schatten auf Kegelflächen.

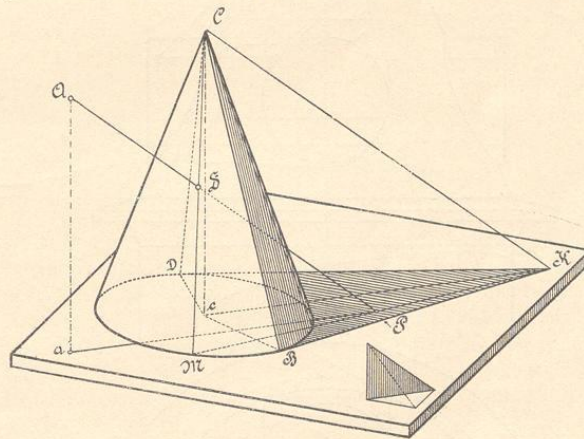
Bei Schatten auf Kegelflächen werden dafür Ebenen eingeführt, welche zwar ebenfalls dem Lichtstrahl parallel sind, aber alle durch die Kegelspitze gehen, so dass sie alle möglichen Neigungen annehmen. Solche Ebenen, wie sie in Figur 41a anschaulich gemacht sind, schneiden den Kegel nach Mantellinien, also nach geraden Linien, und es werden also auf diese Weise die gekrümmten Schnittlinien umgangen. Das Verfahren, gültig für alle Fälle, ist das folgende:

Man zieht (Figur 41b) durch die Spitze des Kegels C einen Lichtstrahl und sucht dessen Schnittpunkt K mit der erweiterten gedachten Basisebene des Kegels. Dieser Punkt K ist der Schlüssel zu allen Lösungen bei Schatten auf Kegelflächen. (In manchen Fällen muss man den Lichtstrahl rückwärts durch die Kegelspitze ziehen, um einen



Figur 41a.

Schnitt mit der Basisebene zu erhalten [etwa wenn der Kegel auf der Spitze steht]; in manchen Fällen ist die Basisebene eine Grundebene, in anderen nicht). Durch den gefundenen „Schlüsselpunkt“ legt man Sekanten und Tangenten KB und KD an die Kegelspitze. Die Mantellinien durch die Berührungspunkte B und D der Tangenten sind die Körperschattengrenzen auf der



Figur 41b.

Kegelfläche. Die Mantellinien durch die Schnittpunkte jeder Sekante sind die Schnittlinien des Kegels mit einer Lichtstrahlenebene, welche durch die Sekante gelegt ist. Diese Schnittlinien benützt man bei Schlagschatten auf Kegelflächen ganz in derselben Weise, wie die Schnittkurven bei anderen gekrümmten Flächen, das heisst, wo eine solche Schnittlinie getroffen wird vom Lichtstrahl eines schattenwerfenden Punktes, der mit der Sekante in derselben Lichtstrahlenebene liegt, da ist der Schlagschatten des Punktes. Die zu einem schattenwerfenden Punkt A gehörige Sekante KM geht durch den Schnitt eines durch den Punkt gezogenen Lichtstrahls mit der Basisebene des Kegels (P).

die Körperschattengrenze und der Schlagschatten eines äusseren Punktes oder eines Randpunktes gesucht.

42. Der vertikale Kreiskegel mit Spitze nach oben.

Figur 42a. Durch Ziehen des Lichtstrahls aus der Kegelspitze cc' bis zum Schnitt mit der erweiterten Basisebene, hier der horizontalen Grundebene, erhält man den Schlüsselpunkt k , ebenso durch Ziehen des Lichtstrahls aus dem schattenwerfenden Punkt aa' bis zur erweiterten Basisebene den Punkt p im Grundriss. Aus k zieht man im Grundriss die zwei Tangenten an die Kegelsbasis; die Mantellinien durch die Berührungspunkte cb und cd sind mit dem gegen k gerichteten Stück db der Basislinie die Körperschattengrenze im Grundriss; das Hinaufloten von b und d nach b' und d' liefert die schattenabgrenzenden Mantellinien auch im Aufriss. — Die Sekante kp im Grundriss liefert als Schnittpunkte mit der Kegelsbasis m und n und dadurch die Mantellinien cm und cn im Grundriss und Aufriss. Nur die erste ist dem Lichtstrahl zugewendet; wo sie getroffen wird vom Lichtstrahl, nämlich in ss' , da ist der Schlagschatten des Punktes aa' . Die zweite Mantellinie cn bleibt ohne Verwendung; sie enthält den Punkt, in dem der verlängert gedachte Lichtstrahl den Kegel wieder verlassen würde.

Probe: Die beiden Projektionen des Schlagschattenpunktes s und s' müssen vertikal übereinander liegen.

(Zuweilen kann man auch anstatt des Punktes p den Schnittpunkt benutzen, den die Verbindungslinie der Kegelspitze und des schattenwerfenden Punktes mit der Basisebene liefert. Durch diesen Punkt ist dann die Sekante zu ziehen; sie ist identisch mit derjenigen durch p . Meist fällt jedoch dieser neue Hilfspunkt zu fern.)

Die Figuren 42b und 42c bieten ein Beispiel für die oftmalige Anwendung der zuvor beschriebenen Konstruktion. Ein Punkt der Schnittlinie zwischen einem der horizontalen Cylinder und dem Kegeldach wird erhalten, indem man in beliebiger Höhe einen Horizontalschnitt geführt denkt. Der Punkt erscheint dann zuerst im Grundriss als Schnitt eines Parallelkreises der Kegelfläche mit einer Mantellinie des Cylinders.

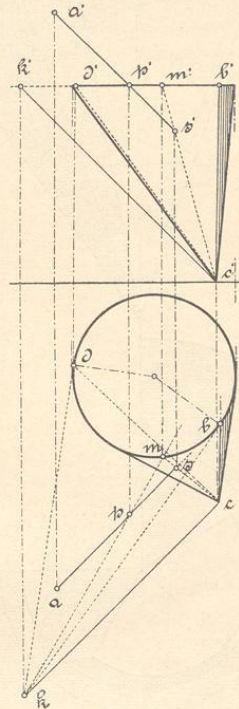
Die Bestimmung des Schlagschattens, welchen die Cylinderrandlinie auf die Kegelfläche wirft, ist aus den eingezeichneten Konstruktionslinien deutlich und nur die Wiederholung des mit Figur 42a Erklärten.

Um den Schlagschatten des Kegeldaches auf den in der Seitenansicht und Oberansicht erscheinenden Cylinderflächen zu bestimmen, ist die Vorderansicht des mittleren Cylinders als Seitenprojektion des rechts liegenden aufgefasst und die Körperschattengrenze des Kegels dieser Seitenprojektion beigelegt (in der Mantellinie links von der Achse). Die Konstruktion gestaltet sich hierauf ganz wie in Art. 25; einige der Parallelogramme sind eingezeichnet.

43. Der schiefe Kreiskegel mit Spitze nach unten.

Figur 43a. Der Lichtstrahl durch die Kegelspitze cc' ist hier rückwärts zu ziehen, um im Aufriss als Schnitt

mit der verlängerten Projektion der Basis den Punkt k' und durch dessen Hinunterloten auf die Lichtstrahlprojektion im Grundriss den Schlüsselpunkt k zu erhalten. Die Berührungspunkte b und d der im Grundriss aus k gezogenen Tangenten an den Basiskreis liefern die körperschattenabgrenzenden Mantellinien cb und cd , die durch



Figur 43 a.

Hinaufloten in den Aufriss übertragen werden. Der schattenwerfende Punkt aa' liefert als Schatten auf der erweiterten Basisebene den Punkt pp' und dadurch die Sekante kp , welche den Basiskreis zuerst in m schneidet. Wo die Mantellinienprojektionen cm und $c'm'$ von den Lichtstrahlprojektionen getroffen werden, erscheinen die Projektionen des Schlagschattenpunktes ss' , die zur Probe wieder vertikal übereinander liegen müssen.

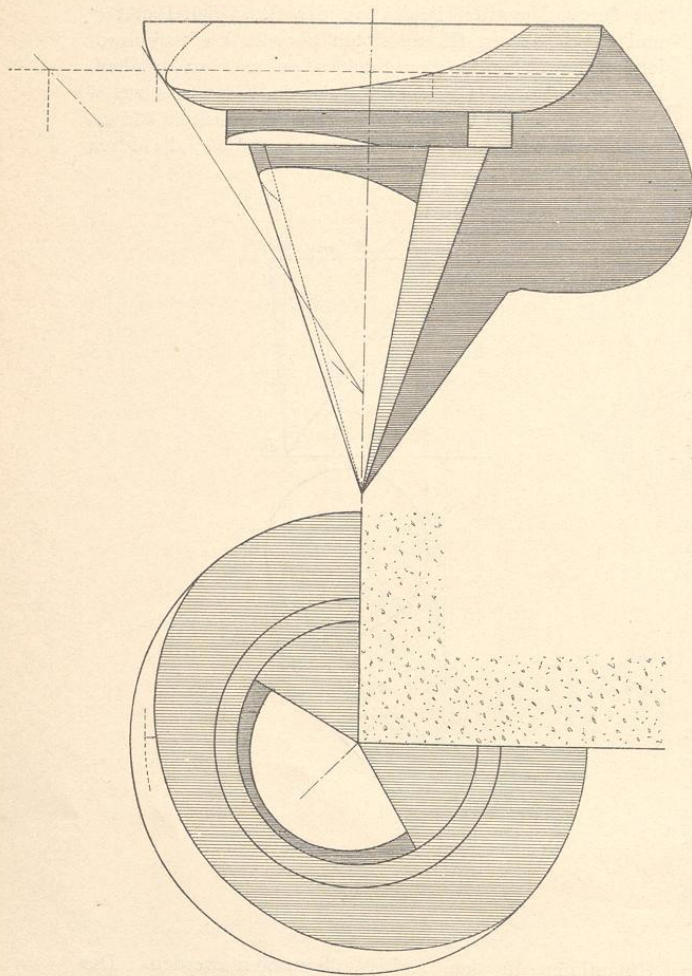
In Figur 43b ist ein Beispiel für die Anwendung der Konstruktion auf den geraden Kegel gezeichnet.

Der vertikalstehende hohle Kegel.

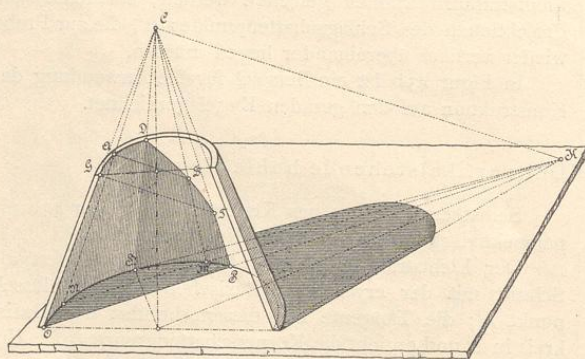
44.

Selbstbeschattung eines Kegelrumpfes; Figur 44a als perspektivische Darstellung der Konstruktion.

Der Lichtstrahl durch die Kegelspitze C liefert als Schnitt mit der erweiterten Basisebene den Schlüsselpunkt K ; die Tangente aus diesem berührt den Basiskreis in B und ergibt die Körperschattengrenze BD . Um die Schlagschattengrenze der Selbstbeschattung zu erhalten, zieht man die Sekanten KN , KO u. s. w. samt den Mantellinien durch die Basisschnittpunkte CM , CN , CP u. s. f. Der Lichtstrahl durch A liefert den Schatten-

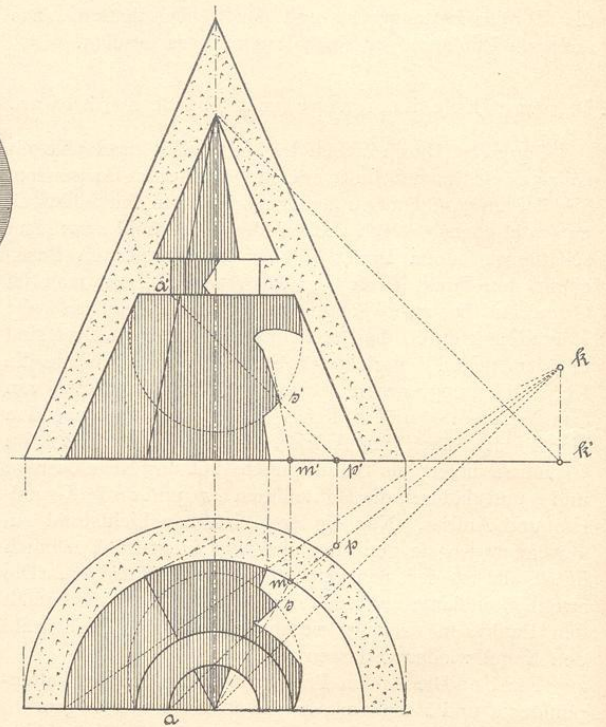


Figur 43 b.

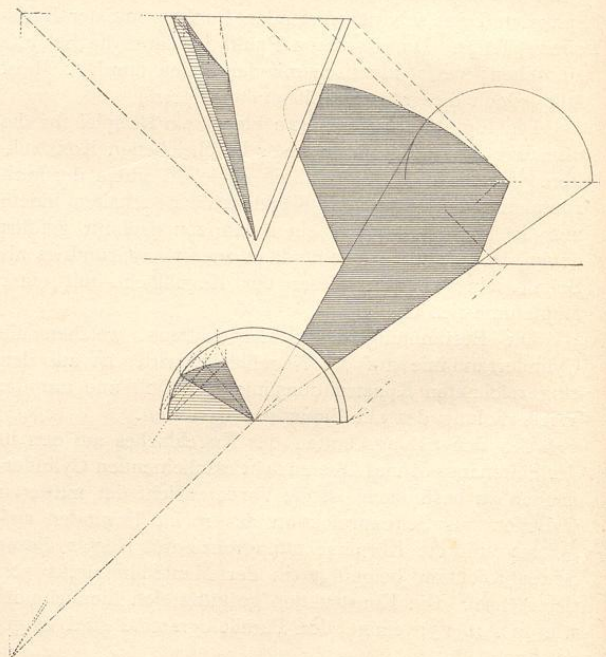


Figur 44 a.

punkt S , der Lichtstrahl durch G den Schattenpunkt T u. s. f. Der Rand GO wirft als Schatten den Schnitt seiner



Figur 44 b.



Figur 44 c.

Lichtstrahlenebene COK mit dem Kegelmantel und der Basis, das heisst die Linien TP und PO .

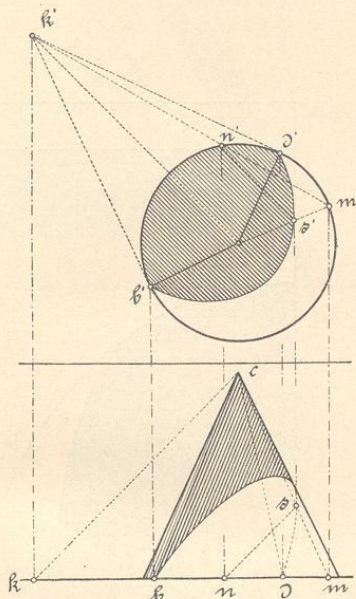
Figur 44 b bietet ein schwierigeres hierher gehöriges

Beispiel mit Spitze des Kegels nach oben, Figur 44c ein einfacheres mit Spitze nach unten.

45. Der gerade Kreiskegel senkrecht zur Vertikalebene, vertieft in die Vertikalebene.

Gesucht die Selbstbeschattung; Figur 45.

Der Lichtstrahl durch cc' ist hier rückwärts zu ziehen, um den Schnittpunkt mit der Basisebene kk' zu erhalten. Aus k' sind die Tangenten an den Basiskreis gezogen; die Berührungspunkte b' und d' liefern die schattenabgrenzenden Mantellinien $c'b'$ und $c'd'$ im Aufriss; Hin-



Figur 45.

unterloten der Punkte b' und d' liefert sie im Grundriss. Um den Schlagschatten des Randpunktes nn' zu erhalten, zieht man aus k' die Sekante durch diesen Randpunkt bis zum zweiten Schnitt mit der Kegelbasis in m' . Der Schattenpunkt s' erscheint als Schnitt des Lichtstrahls durch n' mit der Mantellinie $c'm'$. Das Hinunterloten der Punkte n' und m' liefert s im Grundriss samt der in den früheren Fällen erwähnten Probe.

Eine zweite Lösung für die Schlagschattengrenze ist oben am Schluss von Art. 41 erwähnt.

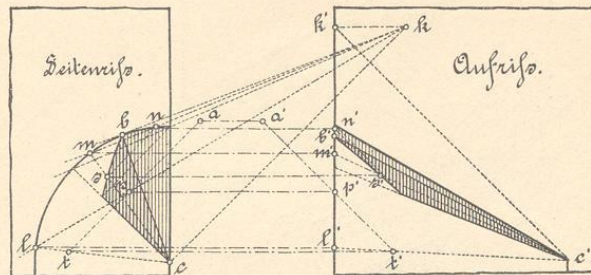
46. Die hohle Kegelfläche mit Achse parallel zum Grundschnitt.

Eine gerade hohle Kreiskegelfläche mit Achse parallel zum Grundschnitt erscheint im Längenschnitt. Gesucht die Selbstbeschattung. Figur 46a.

Schon zur unzweideutigen Darstellung der Fläche ist die Seitenprojektion notwendig; man braucht sie wie bei Cylindern parallel zum Grundschnitt auch für die Schattenkonstruktion. Der Lichtstrahl durch die Kegelspitze cc' ist

rückwärts zu ziehen, um den Schnitt kk' mit der Kegelbasisebene zu liefern. Aus k in der Seitenprojektion ist die Tangente an die Kegelbasis zu ziehen, woraus die schattenabgrenzende Mantellinie bc erhalten wird, ferner durch den schattenwerfenden Randpunkt n der Basis die Sekante km . Der Schnitt des durch n gezogenen Lichtstrahls mit der Mantellinie cm liefert den Schattenpunkt s . Hinüberlinieren in den Aufriss ergibt die Punkte n' , m' , s' und die Probe für ss' , indem beide Punkte gleich hoch liegen müssen.

Zur Bestimmung des Schlagschattens eines äusseren Punktes aa' ist in jeder Projektion der Lichtstrahl durch aa' gezogen, dessen Schnittpunkt mit der Basisebene im Aufriss p' hinüberliniert auf den Seitenriss des Licht-



Figur 46a.

strahls nach p , die Sekante kp bis zum Schnitt mit der Basislinie in l gezogen und nach l' hinüberliniert. Die Schnittpunkte der durch aa' gezogenen Lichtstrahlprojektionen mit den Mantellinienprojektionen cl und $c'l'$ geben die Projektionen des Schlagschattenpunktes tt' .

In Figur 46b ist als hieher gehöriges Beispiel aus der praktischen Baukunst ein Stichkappengewölbe mit kegelförmiger Leibung, einschneidend in ein Tonnengewölbe, im Längenschnitt und in der Vorderansicht gezeichnet. Die Leibung oder Mantelfläche der Kappe ist erzeugt gedacht durch eine Gerade, die an dem halbkreisförmigen Stirnbogen ef gleitet und immer durch einen in der Achse des Bogens liegenden äusseren Punkt c geht. Zeichnet man eine beliebige Lage der Geraden im Längenschnitt und in der Vorderansicht, so erscheint ihr Schnittpunkt mit der cylindrischen Gewölbbfläche unmittelbar im Längenschnitt und kann von dort auf die Vorderansicht der Geraden hinüberliniert werden, womit ein Punkt der gewundenen Schnittlinie beider Gewölbbflächen auch in der zweiten Projektion gefunden ist.

Zur Schattenkonstruktion nimmt man eine beliebige, zur Stirnbogenebene parallele Ebene gh als Basisebene der Kegelfläche an (auch die Stirnbogenebene selbst könnte als solche angenommen werden). In der Vorderansicht erscheint dann der Viertelskreis $g'h'$ als Basislinie. Nachdem wie bei Figur 46a der Schlüsselpunkt k' bestimmt ist, gestaltet sich die Konstruktion des Schlagschattens, den ein Randpunkt aa' auf die Kappenfläche selber wirft, ganz wie in früheren Fällen. Die Mantellinie durch aa' schneidet den Viertelskreis $g'h'$ in einem Punkt. Durch diesen ist eine Sekante aus k' gezogen, die den Viertelskreis zum zweitenmal schneidet. Auf der Mantellinie durch

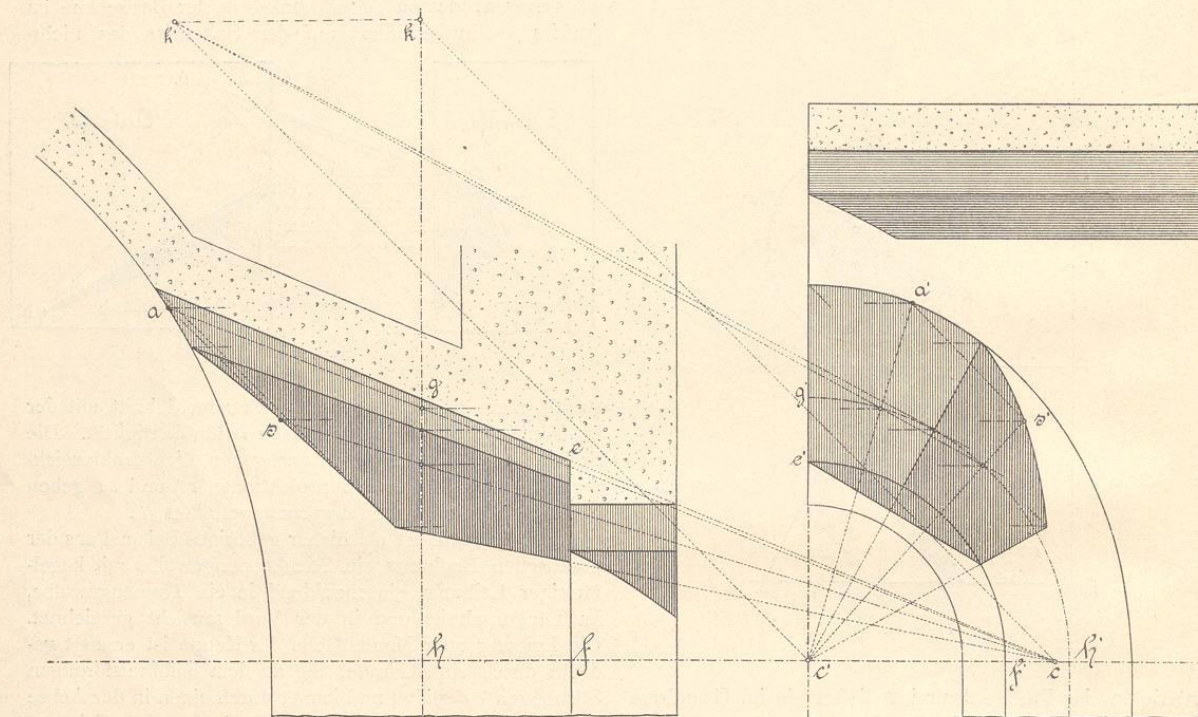
diesen zweiten Schnittpunkt liegt der Schattenpunkt ss' . Eine Probe ergibt sich, indem s und s' auf einer Horizontalen liegen müssen.

47. Die beliebig gerichtete Kegelfläche mit beliebig gestalteter, schiefgerichteter Basis.

Figur 47. Bei der gegebenen Stellung der Fläche ist der Lichtstrahl durch die Kegelspitze cc' rückwärts zu ziehen, um einen Schnitt mit der Basisebene zu erhalten. Da sich die Basis weder im Aufriss noch im Grundriss als gerade Linie projiziert, so gestaltet sich das Aufsuchen

des Punktes f seinen Schlagschatten t wirft. Die Kante fc wirft ihren Schlagschatten auf tc , welche Linie also der Schlagschattengrenze der Selbstbeschattung angehört; für das gekrümmte Stück Schattengrenze zwischen b und t finden sich Zwischenpunkte durch weitere Sekanten aus k zwischen b und f . Alle Punkte können auch unmittelbar im Aufriss erhalten werden durch Ziehen der Tangenten und Sekanten aus k' , wodurch Proben in dem vertikalen Uebereinanderliegen der zwei Projektionen jedes Schattenpunktes erwachsen.

Um den Schlagschatten eines aussenliegenden Punktes aa' auf der Kegelfläche zu erhalten, ist der Schnittpunkt



Figur 46b.

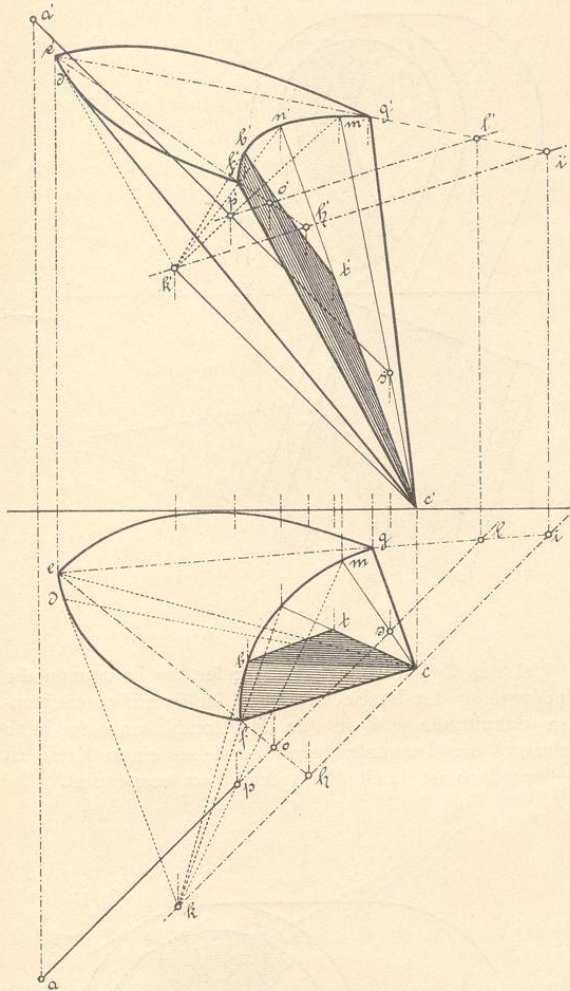
des Schnittpunktes minder einfach als in den früheren Fällen. Man zieht auf der gegebenen Basis zwei geeignete gerade Linien eg und ef , welche im Grundriss den durch c gezogenen Lichtstrahl in i und h schneiden. Das Hinaufloten dieser Punkte auf die Vertikalprojektionen der beiden Geraden nach k' und i' liefert in der Linie $i'h'$ die Schnittlinie der erweiterten Basisebene mit der vertikalen Ebene des durch c gezogenen Lichtstrahls. Wo diese Schnittlinie getroffen wird vom Aufriss des durch c' gezogenen Lichtstrahls, da ist der Schnittpunkt dieses Lichtstrahls mit der Basisebene k' ; das Hinunterloten auf den Grundriss des Lichtstrahls liefert den Schlüsselpunkt k im Grundriss, welcher zu benützen ist wie in den früheren Fällen. Die Berührungspunkte b und d der aus k gezogenen Tangenten liefern wieder die körperschattenabgrenzenden Mantellinien; die Sekante durch f liefert den Schnittpunkt n und damit die Mantellinie, auf welche

pp' des Lichtstrahls durch diesen Punkt mit der Basisebene ganz in derselben Weise zu suchen wie für die Kegelspitze cc' . Der Grundriss des Lichtstrahls durch a schneidet die beiden auf der Basisebene gezogenen Hilfslinien ef und eg in o und l ; das Hinaufloten dieser Punkte giebt die Linie $l'o'$, die vom Aufriss des durch a' gezogenen Lichtstrahls in p' geschnitten wird. Die Sekanten aus k und k' durch p und p' gezogen liefern die Schnittpunkte m und m' , auf deren Mantellinien die Projektionen des Schattenpunktes s und s' liegen müssen.

Schatten auf schiefgerichteten Cylinderflächen. 48.

Bei den schiefgerichteten Cylinderflächen werden anstatt der auf die Grundebenen projizierenden Ebenen des Lichtstrahls solche Schnittebenen eingeführt, welche sowohl zu den Mantellinien als zu den Lichtstrahlen parallel

sind, also wieder den Cylinder nicht nach Kurven, sondern nach Mantellinien schneiden oder berühren. Die Lösung des Problems, auf einer schiefgerichteten Cylinderfläche die Selbstschattengrenzen und den Schlagschatten



Figur 47.

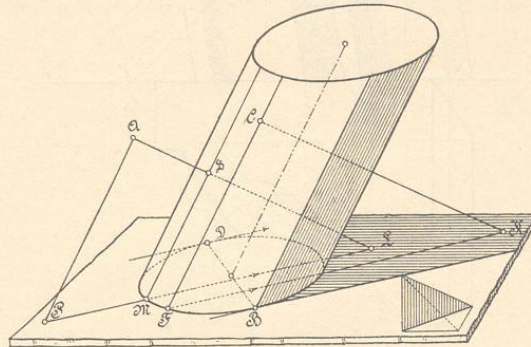
eines äusseren Punktes zu suchen, gestaltet sich hienach allgemein wie folgt:

Man zieht (Figur 48) durch einen beliebigen Punkt C einer beliebigen Mantellinie einen Lichtstrahl bis zum Schnitt mit der erweitert gedachten Basisebene des Cylinders und verbindet den Schnittpunkt K mit dem Fusspunkt der Mantellinie F . Die Verbindungslinie FK ist die Schnittlinie der Basisebene mit der durch die Mantellinie gehenden Lichtstrahlenebene. Für die durch weitere Mantellinien gelegten Lichtstrahlenebenen würden sich parallele Schnittlinien auf der Basisebene ergeben, so dass die erhaltene Schnittlinie auch aufgefasst werden kann als eine Projektion der Lichtrichtung auf die Basisebene mit der Richtung des Cylinders als Projektionsrichtung.

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

Auch mit einem äusseren Punkt A anstatt des Mantellinienpunktes C lässt sich die Richtung erhalten, indem man durch den Punkt einen Lichtstrahl AL und eine Parallele AP zu den Mantellinien bis zum Schnitt mit der Basisebene zieht. PL ist wieder die Lichtrichtung in der Basisebene.

Diese Lichtstrahlrichtung auf der Basisebene bildet bei allen Aufgaben über schiefgerichtete Cylinderflächen den Schlüssel zur Lösung (ähnlich wie bei den Kegelflächen der Schnittpunkt des Lichtstrahls durch die Kegelspitze mit der Basisebene); sie wird benützt wie der gewöhnliche Lichtstrahlgrundriss beim vertikalen Kreiscylinder.



Figur 48.

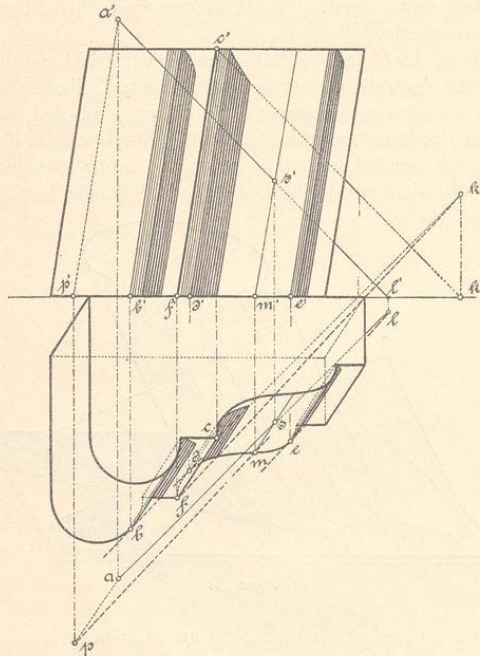
Wo die mit dieser Richtung an die Basislinie gezogenen Tangenten diese berühren, da sind die Fusspunkte B und D der körperschattenabgrenzenden Mantellinien. Wirft ein äusserer Punkt A einen Schlagschatten auf den Cylinder, so zieht man durch den Punkt eine Parallele zu den Mantellinien bis zum Schnitt P mit der Basisebene, mit andern Worten, man projiziert den schattenwerfenden Punkt in gleicher Weise auf die Basisebene, wie zuvor den Lichtstrahl selbst. Durch den erhaltenen Punkt zieht man eine Sekante PL in die Basislinie mit der in der Basisebene gültigen Lichtrichtung und erhält in dem Schnittpunkt zwischen Sekante und Basis den Fusspunkt M der Mantellinie, auf welcher der Schlagschattenpunkt S liegt.

Im folgenden, Art. 49 bis 54, sind einige besondere Fälle des schiefgerichteten Cylinders behandelt.

Der beliebig schiefgerichtete Cylinder mit Basis 49. in einer Grundebene.

In Figur 49 schneidet der Lichtstrahl durch den Mantellinienpunkt cc' die Basisebene, zugleich horizontale Grundebene, in k . Die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Fusspunkt der Mantellinie, fk im Grundriss, giebt die Richtung der Schnittlinien zwischen der Basisebene und den parallel zu den Mantellinien gelegten Lichtstrahlenebenen, mit andern Worten, die in der Basisebene gültige Lichtrichtung. Die drei Tangenten dieser Richtung geben in bb' , dd' und ee' die Fusspunkte der schattenabgrenzenden Mantellinien. Durch den schlagschattenwerfenden Punkt aa' ist die Parallele zu den

Mantellinien gezogen bis zum Schnitt mit der Basisebene in pp' . Die Sekante pm parallel fk liefert in mm' den Fusspunkt der Mantellinie, auf welcher der Schlagschattenpunkt ss' liegen muss. Das vertikale Uebereinanderliegen



Figur 49.

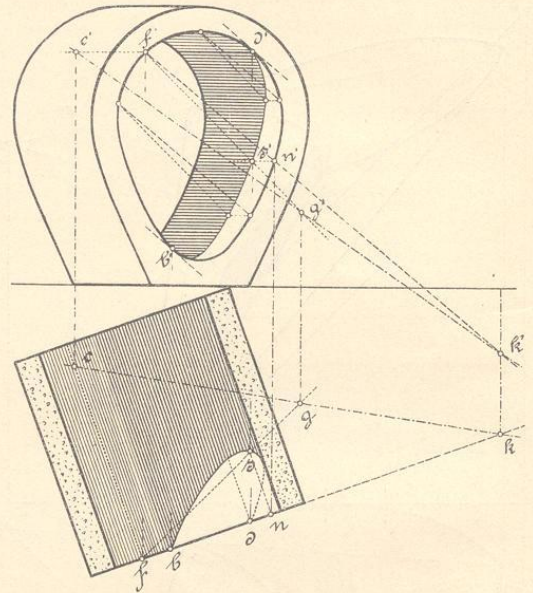
der Punkte s und s' giebt eine Probe. — Anstatt durch cc' hätte man auch durch aa' allein einen Lichtstrahl bis ll' und eine Parallele zu den Mantellinien bis pp' ziehen können, um in pl die Lichtrichtung in der Basisebene zu erhalten.

50. Der horizontale gerade Cylinder schief gerichtet (wagrecht liegende Röhre).

In Figur 50 liegt ein schiefgerichteter Cylinder, als Röhre beliebigen Querschnitts gedacht, auf der Horizontalebene. Selbstbeschattung und Körperschattengrenzen bestimmen sich wie folgt:

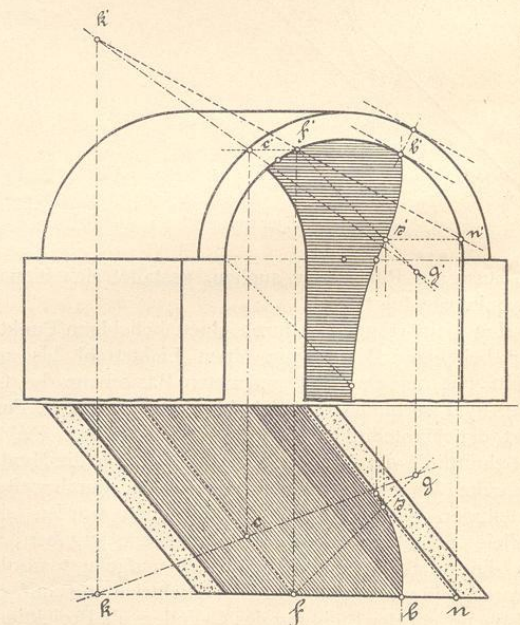
Man zieht durch einen schattenwerfenden Randpunkt ff' eine Mantellinie und einen Lichtstrahl, nimmt auf jeder dieser Linien einen beliebigen Punkt an und zieht die Verbindungslinie dieser Punkte cg bis zum Schnitt mit der (vertikalen) Basisebene des Cylinders in k , woraus im Aufriss auf $c'g'$ der Punkt k' erhalten wird. $f'k'$ ist im Aufriss die in der Basisebene gültige Lichtrichtung. Diese Linie schneidet die Basislinie in einem zweiten Punkt n' . Wo die Mantellinie durch n' getroffen wird vom Aufriss des Lichtstrahls durch f' , da ist der Schlagschatten s' des Punktes f' . Der zugehörige Grundrisspunkt s findet sich durch Hinunterloten auf den Lichtstrahl fg ; das Zeichnen der Mantellinie durch n auch im Grundriss liefert eine Probe. Für weitere Randpunkte ist immer nur eine Sehne parallel $f'n'$ zu ziehen, um die Mantellinie für den Schlag-

schatten des ausgewählten Randpunktes zu erhalten. Die Körperschattengrenzen sind die Mantellinien durch die Berührungspunkte b' und d' der Tangenten, die parallel zu $f'k'$ an beide Basislinien gezogen werden.



Figur 50.

Ist der Cylinder ein Kreiscylinder, so kann man die Umklappung der Basisebene samt der darauf erscheinenden Schnittlinie $f'k'$ in die Horizontalebene zu Hilfe nehmen; die Tangenten sind dann an einen Kreis zu ziehen; doch ist damit die Arbeit kaum vermindert.



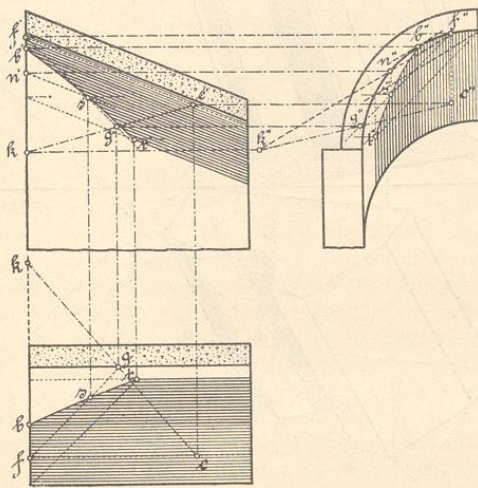
Figur 51.

51. Der horizontale Cylinder schief abgeschnitten (schiefes Tonnengewölbe).

Die Konstruktion der Schattengrenzen, die auf die cylindrische Leibungsfläche des Gewölbs fallen, ist ganz mit denselben Worten, angewendet auf Figur 51, beschrieben wie in Art. 50. Ein Teil des Schattens der Stirnbogenlinie fällt auf die vertikale Leibungsebene des Widerlagers und bestimmt sich einfach nach Art. 22.

52. Der schiefgerichtete Cylinder parallel zur Vertikalebene, vertikal und gerade abgeschnitten (steigendes Tonnengewölbe im Längenschnitt).

Man zeichnet (Figur 52) die Seitenprojektion des Gewölbes, wie sie ja schon zu dessen unzweideutiger Darstellung notwendig ist. (Hier ist sie als Ansicht von der rechten Seite der Aufrissfigur dargestellt, wobei der Licht-



Figur 52.

strahl in der Seitenprojektion von rechts oben nach links unten gerichtet ist.)

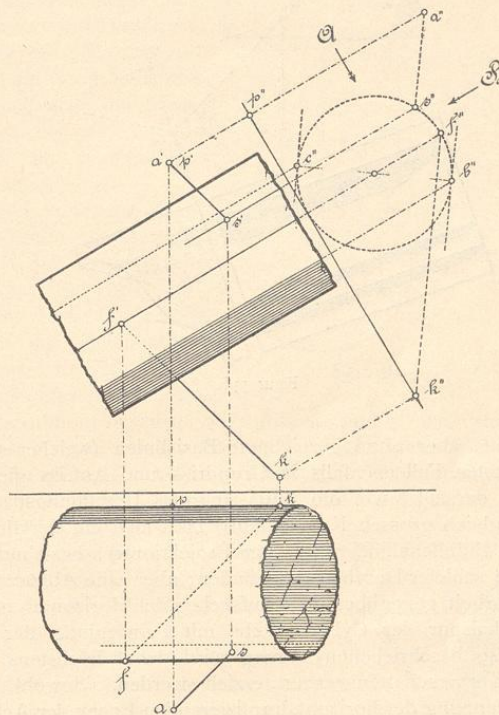
Auch für diese Lösung gilt im übrigen ganz derselbe Wortlaut angewendet auf Figur 52, wie für den horizontalen Cylinder in Art. 50; nur sind die dort beschriebenen Operationen immer zugleich in der Seitenprojektion durchgeführt, welche in der Linie $f''k''$ die in der Basisebene gültige Lichtstrahlrichtung anstatt der Aufrissfigur darbietet.

53. Cylinderfläche parallel zur Vertikalebene ohne Basis, aber mit bekanntem Normalschnitt.

In Figur 53a sind die Körperschattengrenzen und der Schlagschatten eines äusseren Punktes auf einem in gerader Ansicht gezeichneten steigenden Kreiscylinder bestimmt, ohne dass elliptische Projektionen zu Hilfe genommen wurden.

Man denkt sich den Cylinder auf eine zu seiner Achse senkrechte Ebene projiziert und diese (kreisförmige)

Projektion in die Vertikalebene umgeklappt. Durch einen beliebigen Punkt ff' einer Mantellinie zieht man einen Lichtstrahl fk bis zu der vertikalen Ebene der äussersten Mantellinie (oder einer beliebigen andern parallelen Ebene). Diesen Lichtstrahl projiziert man ebenfalls auf die umzuklappende Ebene, indem man k' nach k'' projiziert und $f''k''$ zieht. Diese Linie bedeutet in der Umklappung zugleich eine Ebene, die durch die Mantellinie f'' und den Lichtstrahl gelegt ist und giebt damit die für die umgeklappte Normalschnittebene des Cylinders gültige Lichtstrahlrichtung, welche zu benutzen ist wie in den früheren Fällen. Beim Zurücktragen der Mantellinien b'' und d'' in die andern Projektionen ist nur zu beachten, dass der



Figur 53 a.

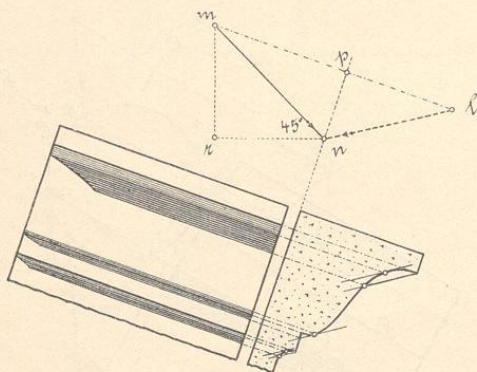
Grundriss einer Ansicht des Cylinders von A aus, der Aufriss einer solchen von B aus entspricht. Der äussere schattenwerfende Punkt aa' wird ebenfalls auf die Normalschnittebene projiziert und mit ihr umgeklappt, indem $p''a'' = pa$ gemacht wird. Der Lichtstrahl $a''s''$ parallel $f''k''$ liefert s'' und damit leicht s' und s .

Die Lösung ist auch ohne Grundriss durchführbar, wofür in Figur 53b ein Beispiel mit beliebigem Normalschnitt der Cylinderfläche gezeichnet ist. Die Hilfsfigur über dem Gesims zeigt die Bestimmung der Lichtstrahlrichtung ln , die in der umgeklappten Ebene der Normalschnittlinie zu benutzen ist. Durch den Punkt n der Fusslinie der Umklappung ist ein Lichtstrahl Mn gezogen gedacht. Der obere Endpunkt M dieses Lichtstrahls liegt vor seiner Projektion m um das Mass $Mm = mr = rn$. Wird dieser Lichtstrahl in der Richtung

der Mantellinien, das heisst rechtwinklig auf die ursprüngliche Normalschnittebene projiziert, so fällt der Punkt L , die Projektion von M , ebensoweit vor p , als Punkt M von m absteht. Wird also die Normalschnittebene samt ihrer Lichtstrahlprojektion in die Vertikalebene umgeklappt, so erscheint $lp = Lp = Mm = mr$, und ln ist die umgeklappte, für die Normalschnittfigur gültige Lichtstrahlrichtung.

Eine Verwertung der Konstruktion für gekrümmte Röhrenflächen, die parallel zur Vertikalebene stehen, ist in Art. 72 erklärt.

Auch für den beliebig schief gerichteten Kreiscylinder oder anderen Cylinder mit bekanntem Normal-



Figur 53 b.

schnitt, aber ohne gezeichnete Basislinien (welcher sich im ersten Fall ebenfalls in Grundriss und Aufriss gleich breit darstellt, wie die Auffassung als Umhüllungsfläche von gleich grossen Kugeln lehrt) lässt sich ein Verfahren ohne Zuhilfenahme elliptischer Projektionen, beziehungsweise schiefer Durchschnitte finden; aber eine Abkürzung der Arbeit gegenüber dem Aufsuchen der Horizontal- oder Vertikalspur der Cylinderfläche mit Anwendung der in Art. 49 beschriebenen Lösung wird damit höchstens für die Körperschattengrenzen erzielt werden. Sowohl die Umklappung der horizontalprojizierenden Ebene der Achse als diejenige der Normalschnittebene in die horizontale Grundebene sind dabei zu Hilfe zu nehmen. Auch würde die Lösung selten praktisch zu verwerten sein.

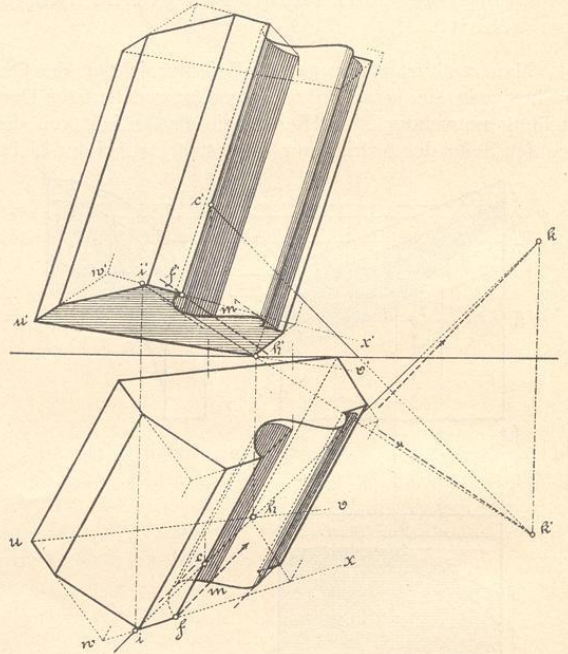
54. Der beliebig schief gerichtete Cylinder mit beliebig geformter schiefstehender Basis.

Durch einen Punkt cc' einer Mantellinie (Figur 54) zieht man einen Lichtstrahl. Um dessen Schnitt mit der Basisebene zu finden, zieht man auf dieser zwei geeignete gerade Linien uv und wx , welche den Lichtstrahlgrundriss in h und i schneiden; diese Punkte lotet man hinauf in den Aufriss nach h' und i' und hat dann in $h'i'$ die Schnittlinie der Vertikalebene des Lichtstrahls mit der erweiterten Basisebene. Wo diese Schnittlinie getroffen wird vom Aufriss des Lichtstrahls, da ist der Schnittpunkt des Lichtstrahls mit der Basisebene k' im Aufriss.

Das Hinunterloten (hier Hinaufloten) auf den Lichtstrahlgrundriss giebt dort k .

Die Verbindungslinie von kk' mit dem Fusspunkt der Mantellinie ff' ergibt in Grundriss und Aufriss die Projektionen fk und $f'k'$ der Schnittlinie der Basisebene mit einer durch die Mantellinie cm gelegten Lichtstrahlenebene. Diese auf die Basisebene mit der Richtung der Cylinderfläche projizierte Lichtstrahlrichtung ist zu benutzen wie in allen früher behandelten Fällen des schiefgerichteten Cylinders.

Wirft ein äusserer Punkt aa' einen Schlagschatten auf den Cylinder, so ist dieser Punkt in der Richtung



Figur 54.

der Cylinderachse auf die Basisebene zu projizieren. Dies geschieht, nachdem durch a und a' die projizierenden Parallelen zu den Mantellinien gezogen sind, ganz auf demselben Weg, der zuvor für das Aufsuchen des Schnittpunktes k' angegeben worden ist. Da dieses Projizieren aber ziemlich zeitraubend ist, so wird man bei vielen schlagschattenwerfenden Punkten mit Aufsuchen der Horizontalspur der Cylinderfläche unter Anwendung von Art. 49, oder auch mit der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen, d. h. mit Hilfe der Schnittkurven vertikaler Lichtstrahlenebenen, rascher zum Ziel kommen, da ja jene Schnittkurven alle kongruent sind und einmal konstruiert durch Rücken eines Pausblattes mit Durchstechen der Punkte rasch erhalten werden können.

VII. Schatten auf Drehungsflächen.

55. Erstes Verfahren für Körper- und Schlagschattengrenzen: Drehungsflächen mit Achse senkrecht zu einer Grundebene nach der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen behandelt.

Diejenigen Lagen der Drehungsflächen, bei welchen die Achsen vertikal, oder senkrecht zur Vertikalebene, oder parallel zum Grundschnitt gerichtet sind, wurden schon in Art. 30 u. 31 als Fälle der Anwendbarkeit der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen behandelt. Dieses erste Verfahren für beide Arten von Schattengrenzen ist aber im allgemeinen nicht nur zeitraubender, sondern auch wegen der in Art. 35 beschriebenen Mängel minder zweckmässig als die im folgenden unter Art. 56, 57 und 61 beschriebenen.

Bei Drehungsflächen mit kreisförmigen oder kegelschnittförmigen Meridianen lassen sich die Körperschattengrenzen nach Art. 56 u. 57 mit voller Bestimmtheit erhalten; für andere Meridianlinien sind zwar auch bei diesen Verfahren die Berührungspunkte von Tangenten schätzungsweise einzutragen, was noch immer eine Unsicherheit mit sich bringt; diese ist aber geringer als bei der allgemeinen Lösung.

Für Schlagschattengrenzen ist das in Art. 61 beschriebene Verfahren, das leider fast nur in denjenigen Fällen rasch fördert, in welchen ein Parallelkreis als Kante den Schatten wirft, in erster Linie gebräuchlich. Wo ein berührender Lichtstrahlencylinder die Schattengrenze erzeugt, da hat für diese meist die allgemeine Lösung einzutreten, die ja für die Schlagschattengrenzen minder unsicher ist als für Körperschatten. Die schärfere Bestimmung der letzteren nach den Verfahren in Art. 56 und 57 kommt hiebei auch der genaueren Konstruktion der Schlagschattengrenze zu gut, da diese den Schatten der Körperschattengrenze darstellt, so z. B. in der Beschattung und Selbstbeschattung nach Figur 37. In bestimmten Fällen ist auch die Schlagschattenbestimmung nach Art. 62 zweckmässig.

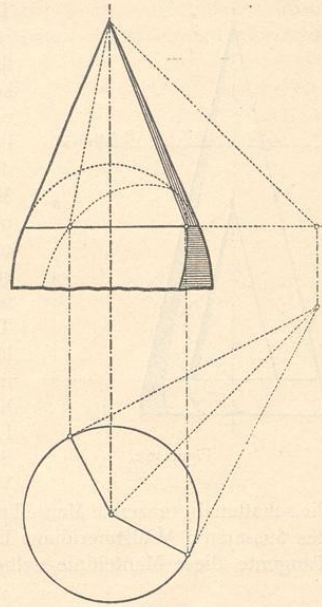
56. Zweites Verfahren für Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe von berührenden Kreiskegeln.

Wenn man sich (Figuren 56a u. 56b) an irgend einen Meridian einer Drehungsfläche eine Tangente gezogen denkt und diese mit dem Meridian um die Achse dreht, so beschreibt der Berührungspunkt einen Parallelkreis und die Tangente selber eine Kegelfläche, deren Spitze in der Drehachse liegt. Diese Kegelfläche hat eine unendlich niedere Zone gemeinschaftlich mit der Drehungsfläche, und wo die Schattengrenze auf dieser Zone als einem Bestandteil des Kegels liegt, da muss sie auch liegen, wenn man die Zone als Bestandteil der Drehungsfläche betrachtet. Wenn man also nach bekanntem Verfahren die Schattengrenze auf dem Kegel konstruiert und zusieht, wo die schattenabgrenzende Mantellinie den Par-

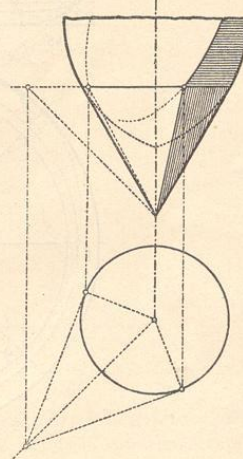
allelkreis schneidet, so hat man im erhaltenen Schnittpunkt zugleich einen Punkt der Körperschattengrenze auf der Drehungsfläche. Wo die Tangente am Meridian parallel wird zur Achse, da geht die Kegelfläche in eine Cylinderfläche über, und es ist auch auf dieser die schattenabgrenzende Mantellinie in bekannter Weise zu suchen. Zu beachten ist, dass für die konvexen Drehungsflächen konvexe Kegel, für die hohlen Drehungsflächen Hohlkegel beizuziehen sind. Die Grenzlinien der Schatten sind zwar für beide Fälle dieselben; aber die Lichtfläche des einen Falls wird im andern zur Schattenfläche.

Bei Anwendung dieses Verfahrens findet sich, dass die Kegelspitzen und ihre Schatten meist in zu grosse Ferne und über das Zeichenblatt hinausfallen. Man kann aber in diesen Fällen die Konstruktion trotzdem durchführen, indem man die zu grossen Kegel auf die Hälfte oder einen anderen Bruchteil ihrer Basis verkleinert, dann den Schattenpunkt in diesem kleineren Massstab konstruiert und endlich den erhaltenen Abstand von der Drehachse im gleichen Verhältnis wieder vergrössert. Fig. 56c soll diese Hilfskonstruktion anschaulich machen. Die Mantellinien für den Kegelschatten sind nicht wirklich zu ziehen, da man ja nur ihren Fusspunkt braucht; andere umständlich mit Worten darzulegende Vereinfachungen der am besten neben der Hauptfigur nur in kleinem Massstab und mit einem einzigen Kreis als Basis für alle Kegel auszuführenden Hilfskonstruktion ergeben sich bei mehrmaliger Ausführung von selbst.

Nach dem vorbeschriebenen Verfahren lassen sich für alle Drehungsflächen, besonders aber für solche mit kreisförmigen Meridianstücken, rasch einige wichtige Punkte der Schattenkurve konstruieren, welche die Lage und Form dieser Kurve schon für viele Fälle genügend einzeichnen gestatten. Bei einem Wulst mit vertikaler Drehachse (Figur 56d) lassen sich z. B. 8 Punkte ohne eingehende Konstruktion leicht auffinden. Denkt man

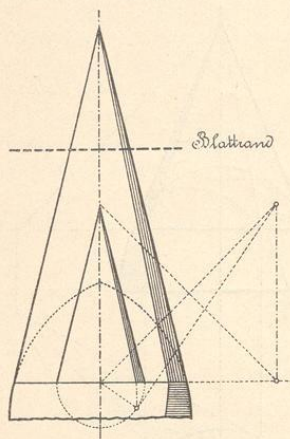


Figur 56a.



Figur 56b.

sich eine Tangente, gegen oben die Achse schneidend, unter 45° an den äussersten Meridian rechts gezogen, so ist der Berührungspunkt a' der Endpunkt des sichtbaren Teils der Körperschattenkurve. Denn der mit dieser



Figur 56 c.

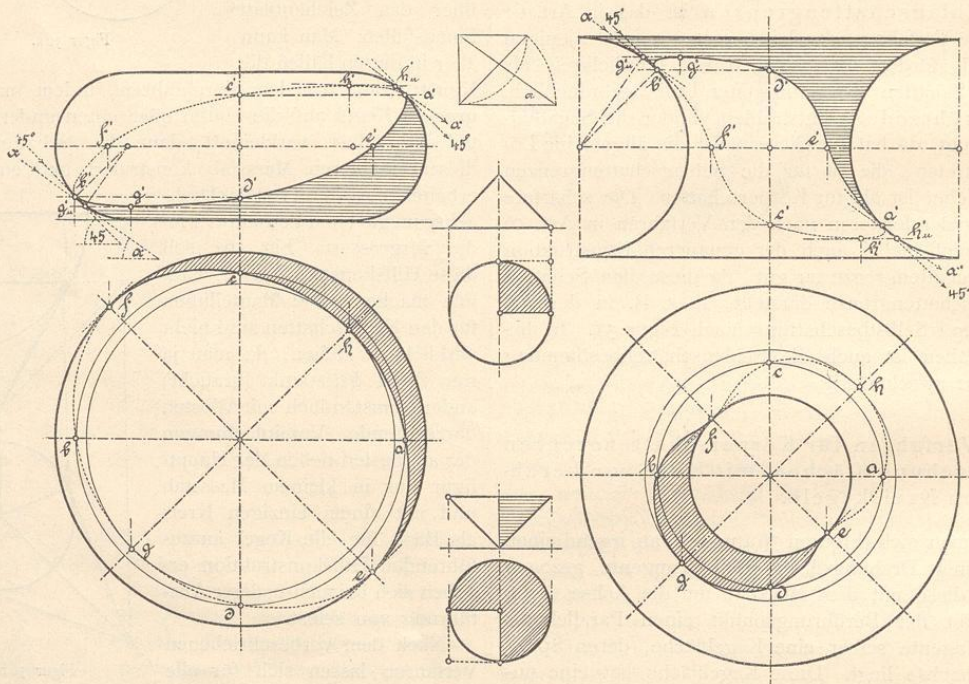
Tangente gedachte Berührungskegel der Wulstfläche ist ein Drehungskegel, dessen Mantellinien unter 45° geneigt sind, und bei einem solchen liegen die schattenabgrenzenden Mantellinien im Grundriss parallel zum Grundriss und senkrecht zum Grundriss, so dass die Schattenfläche genau der vierte Teil des Mantels ist. Dies leuchtet sofort ein, wenn man den Kegel für sich herauszeichnet und die Lage des Schattens seiner Spitze betrachtet (Fig. 56 e).

Weil nun auf dem Kegel die schattenabgrenzende Mantellinie in der vertikalen Ebene des äussersten Wulstmeridians liegt, so ist die gezogene Tangente diese Mantellinie selber, und ihr Berührungspunkt

b' liefert (Figur 56 f zeigt den Hilfskegel für sich). Da ferner auf dem Wulst alle Schattierung symmetrisch zu der vertikalen Ebene sein muss, die durch die Achse unter 45° zum Grundriss gelegt und die „Hauptmeridianebene“ genannt wird, so finden sich leicht die weiteren Punkte c' und d' gleichhoch liegend mit a' und b' auf der vertikalen Mittelachse der Figur. Im Grundriss müssen $a b c d$ auf demselben Parallelkreis liegen.

Auf dem grössten Horizontalkreis des Wulstes müssen die Schattenpunkte da liegen, wo die schattenabgrenzenden Mantellinien eines vertikalen Cylinders mit diesem Kreis als Basis liegen würden. So finden sich durch einen unter 45° geneigten Durchmesser dieses Kreises die Schattenpunkte ee' und ff' .

Noch zwei weitere Punkte, und zwar der tiefstliegende und höchstliegende Punkt, ergeben sich durch Betrachtung der vertikalen Ebene, die durch die Achse unter 45° zum Grundriss gelegt wird. Diese Lichtstrahlen-ebene schneidet den Wulst nach Meridianen; wo der Lichtstrahl diese Meridiane berührt, da liegen die gesuchten Punkte. Denkt man sich diese Ebene um die Achse gedreht, bis sie parallel zur Vertikalebene steht, so erscheinen die Grenzlinien der Figur als Umklappung der Meridiane. Es sind also nur an die äussersten Meridiane zwei Tangenten mit derjenigen Richtung zu ziehen, welche der Lichtstrahl in seiner eigenen Vertikalebene



Figur 56 d, e, f, g.

punkt mit dem Meridian ein Punkt der Schattenkurve. Aus a' findet sich leicht der zugehörige Grundrisspunkt a .

Ganz dieselbe Betrachtung ergibt, dass eine an den linken äussersten Meridian unter 45° gezogene nach unten gerichtete Tangente den linken Endpunkt der Kurve

darbietet. Diese Richtung ist flacher als 45° ; sie findet sich nach Art. 38 ausgedrückt durch den Winkel $\alpha = 35^\circ 15,9'$ oder durch die Richtung der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen vertikale Kathete gleich einem beliebigen Mass a und dessen horizontale Kathete

gleich $a\sqrt{2}$, das heisst gleich der Diagonale eines Quadrats über a . Die Berührungspunkte dieser zwei Tangenten seien g'_n und h'_n ; durch das Zurückklappen dieser Punkte in ihre ursprüngliche Meridianebene findet sich die Lage der Körperschattengrenzpunkte gg' und hh' , die um so wichtiger sind, als die horizontalen Parallelkreise im Aufriss, die zum Zurückklappen dienen, zugleich Tangenten an der Grenzkurve in diesen Punkten darstellen. In den Grundrisspunkten g und h hat die Grenzkurve im Grundriss eine kurze Symmetralachse, wogegen der senkrechte Durchmesser ef eine grosse Symmetralachse darstellt.

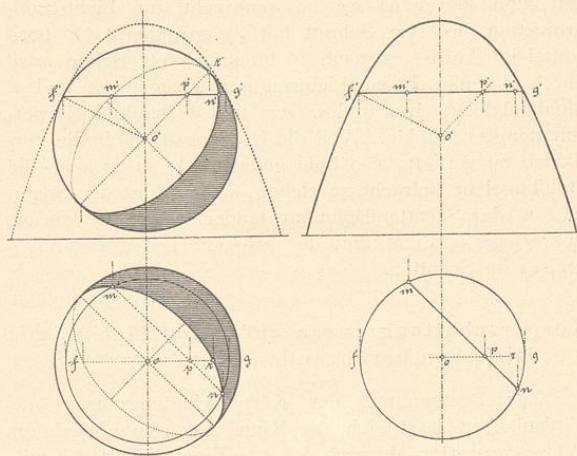
Ganz dieselbe Betrachtung führt zu den 8 Punkten der Wulstfläche mit konkavem Meridian, Fig. 56g. Wie bei diesen Wulstflächen, so lassen sich für alle anderen Drehungsflächen die wichtigsten Punkte der Körperschattengrenze rasch bestimmen. Auch für die Schlag-schattengrenze, die bei Drehungsflächen mit Selbstbeschattung hinzutritt, führt die Betrachtung der vertikalen Lichtstrahlenebene, die durch die Achse geht, und die Erwägung der Symmetrie der ganzen Schattierung in Beziehung auf diese Ebene zu einigen Schlüssen, so dass sich im Zusammenhang mit Art. 34 über den Verlauf der Schattengrenzen auf Drehungsflächen mit vertikaler Achse die in Art. 63 gegebenen Sätze zusammenstellen lassen. Die Anpassung dieser Sätze an die Lagen der Drehungsachsen senkrecht zur Vertikalebene und parallel zum Grundriss bedarf keiner Erklärung.

57. Drittes Verfahren für Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe von berührenden Kugeln.

Der Anschauung vielleicht minder leicht zugänglich, aber in der Ausführung einfacher und raumsparender ist ein drittes Verfahren zur Bestimmung der Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, nämlich dasjenige mit berührenden Kugeln. Jede Drehungsfläche kann aufgefasst werden als umhüllt von Kugeln verschiedener Grösse, deren Mittelpunkte auf der Achse der Drehungsfläche liegen und von denen jede die Fläche nach einem Parallelkreis berührt, längs welchem jeder Kugelradius normal zum zugehörigen Meridian der Fläche gerichtet ist. Einen solchen Parallelkreis ($f'g'$ in Figur 57a) kann man ebenso als eine sehr niedrige Zone der Kugel wie der Drehungsfläche auffassen, und wo die Schattengrenze darauf erscheint als auf einer Zone der Kugel, da muss sie auch liegen als Bestandteil der Schattengrenze der Drehungsfläche.

Hier ist voranzunehmen, was erst später (in Art. 66) ausgeführt wird, aber eines Beweises nicht bedarf, nämlich dass die Körperschattengrenze auf der Vollkugel ein Grosskreis senkrecht zur Lichtrichtung ist. Im Grundriss und Aufriss der Kugel (Figur 57a) projiziert sich dieser Grosskreis als eine Ellipse, deren grosse Achse ein Durchmesser der Kugelprojektion senkrecht zur Lichtstrahlprojektion ist. Die grosse Achse der einen Projektion projiziert sich in der andern Projektion horizontal. Wo diese Ellipse im Grundriss oder Aufriss geschnitten wird

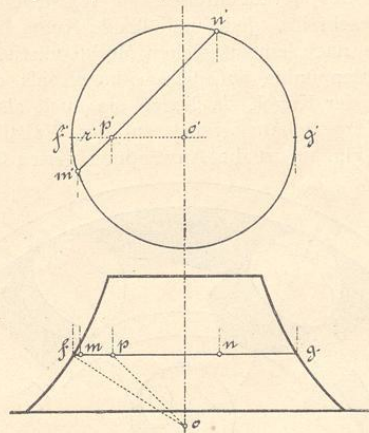
von der Projektion eines der zuvor genannten Parallelkreise $f'g'$, da ist ein Schattenpunkt auch für die Drehungsfläche. Die Grosskreisebene schneidet — wenn die Drehachse vertikal vorausgesetzt wird — die horizontale Parallelkreisebene nach einer gemeinschaftlichen Sehne mn , die wie die Grosskreisebene selbst normal zur Licht-



Figur 57 a, b.

richtung steht, also im Grundriss normal zur Lichtstrahlprojektion erscheint.

Sobald der Parallelkreis $f'g'$ in Aufriss und Grundriss der Drehungsfläche gezeichnet und die Normale der Meridianlinie $f'o'$ (als Kugelradius gedacht) gezogen ist,



Figur 57 c.

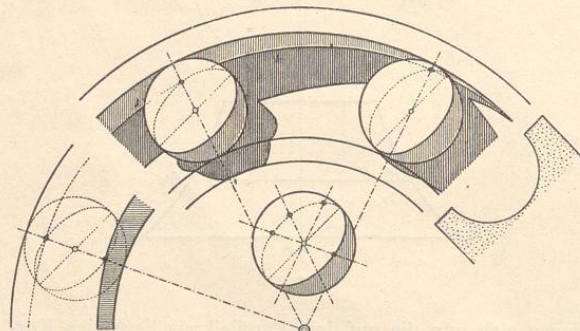
lassen sich nun die auf dem Parallelkreis liegenden Körperschattengrenzpunkte m und n rasch bestimmen, ohne dass die Kugelprojektionen und die Ellipsen gezeichnet werden müssten. Man zieht (Figur 57b) im Aufriss $o'p'$ senkrecht zur Lichtstrahlprojektion und im Grundriss den Radius or horizontal, lotet p' in den Grundriss auf or nach p , zieht durch p die Sehne senkrecht zur Lichtstrahlprojektion, erhält dadurch auf dem Parallelkreis m und n und lotet diese Punkte hinauf nach m' und n' . mm' und nn' sind Körperschattengrenzpunkte der Drehungsfläche.

Anwendung des Verfahrens mit den Berührungskugeln auf eine Drehungsfläche mit Achse senkrecht zur Vertikalebene vertieft in diese; Figur 57c.

fg sei der Parallelkreis, auf welchem die Körperschattengrenzpunkte zu suchen sind, im Grundriss; der Kreis um o' sei dessen Aufriss. fo im Grundriss ist normal zum Meridian; op ist senkrecht zur Lichtstrahlprojektion bis zum Schnitt mit fg gezogen, $o'r'$ horizontal im Aufriss, p nach p' hinaufgelotet; Sehne $m'n'$ durch p' senkrecht zur Lichtrichtung gezogen; m' und n' hinabgelotet nach m und n . mm' und nn' sind die Körperschattengrenzpunkte. Weil die Drehungsfläche in die Vertikalebene vertieft, also hohl gedacht ist, so ist auch die Hohlkugel in Betracht zu ziehen, also gehört der Bogen $m'f'n'$ der Schattenfläche an; andernfalls wäre von m' über f bis n' Licht und der grössere Teil des Parallelkreises im Schatten.

58. Körperschattengrenzen auf Wulstflächen, mit Hilfe von berührenden Kugeln.

Zur Bestimmung der Körperschattengrenzen auf Wulstflächen lässt sich die Kugel noch in einfacherer Weise verwerten als nach Art. 57. Eine Wulstfläche entsteht durch Drehung eines Kreises oder Kreisbogens um eine in seiner Ebene liegende Achse; sie ist also nicht nur Umhüllungsfläche von Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Drehungsachse liegen, sondern es liegt näher, sie als Umhüllungsfläche gleich grosser Kugeln aufzufassen, deren Mittelpunkte auf dem Kreis liegen, den der Mittelpunkt des Meridiankreises der Wulstfläche bei der Drehung beschreibt. Jede umhüllende Kugel berührt die Wulstfläche nach einem solchen Meridiankreis. Wo die Körperschattenpunkte auf diesem liegen als auf einem Bestandteil der Kugel, da liegen sie auch als Bestandteile der Körperschattengrenze auf der Wulstfläche. Im folgenden (Fig. 58) ist die Anwendung dieses Gedankens



Figur 58.

auf den konvexen Wulst und auf die halbe hohle Wulstfläche mit Drehungsachse senkrecht zur Vertikalebene gezeigt.

Man zeichnet als Aufriss eine Kugel mit dem Radius des Meridiankreises der Wulstfläche samt ihrem schattenabgrenzenden Grosskreis, wobei die Ellipse, als welche dieser erscheint, nach Art. 66 erhalten werden kann.

Dieses Kugelbild denkt man sich auf eine genügende Zahl von Radien zwischen die zwei Aufrisskreise der Wulstfläche gelegt, wie es Figur 58 anschaulich macht, und zwar so, dass der Mittelpunkt des Kugelbildes immer auf dem Radius liegt und die grosse Achse der Ellipse immer gleichgerichtet (unter 45°) bleibt, wie es der Auffassung des Kugelbildes als einer Vertikalprojektion entspricht. Wo die Ellipse auf der Kugel den Radius schneidet, da ist ein Punkt der Körperschattengrenze der Wulstfläche. Beim hohlen Wulst ist nur die punktierte Hälfte der Ellipse in Betracht zu ziehen; bei der konvexen Wulstfläche mit vollem Kreisquerschnitt werden für jede Lage des Kugelbildes zwei Punkte erhalten.

Zur praktischen Durchführung zeichnet man sich die Kugel nur einmal seitlich vom gegebenen Wulst (s. Figur) und zieht durch den Mittelpunkt des Kugelbildes parallele Durchmesser zu den Radien des Wulstaufisses, worauf sich die Abstände der Schattenpunkte von den Wulsträndern auf jedem solchen Durchmesser abstechen lassen. Auch kann man das Kugelbild auf Pauspapier zeichnen und nacheinander mit unveränderter Richtung auf die Radien legen, wobei sich in jeder Lage der Schattenpunkt auf den Radius durchstechen lässt.

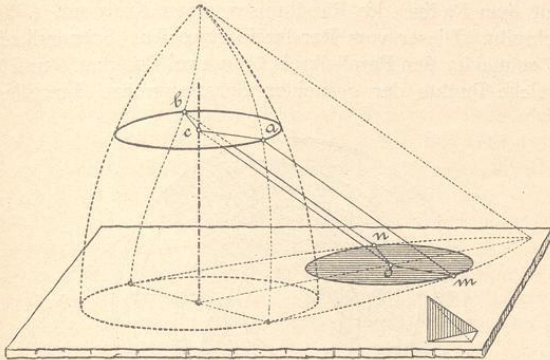
Die Anwendung auf andere Lagen der Drehachse, die einer Grundebene parallel sind, bedarf keiner Erklärung. Doch ist zu beachten, dass die Lösung — um so einfach zu sein — diejenige Projektion der Wulstfläche erfordert, in welcher deren Drehachse sich als ein Punkt projiziert, weil sich in andern Projektionen die Berührungskreise nicht als gerade Linien projizieren. Ist die Schattengrenze in einer andern Projektion verlangt, so ist sie in dieser erst durch Uebertragung der in jener ersten Projektion gefundenen Grenzlinie erhältlich.

Viertes Verfahren für Körperschattengrenzen 59. auf Drehungsflächen, mit Hilfe des Schlagschattens auf einer Ebene senkrecht zur Achse.

Der Schlagschatten eines Drehungskörpers auf einer Ebene senkrecht zu seiner Achse würde auf dem gewöhnlichen Weg dadurch erhalten, dass man zuerst die Körperschattengrenze auf dem Drehungskörper und dann deren Schlagschatten auf der Ebene in bekannter Weise aufsucht. Nun lässt sich aber dieser Schlagschatten meist rascher dadurch erhalten, dass man die Schatten einer genügenden Zahl von Parallelkreisen auf der Ebene zeichnet. Diese Schatten werden wieder kreisförmig und wie in Art. 10e auf kurzem Weg gefunden; ihre Umhüllungsline ist die Schlagschattengrenze.

Die so erhaltene Grenzlinie ist zugleich der Schlagschatten der Körperschattengrenzlinie und kann mit Umkehrung des gewöhnlichen Wegs zu deren Bestimmung verwertet werden (Figur 59a). Man bestimmt durch Schätzung möglichst genau einen Berührungspunkt m oder n zwischen einem Schattenkreis und der Umhüllungskurve; ein rückwärts durch den Punkt gezogener Lichtstrahl liefert als Schnitt mit dem Parallelkreis den zugehörigen schattenwerfenden Punkt a oder b , welcher

notwendig der Körperschattengrenze angehört. Auch durch zwei parallele Radien kann der schattenwerfende Punkt aus dem Schattenpunkt abgeleitet werden; ca ist parallel om ; cb ist parallel on ; wonach es nicht nötig



Figur 59a.

ist, den Parallelkreis ab selbst zu zeichnen, sondern genügt, dessen Schatten und die parallelen Radien darzustellen. Durch Wiederholung des Verfahrens mit weiteren Berührungspunkten lässt sich im Zusammenhang mit der Bestimmung wichtiger Punkte nach Art. 56 die Körperschattengrenze für bestimmte Fälle rascher erhalten als auf den anderen Wegen; aber allgemeine Brauchbarkeit

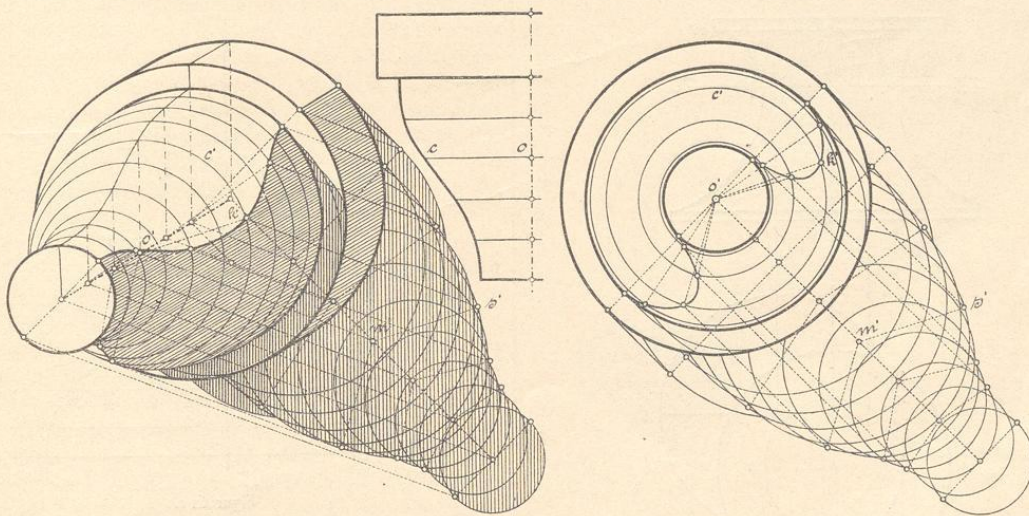
nen der Schatten der Parallelkreise des Körpers ist die Schlagschattengrenze auf der Vertikalebene als Umhüllungskurve der Schattenkreise gefunden worden. s' sei einer der beiden Berührungspunkte zwischen der Schlagschattengrenze und dem Schatten des Parallelkreises $o'c'$. Der rückwärts durch s' gezogene Lichtstrahl (oder das Ziehen der parallelen Radien $m's'$ und $o'k'$) liefert den Körperschattenpunkt k' .

Fünftes Verfahren für Körperschattengrenzen 60. auf Drehungsflächen, mit Hilfe der Normalkugel.

Ein fünftes Verfahren zur Bestimmung der Körperschattengrenzlinien auf Drehungsflächen mit Achse senkrecht zu einer Grundebene bietet die „Normalkugel“, die in der Beleuchtungskunde zur Bestimmung der Zwischenstufen der Beleuchtung verwertet wird. Hiefür ist auf Art. 93 bis 96 zu verweisen.

Zweites Verfahren für Schlagschattengrenzen 61. auf Drehungsflächen, mit Hilfe der kongruenten Schlagschatten auf Parallelkreisebenen.

Die in Art. 56 und 57 beschriebenen Verfahren haben den Mangel, dass sie nur Körperschatten-, nicht auch



Figur 59b.

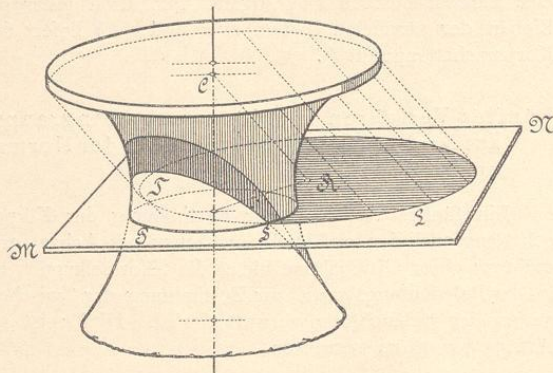
kann diese Art der Körperschattenbestimmung von Drehungsflächen nicht beanspruchen. Sie versagt leicht gerade an den wichtigsten Stellen durch Häufung der Linien. Körperschattengrenzen gegen Schlagschattenflächen ergeben sich dabei aus solchen Teilen jener Umhüllungskurve, welche im Innern der Schlagschattenfläche liegen, also später im Resultat der Konstruktion nicht mehr sichtbar sind.

Ein durchgeführtes Beispiel bietet Figur 59b mit perspektivischer und geometrischer Darstellung. Durch Zeich-

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

Schlagschattengrenzen liefern. Auch für die Bestimmung dieser letzten giebt es eine zweite Konstruktion, die zwar den entgegengesetzten Mangel hat, keine Körperschattengrenzen mitzuliefern, aber mit den Berührungskegeln oder -kugeln verbunden werden kann und dann entweder die zeitraubende allgemeine Lösung entbehrlich macht oder sie ergänzt und Proben für sie liefert. Sie ist in erster Linie und fast ausschliesslich wertvoll in den häufigen Fällen, in welchen ein Parallelkreisrand die Schlagschattengrenze erzeugt. Wo eine Auswölbung der Fläche oder

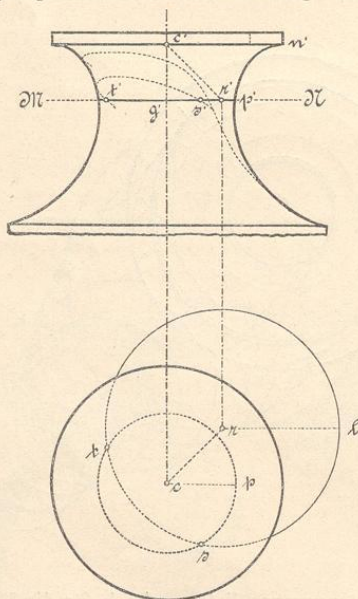
ein äusserer Körper die Beschattung hervorruft, ist die Konstruktion in Art. 62 vorzuziehen. Uebrigens leidet auch dieses neue Verfahren oft an sehr spitzwinkligen Durchschnitten zweier Kreislinien, die es ebenfalls unsicher machen, und zwar gerade an den wichtigsten



Figur 61 a.

Stellen, worin wieder die Verschwommenheit der im Raum vorhandenen Schattierung der Gebilde zum Ausdruck gelangt (vgl. Art. 35).

Figur 61 a bringt den Grundgedanken der Konstruktion perspektivisch zur Anschauung, und zwar an

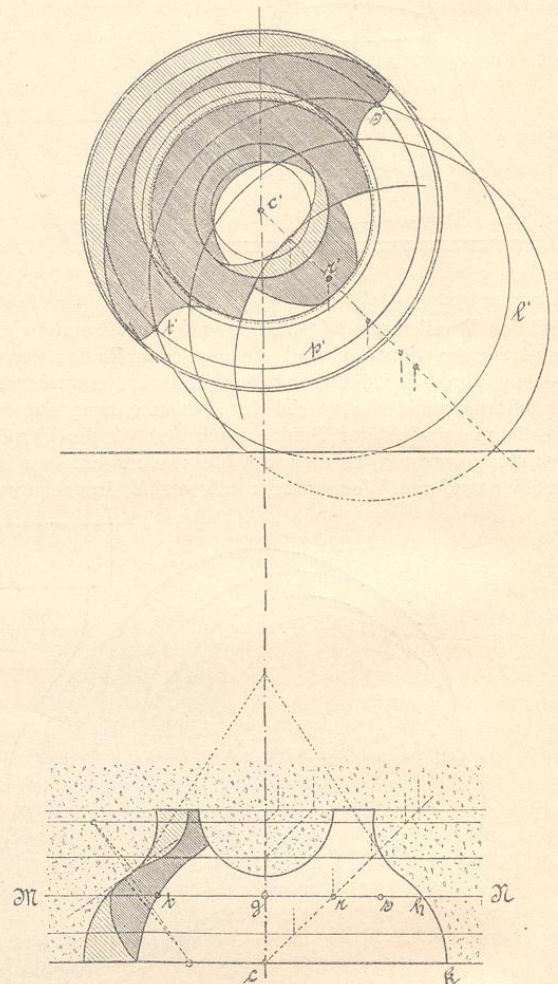


Figur 61 b.

einer Drehungsfläche mit vertikaler Achse und konkaver Meridianlinie.

Man schneidet die Drehungsfläche durch eine Ebene MN parallel zur Ebene des schattenwerfenden Randkreises und erhält als Schnittlinie einen Parallelkreis P , der im Grundriss als konzentrischer Kreis leicht zu zeichnen ist. Man sucht ferner auf der Schnittebene MN

den Schlagschatten des Randkreises. Dieser Schatten muss wieder ein Kreis sein, und man zeichnet ihn (nach Art. 10, Folgerung e) rasch, indem man den Schatten R des Mittelpunktes C auf der Ebene MN bestimmt und mit dem Radius des Randkreises einen Kreis um R beschreibt. Dieser vom Randkreis geworfene Schattenkreis L schneidet den Parallelkreis P in zwei Punkten S und T , welche Punkte der gesuchten Schattengrenze darstellen.



Figur 61 c.

Denn sie gehören der Drehungsfläche an, weil sie auf dem Parallelkreis liegen und gehören dem Schatten des Randes an, weil sie auf dem Schattenkreis L liegen. Durch Annahme weiterer Schnittebenen parallel zur Randebene erhält man weitere Paare von Schattenpunkten. In der Nähe des Randes werden die beiden sich schneidenden Kreise fast gleich gross und die Mittelpunkte liegen nahe beisammen, wodurch die Durchschnitte unsicher werden.

Figur 61 b zeigt dieselbe Konstruktion mit Darstellung durch Grundriss und Aufriss. Die Ebene MN schneidet

die Drehungsfläche nach dem Parallelkreis $g'p'$, der im Grundriss als konzentrischer Kreis um c mit $c'p' = g'p'$ erscheint. Der Schatten des Randkreises auf der Ebene MN wird im Grundriss erhalten durch Bestimmung des Schattens von cc' in rr' und durch Beschreiben des Kreises um r mit $rl = c'n'$. Hiedurch entstehen im Grundriss die Schlagschattenpunkte s und t , die nach s' und t' auf die Horizontale MN hinaufzuloten sind.

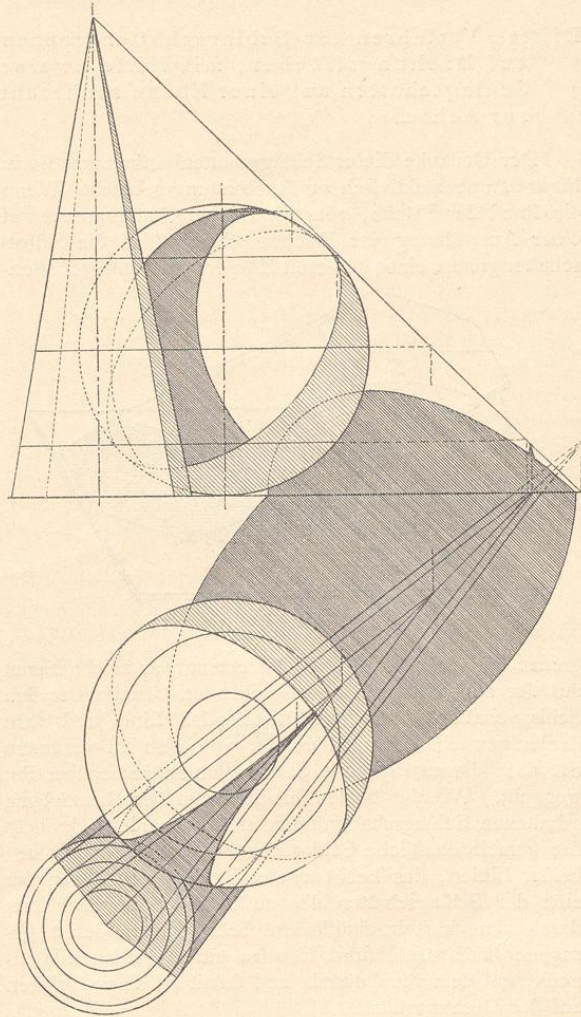
Figur 61 c bietet eine Drehungsfläche mit Achse senkrecht zur Vertikalebene, vertieft in diese, für welche die Körperschattengrenze mit Berührungskegeln nach Art. 56, die Schlagschattengrenze in der beschriebenen Weise konstruiert ist. Hier ist im Grundriss angenommen die Schnittebene MN ; sie schneidet die Fläche nach dem Parallelkreis $c'p'$, der im Aufriss als Kreis um c' mit $c'p' = gh$ erscheint. rr' ist der Schatten des Mittelpunktes cc' auf der Ebene MN und der Kreis um r mit $rl = ck$ ist der Schlagschatten des Randkreises auf dieser Ebene. Die beiden in der Ebene MN liegenden Kreise $c'p'$ und $r'l$ schneiden sich in s' und t' ; diese sind Punkte der Schlagschattengrenze im Aufriss und geben, auf MN hinuntergelotet, die zugehörigen Grundrisspunkte s und t (der Grundriss ist als Horizontalschnitt mit Ansicht nach unten dargestellt).

Auch in Figur 65 g liesse sich der Schatten der kreisförmigen Scheitelöffnung auf der Kuppelfläche mit Hilfe horizontaler Parallelkreisschnitte bestimmen, und zwar für jede beliebige Meridianform der Kuppel. Dasselbe gilt für die Schlagschattengrenzen auf den Kugelflächen der Figuren 65 d, 65 e u. 65 f, endlich für die Schlagschattengrenze auf der hohlen Wulstfläche der Figur 58. Selbst für die Beschattung von geraden und schiefen Kreiskegelflächen durch ihre kreisförmigen Randlinien kann das Verfahren oft näher liegen als das gewöhnliche; so wären z. B. die Schlagschattengrenzen in den Figuren 44 u. 45 damit erhältlich.

Wenn nicht ein Rand des Drehungskörpers, sondern eine durch Auswölbung mit berührenden Lichtstrahlen entstandene Körperschattengrenze den Schlagschatten wirft, wie in Figur 31 b, oder wenn der Schlagschatten von einem äusseren Körper herrührt, so gestaltet sich das Verfahren meist weniger einfach als nach Art. 62; doch dürfte es auch noch in diesem Fall oft eine Abkürzung gegenüber der allgemeinen Lösung bieten. Man sucht von der ganzen Körperschattengrenzlinie, welche die zu suchende Schlagschattengrenze als Schatten wirft und zuvor bestimmt sein muss, den Schlagschatten auf irgend einer Parallelkreisebene. Wo der Parallelkreis geschnitten wird von der erhaltenen Hilfsschlagschattenlinie, da liegen zwei Punkte der Schlagschattengrenze auf dem Körper. Für weitere Parallelkreisschnittebenen wird die Hilfsschlagschattenlinie offenbar kongruent der ersterhaltenen, da beide parallele Schnitte desselben Lichtstrahlencylinders bilden. Sie muss also nicht neu konstruiert werden, sondern ist durch paralleles Fortrücken der ersten in der Richtung des Lichtstrahls rasch zu erhalten. Wie weit sie fortrücken muss, hängt in bekannter Weise von der Länge des Achsenstücks zwischen beiden Parallelkreisen ab. Man wird sich die einmal konstruierte Hilfsschlag-

schattenlinie mit Angabe der Lichtstrahlrichtung auf Pauspapier zeichnen und sie von Kreis zu Kreis verschieben, um auf jedem die zwei Schnittpunkte durchstechen zu können. Doch ist dieses Verfahren schon fast identisch mit dem nächstfolgenden in Art. 62, und nur ausnahmsweise diesem vorzuziehen.

Ein einfaches hübsches Beispiel ist in Figur 61 d gezeichnet. Ein vertikaler Kreiskegel wirft seinen Schatten



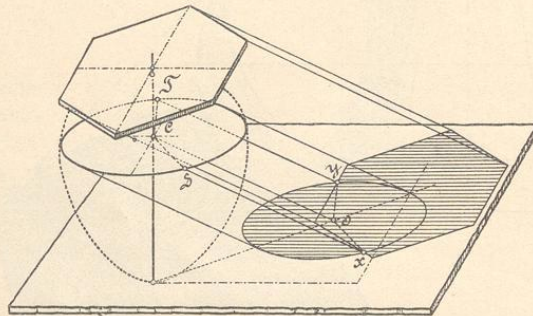
Figur 61 d.

auf eine Kugel oder eine Drehungsfläche mit vertikaler Achse. Eine horizontale Schnittebene schneidet sowohl den Kegel als die Drehungsfläche nach einem Kreis, der im Grundriss als solcher erscheint. Man sucht im Grundriss den Schatten des Kegels auf der Schnittebene, indem in bekannter Weise der Schnittpunkt eines durch die Kegelspitze gezogenen Lichtstrahls mit der Ebene bestimmt und aus diesem Punkt die zwei Tangenten an den Parallelkreis gezogen werden. Wo diese Tangenten den Parallelkreis der Drehungsfläche schneiden, da liegen zwei Punkte

der gesuchten Schlagschattengrenze. Denn die erhaltenen Punkte sind zugleich Punkte der Drehungsfläche und Punkte der am Kegel tangierenden Lichtstrahlenebenen. Das Hinaufloten auf den Parallelkreis im Aufriss liefert die zwei Schattenpunkte auch im Aufriss. Durch Annahme weiterer horizontaler Schnittebenen lassen sich beliebig viele weitere Paare von Schattengrenzpunkten finden.

62. Drittes Verfahren für Schlagschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe zweier Schlagschatten auf einer Ebene senkrecht zur Achse.

Der Gedanke dieser Schlagschattenbestimmung ist in Figur 62a perspektivisch zur Anschauung gebracht. Wenn ein Rand der Fläche, oder die Körperschattengrenze auf einer Auswölbung der Fläche, oder endlich die Selbstschattengrenze eines äusseren Körpers die Schlagschatten-

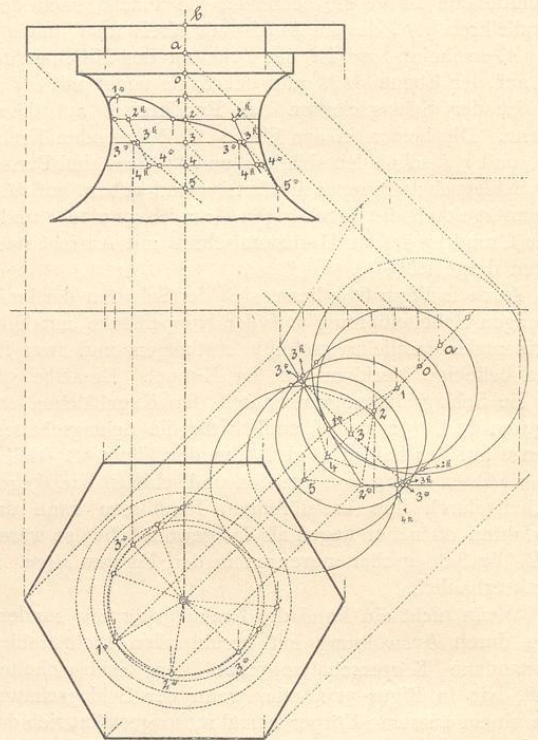


Figur 62 a.

grenze auf einer Drehungsfläche erzeugt, so zeichnet man auf der zur Achse senkrecht stehenden Grundebene den Schlagschatten jener schattenwerfenden Linie und dazu denjenigen eines Parallelkreises, von dem zu vermuten ist, dass die zu suchende Schlagschattengrenze über ihn weggeht. Wo die beiden hiedurch auf der Grundebene erhaltenen Schlagschattenlinien sich schneiden, da liegt der gemeinschaftliche Schlagschatten zweier „Fixpunkte“ beider Linien, das heisst zweier Punkte, von denen der eine der Schlagschatten des andern ist. Ein rückwärts durch den gemeinschaftlichen Schlagschattenpunkt gezogener Lichtstrahl führt also zu einem Schlagschattenpunkt auf dem Parallelkreis und damit zu einem solchen auf der Drehungsfläche.

Die Figur zeigt ein horizontales Sechseck und darunter einen beliebig ausgewählten Parallelkreis der durch ihren punktierten Umriss angedeuteten Drehungsfläche. Die Umrisse der Schlagschatten, die beide Figuren auf die Horizontalebene werfen, schneiden sich in den Punkten x und y . Die rückwärts durch diese Punkte bis zum Parallelkreis gezogenen Lichtstrahlen treffen diesen in S und T ; diese Punkte gehören der Schlagschattengrenze auf der Drehungsfläche an. Sie werden schärfer erhalten, wenn man im Schattenkreis die Radien ox und oy und im Parallelkreis die Radien CS und CT parallel zu jenen zieht.

Figur 62b zeigt ein durchgeführtes Beispiel. Es sind auf der Grundebene gezeichnet die Schlagschatten der sechsseitigen Deckplatte und der Parallelkreise $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Die Schlagschatten der Parallelkreise $2, 3, 4$ sind nach Art. 59 zur Bestimmung je zweier Körperschattengrenzpunkte auf jedem dieser Kreise mitbenutzt ($2k, 3k, 4k$). Schattenkreis 1 berührt den Sechseckschatten in $1s$, also enthält Parallelkreis 1 den obersten Punkt der Schlagschattengrenze $1s$. Die Schnittpunkte der Schlagschattenkreise 4 und 5 mit dem Sechseckschatten fallen innerhalb des Kurvenstücks $2k, 3k, 4k$, das auf der Horizontalebene den Schlagschatten der Fläche begrenzt. Hiedurch ist ausgedrückt, dass die auf den Parallelkreisen 4



Figur 62 b.

und 5 erhaltenen Schlagschattenpunkte keine wirklichen Schattengrenzpunkte sind, sondern schon in die Körperschattenfläche fallen. Diese Punkte gehören zwar der Schnittlinie an, die das sechsseitige (vielmehr achtseitige) von der Deckplatte ausgehende Lichtstrahlenprisma mit der Drehungsfläche bildet; die Schnittlinie ist aber nur soweit Schlagschattengrenze, als sie auf die Lichtfläche des Drehungskörpers zu liegen kommt.

Dieses Verfahren kann zuweilen bei Drehungskörpern, deren Selbstbeschattung nicht von Parallelkreiskanten herrührt, an die Stelle des in Art. 61 beschriebenen oder der allgemeinen Lösung treten; auch wird es in verwickelten Fällen oft willkommene Proben für das Resultat der allgemeinen Lösung liefern; aber allgemeine Brauchbarkeit kann es so wenig beanspruchen, wie die mit ihm

verwandte und kombinierbare Körperschattenbestimmung nach Art. 59.

63. Sätze über den Verlauf der Schattengrenzen auf Drehungsflächen mit vertikaler Achse.

a) Soweit der Umriss einer Drehungsfläche durch Meridiane gebildet ist, beginnen und endigen die Körperschattengrenzkurven im Aufriss an den Berührungspunkten der am Umriss tangierenden Lichtstrahlprojektionen. Die Kurven gehen in diesen Punkten mit Berührung am Umriss von ihrem sichtbaren Teil zum unsichtbaren über; doch ist die Berührung häufig eine solche von sehr kleinem Krümmungshalbmesser, so dass sie sich von einem Schnitt wenig unterscheidet. Die Grundrisse dieser Punkte liegen auf dem horizontalen Durchmesser des Grundplans.

b) Jedem solchen Kurvenpunkt entspricht ein gleich hoch liegender auf dem Aufriss der Achse des Drehungskörpers, da die Grenzkurve im Raum symmetrisch ist zu einer Lichtstrahlenebene, die durch die Achse gelegt wird. Die Grundrisse dieser Punkte liegen auf dem vertikalen Durchmesser des Grundplans und auf denselben Parallelkreisen wie die vorigen, wie überhaupt die ganze Grenzkurve im Grundriss symmetrisch ist zum Durchmesserlichtstrahl.

c) Wo der Umriss der Drehungsfläche eine vertikale Tangente hat, da finden sich die Schattenpunkte auf dem zugehörigen Parallelkreis da, wo die schattenabgrenzenden Mantellinien eines vertikalen Cylinders mit diesem Kreis als Basis liegen würden. Im Grundriss berührt im allgemeinen die Schattengrenzlinie in diesen Punkten deren Parallelkreis und geht, wenn dieser den Umriss bildet, vom sichtbaren Teil zum unsichtbaren über.

d) Die höchsten und tiefsten Punkte der Körperschattengrenze liegen im Grundriss auf einem parallel zum Lichtstrahl gezogenen Durchmesser. Ferner liegen diese Punkte auf denselben Parallelkreisen wie die Berührungspunkte von Tangenten, die im Aufriss unter dem Lichtstrahlenneigungswinkel $\alpha = 35^\circ 15,9'$ (s. Art. 38) an den Umriss der Drehungsfläche gezogen werden. Aus diesen zwei geometrischen Orten ergeben sich die Punkte in beiden Projektionen.

e) Schlagschattengrenzen, die vom Körper selbst geworfen werden, gehen im Grundriss und Aufriss berührend am Umriss vom sichtbaren Teil zum unsichtbaren über. Im Aufriss liegen die auf die Achse fallenden Kurvenpunkte gleichhoch mit den Berührungspunkten am Umriss, da auch die Schlagschattenkurve im Raum symmetrisch ist zur Lichtstrahlenmeridianebene. Aus demselben Grund erscheint der Grundriss der Schlagschattenkurve symmetrisch zum Durchmesserlichtstrahl.

f) Der höchste Punkt einer solchen Selbstbeschattungsgrenze liegt im Grundriss auf dem Durchmesserlichtstrahl. Ferner liegt der Punkt auf demselben Parallelkreis wie der Schnittpunkt, welchen die unter d) genannte Tangente mit dem Umriss der Drehungsfläche bildet.

g) Endpunkte einer Selbstbeschattungsgrenzlinie an deren Anstossen an einer Körperschattengrenzlinie sind meist zugleich Berührungspunkte zwischen der Schlag-

schattengrenze und einem Lichtstrahl, das heisst die Schlagschattengrenze hat an ihrem Endpunkt eine Tangente von 45° Neigung (sowohl im Grundriss als im Aufriss). Die Erscheinung findet sich da, wo die Schlagschattengrenze, als Schnitt des Lichtstrahlencylinders mit der Drehungsfläche aufgefasst und in dieser Eigenschaft fortgesetzt gedacht, über den letzten Lichtstrahl, den sie erreicht, nicht hinausgehen könnte, weil er die äusserste Mantellinie des Lichtstrahlencylinders bildet.

Schatten auf Drehungsflächen mit schiefgerichteter, aber einer Grundebene gleichlaufender Achse. 64.

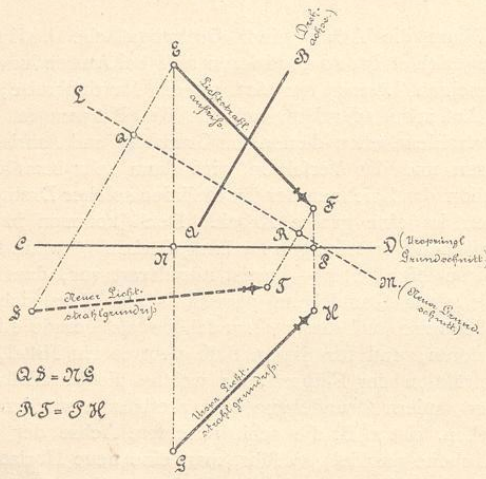
Wenn die Achse einer Drehungsfläche beliebig schiefgerichtet ist, so projizieren sich bei Anwendung der allgemeinen Lösung aus Art. 30 die Parallelkreise, die zum Aufsuchen der Durchschnitte des Körpers mit den Lichtstrahlenebenen dienen, im Grundriss und Aufriss als Ellipsen und das Verfahren wird dann sehr bemühend; ja schon das Zeichnen der Umrisslinien solcher Drehungsflächen ist eine grosse Arbeit. Doch kommen in den technischen Darstellungen Drehungsflächen — wenn überhaupt schiefgerichtet — meist nur derart vor, dass ihre Achse einer Grundebene parallel ist, so dass sich die Parallelkreise auf dieser Grundebene als gerade Linien projizieren, und für diesen Fall giebt es ein Mittel, die Konstruktion der Ellipsen, als welche die Parallelkreise in der andern Grundebene sich projizieren würden, zu umgehen. Ist z. B. die schiefgerichtete Achse der Vertikalebene parallel, so führt man eine neue Horizontalebene ein, die senkrecht zur Drehungsachse steht, auf welcher also die Parallelkreise sich als Kreise projizieren, und bestimmt die Richtungen der beiden Projektionen, welche der Lichtstrahl gegenüber dem neuen Grundschnitt annimmt. Wie sich die Drehungsfläche schattiert im neuen Grundebenenystem mit den neuen Lichtstrahlprojektionen, so muss sie sich auch im ursprünglichen Grundebenenystem mit den ursprünglichen Lichtstrahlenprojektionen schattieren, da ja durch Aenderung der Projektionsebene die Richtung des Lichtstrahls gegenüber der Fläche nicht geändert wird.

Es handelt sich nun um die Bestimmung der Lichtstrahlprojektionen im neuen Grundebenenystem. Die neue Vertikalprojektion des Lichtstrahls bleibt gegenüber der Drehungsachse in derselben Richtung wie zuvor, weil ja die Vertikalebene unveränderlich bleibt; es ändert sich nur der Winkel, den der Grundschnitt mit dieser Projektion bildet. — Zur Bestimmung der neuen Horizontalprojektion dient folgende Betrachtung: Da die ursprüngliche Vertikalebene bleibt, so bleiben auch die ursprünglichen horizontalen Entfernungen aller Punkte eines Lichtstrahls von der Vertikalebene dieselben wie zuvor. Diese Entfernungen erscheinen ebensowohl im neuen Grundriss in ihrer wahren Grösse als im ursprünglichen Grundriss, da sie der neuen Horizontalebene ebensowohl parallel sind wie der ursprünglichen. — Man hat also nur auf einem beliebigen Lichtstrahl des ursprünglichen Grundebenenystems zwei beliebige

Punkte anzunehmen und deren Abstände vom Grundschnitt im neuen Grundriss ebenso gross anzunehmen als sie im ursprünglichen Grundriss waren.

Ist in Figur 64a AB die gegebene Drehungsachse, CD der ursprüngliche Grundschnitt, EF und GH die ursprünglichen Lichtstrahlprojektionen, LM senkrecht zu AB der neue Grundschnitt, so macht man $QS = NG$ und $RT = PH$, wobei ES und FT senkrecht zum neuen Grundschnitt LM stehen. Es ist dann ST die neue Horizontalprojektion, EF die neue Vertikalprojektion des Lichtstrahls.

Das Verfahren ist übertragbar auf Drehungsflächen, die der Horizontalebene parallel sind, nicht aber auf solche,



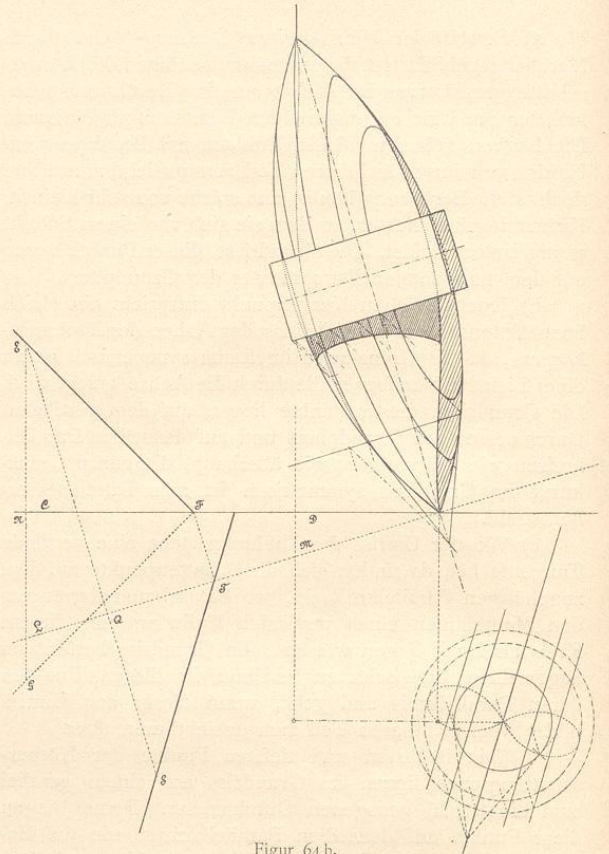
Figur 64a.

deren Achse keiner Grundebene parallel ist, weil bei diesen das gegebene Bild der Drehungsfläche in den neuen Projektionen sich ändern würde.

Der in Figur 64b nur als Aufriss gegebene Drehungskörper mit geneigter Achse parallel zur Vertikalebene (die Achse ist auch im Grundriss gezeichnet) bietet ein durchgeführtes Beispiel.

Durch den Punkt F des Grundchnitts ND ist ein Lichtstrahl gezogen und auf diesem ein beliebiger Punkt mit den Projektionen G und E angenommen. LM senkrecht zur Achse des Drehungskörpers ist der neue Grundschnitt. EQ und FT stehen senkrecht zu LM . QS ist gleich NG aufgetragen. (Da der Lichtstrahl durch den Grundchnitt ND gezogen worden ist, so ist das in Figur 64a vorhandene Mass PH hier gleich Null geworden, also ist auch das frühere Mass RT gleich Null zu machen, das heisst der Endpunkt T der neuen Lichtstrahlprojektion fällt nun in den neuen Grundchnitt LM .) EF und ST sind die zum Grundchnitt LM gehörigen Lichtstrahlprojektionen, mit deren Benützung der Körper schattiert worden ist. Zu diesem Zweck wurde im neuen Grundebenenystem sein Grundriss gezeichnet, in dem die Parallelkreise sich als Kreise projizieren. Die Schattengrenzen sind teils nach dem in Art. 30 beschriebenen allgemeinen Verfahren, teils mit den Berührungskugeln nach Art. 56 bestimmt, wobei nur die veränderte Licht-

strahlrichtung einen Unterschied hereingebracht hat. Auch der Schlagschatten des Körpers auf der Vertikalebene kann mit Hilfe der neuen Lichtstrahlprojektionen erhalten werden. Der auf die ursprüngliche Horizontalebene fallende Teil des Schlagschattens lässt sich, nachdem die



Figur 64b.

Schattengrenzlinie auf der Vertikalebene ganz konstruiert ist, aus dieser mit Hilfe der ursprünglichen Lichtstrahlprojektionen und des ursprünglichen Grundebenenystems ableiten, da ja alle Verbindungslinien der einander entsprechenden Punkte dieser beiden Schattenfiguren Lichtstrahlen sind.

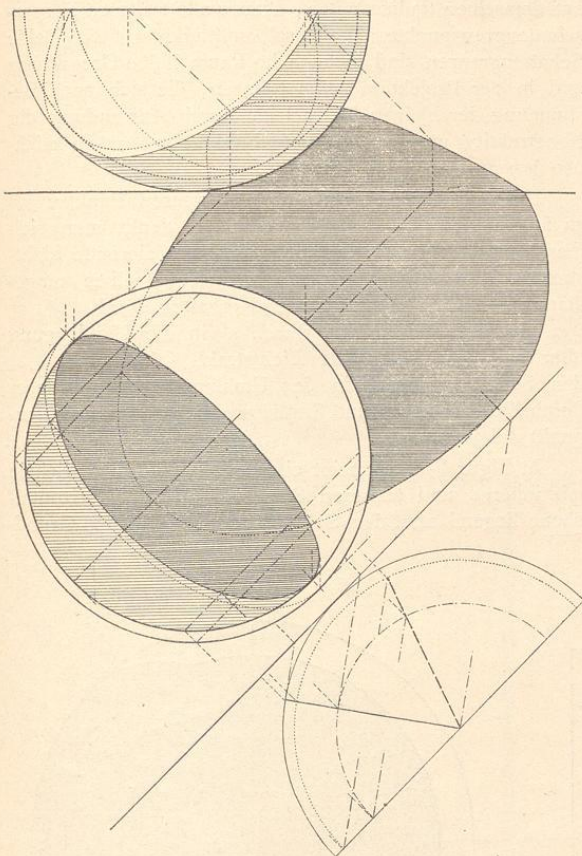
Ein zweites Hilfsmittel zur Körperschattenbestimmung auf schiefergerichteten Drehungsflächen mit Achse parallel zu einer Grundebene bietet die „Normalkugel“. S. Art. 97.

VIII. Schatten auf Kugelflächen.

Die Umklappung oder schräge Seitenansicht 65. als Hilfsmittel, elliptische Projektionen der Schnittkreise zu umgehen.

Bei Anwendung der in Art. 28 erklärten allgemeinen Lösung für die Beschattung gekrümmter Flächen auf die Kugelfläche, sei sie konvex oder konkav, werden die

Durchschnitte der vertikalen Lichtstrahlenebenen mit der Kugel kreisförmig; denn alle ebenen Durchschnitte der Kugel sind Kreise. Um nun das Konstruieren der Ellipsen zu umgehen, als welche diese Kreise in der Vertikalprojektion erscheinen würden, kann man die Lichtstrahlenebenen in die horizontale Grundebene umklappen und in dieser Umklappung, in welcher die Kreise sich als Kreise darstellen, die Schnittpunkte und Berührungspunkte der Lichtstrahlen aufsuchen. Dabei ist wie in Art. 38 zu beachten, dass die Neigung des Lichtstrahls



Figur 65 c.

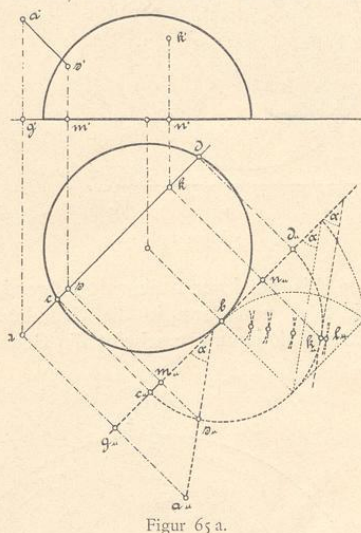
in seiner eigenen (umzuklappenden) vertikalen Ebene nicht 45° beträgt, sondern flacher ist, nämlich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen vertikale Kathete gleich einem beliebigen Mass a und dessen horizontale Kathete gleich $a\sqrt{2}$, das heisst gleich der Diagonale eines Quadrats über der Seite a (der Winkel ist $\alpha = 35^\circ 15,9'$). Damit die umgeklappten Kreise nicht auf die Kugelprojektion fallen und die Figur verwirren, schiebt man sie vor dem Umklappen parallel in der Richtung des Umklappens fort, alle in dieselbe Ebene, so dass die Umklappung auch als eine vollständige schräge Seitenansicht aufgefasst werden kann.

Anstatt der vertikalen Lichtstrahlenebenen, welche die Schatten zuerst im Grundriss liefern, benützt man,

wenn man die Grundrisssschatten nicht braucht, besser die vertikalprojizierenden Ebenen der Lichtstrahlen; denn die Kugel ist ja auch eine Drehungsfläche mit Achse senkrecht zur Vertikalebene. Die Durchschnitte dieser Ebenen mit der Kugel werden wieder Kreise und mit Einschluss der Lichtstrahlen wieder in die Vertikalebene umgeklappt. Der Winkel des Lichtstrahls mit der Umklappungsbasis oder Lichtstrahlenprojektion ist wieder derselbe wie bei Umklappung im Grundriss, nämlich $\alpha = 35^\circ 15,9'$.

Beispiel für die Umklappung in die Grundrissebene: Auf einer Halbkugel, deren Basis in der Horizontalebene liegt, ist der Schlagschatten eines äusseren Punktes zu suchen und die Körperschattengrenze zu bestimmen (Figur 65 a).

Man zieht durch den schattenwerfenden Punkt aa' einen Lichtstrahl; seine vertikale Ebene denkt man sich



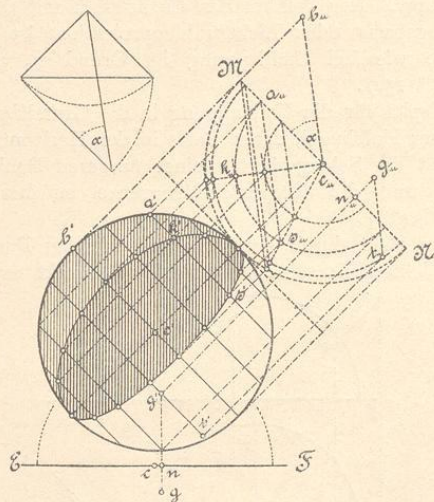
Figur 65 a.

bis b parallel verschoben und dann in die Horizontalebene umgeklappt. In der Umklappung rückt c nach c_u , d nach d_u , a nach a_u , indem $g_u a_u = g' a'$ gemacht wird. Der Schnitt mit der Kugel erscheint in der Umklappung als Halbkreis über $c_u d_u$, der Lichtstrahl als eine Linie durch a_u , die mit der Umklappungsbasis $g_u d_u$ den Winkel α einschliesst (seine Konstruktion ist aus der Figur ersichtlich). Der Schnittpunkt dieses umgeklappten Lichtstrahls mit dem Halbkreis ist der Schattenpunkt in der Umklappung s_u ; sein Zurückklappen in den Grundriss giebt dort den Schattenpunkt s ; das Hinaufloten von s in den Aufriss mit $m' s' = m_u s_u$ liefert den Schattenpunkt s' im Aufriss.

Ein zweiter Lichtstrahl, in der Umklappung als Tangente an den Halbkreis gezogen, ergibt in seinem Berührungspunkt k_u einen Körperschattengrenzpunkt in der Umklappung; er ist zurückzuklappen nach k und dieser Grundriss des Punktes hinaufzuloten in den Aufriss nach k' mit $n' k' = n_u k_u$. Durch weitere Schnittebenen parallel zu ad erhält man beliebig viele weitere Körperschattengrenzpunkte. In der Umklappungsfigur erscheint die Grenzlinie als ein Radius bl_u .

Beispiel für die Umklappung in die Vertikalebene. Eine Halbkugelfläche sei vertieft in der Vertikalebene; es ist ihre Selbstbeschattung zu bestimmen, und zwar nur im Aufriss (Figur 65 b).

Man denkt sich die vertikalprojizierende Ebene eines Lichtstrahls, der durch den Kugelmittelpunkt geht, parallel



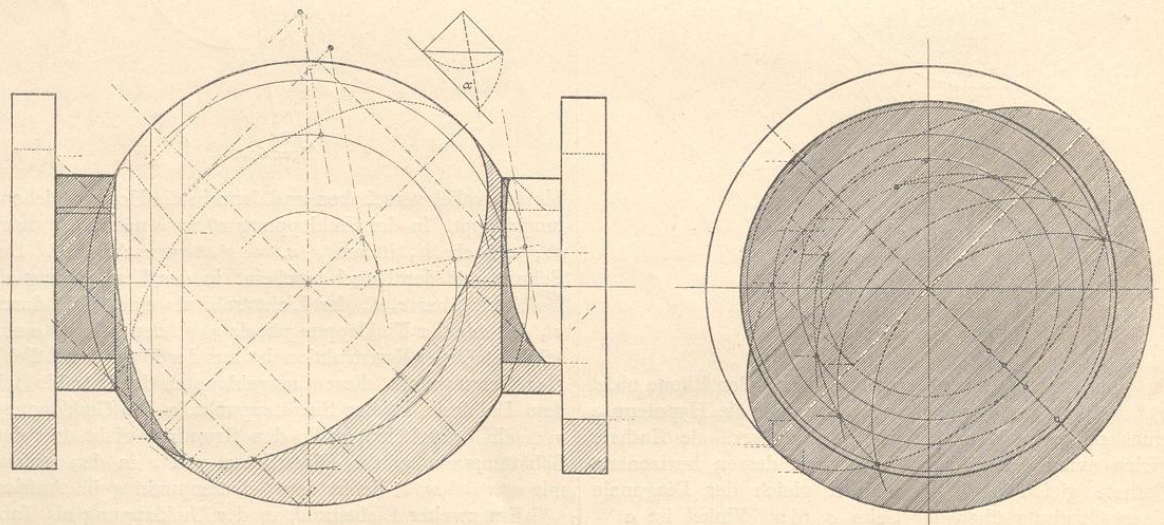
Figur 65 b.

fortgeschoben bis zu irgend einer genügend weit entfernten Linie MN und dann in die Grundebene umgeklappt. In der Umklappung erscheint die Schnittlinie der

Schnittlinie der Ebene mit der Kugel erscheint als konzentrischer Kreis um c_m der Lichtstrahl als eine Linie durch a_u parallel zu $b_u c_u$; er schneidet den Schnittkreis zum zweitenmal im Punkt s_u , welcher den Schlagschatten von a' in der Umklappung darstellt und zurückgeklappt den Aufrisschattenpunkt s' ergibt. Eine Tangente an den Schnittkreis parallel zu $b_u c_u$ liefert als berührender Lichtstrahl in der Umklappung den Körperschattengrenzpunkt k_u und dessen Zurückklappen den Aufrisspunkt k' . Alle weiteren Schlagschattenpunkte liegen in der Umklappung auf demselben Radius mit s_u , ebenso alle weiteren Körperschattengrenzpunkte auf demselben Radius mit k_u . Beide Schattengrenzen sind hienach im Raum halbe Grosskreise und in der Projektion halbe Ellipsen, die sich nach Bestimmung der kleinen Halbachsen durch Anwendung der Konstruktion auf den einzigen Randpunkt b' rasch zeichnen lassen.

Um den Schlagschatten eines äusseren Punktes gg' zu finden (EF ist der Grundschnitt), denkt man sich diesen Punkt ebenfalls auf die vertikalprojizierende Lichtstrahlenebene MN projiziert und mit derselben umgeklappt. Die Umklappung g_u wird erhalten durch $n_u g_u = n g$. Ist der Parallelkreis durch g' in die Umklappung übertragen, so liefert der Lichtstrahl $g_u t_u$ parallel $b_u c_u$ den Schattenpunkt t_u in der Umklappung, und dieser durch Zurückklappen und Zurückprojizieren den Schattenpunkt t' im Aufriss.

In Figur 65 c erscheint eine halbkugelförmige Schale mit inneren und äusseren Schatten auf der Horizontalebene liegend samt dem Schlagschatten auf beiden Grund-



Figur 65 d.

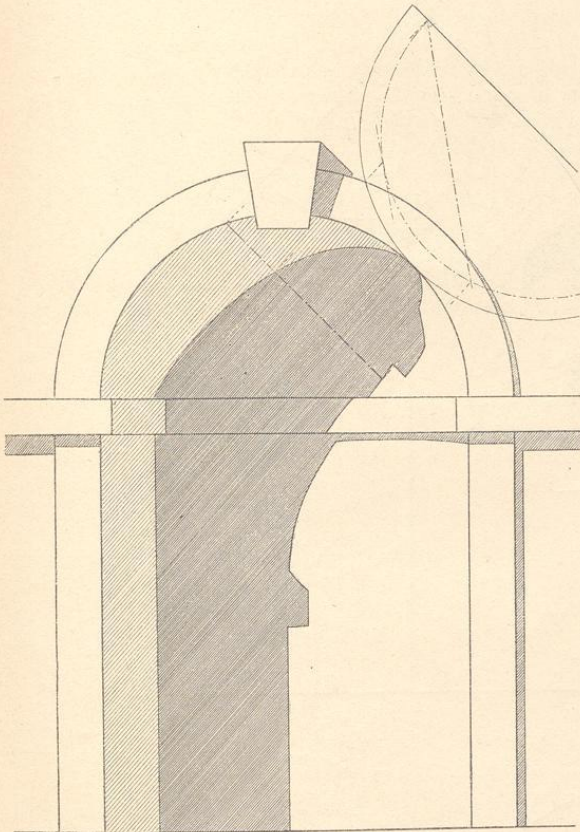
Ebene mit der Kugel als Halbkreis und der Lichtstrahl $b_u c_u$ unter dem Winkel α gegen MN geneigt.

Durch einen beliebigen Randpunkt a' zieht man einen Lichtstrahl und klappt dessen ebenfalls verschoben gedachte vertikalprojizierende Ebene um MN um. Die

ebenen. Alle Konstruktionsmittel sind durch das Vorangehende erklärt.

In Figur 65 d beschattet ein aussenliegender, in der Seitenprojektion gegebener Kreis die Kugelfläche, und deren Körperschattengrenze erzeugt eine Schlagschatten-

grenze auf einer Cylinderfläche. Die vertikalprojizierenden Lichtstrahlenschnittebenen sind auf die ihnen parallele Grosskreisebene projiziert und mit dieser umgeklappt; nur die Uebertragung der schattenwerfenden Kreispunkte in die Umklappung erfordert einige Bemühung des räumlichen Anschauungsvermögens. In die Seitenprojektion lassen sich die Schattenpunkte mit Hilfe von Parallelkreisen übertragen, deren Ebenen normal zur Längsachse des Körpers stehen; zeichnet man auch die benützten Lichtstrahlen in der Seitenprojektion, so erhält man Proben. Eine zweite Konstruktion der Schlagschatten-



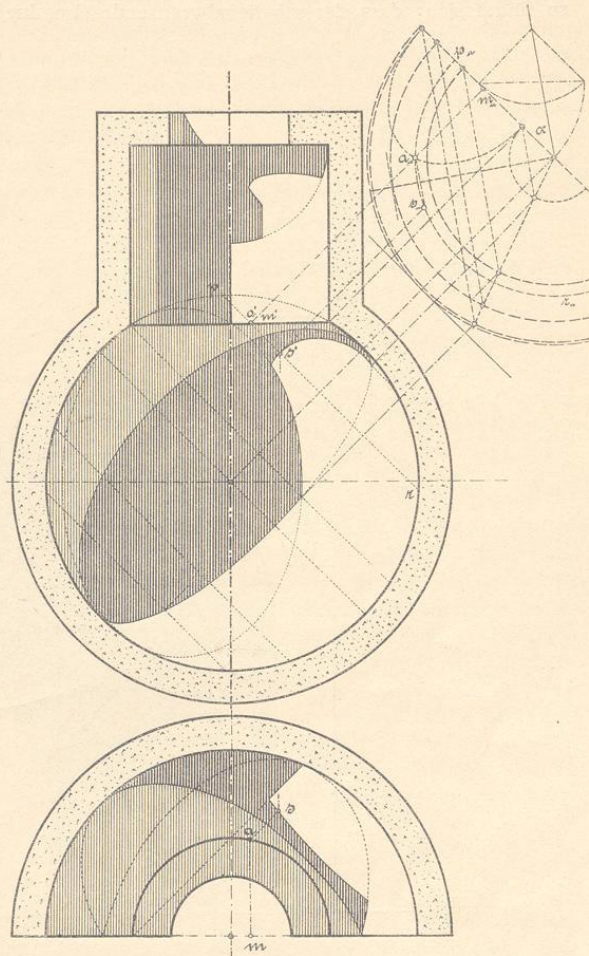
Figur 65e.

grenze, bei welcher die Schattenpunkte zuerst in der Seitenprojektion auftreten, ist in Art. 67 erwähnt; die Hilfslinien dafür sind ebenfalls gezeichnet.

Die Figuren 65e, 65f, 65g bieten die Beschattung der Hohlkugelfläche teils durch ihre eigenen Ränder, teils durch aussenliegende Körperschattengrenzen, und zwar immer in Verbindung mit leicht erhältlichen Schatten auf vertikalen Cylinderflächen. In den zwei letzten Beispielen ist die Uebertragung der schattenwerfenden Punkte der oberen horizontalen Randhalbkreise in die Umklappung hervorzuheben. Randpunkt a' in Figur 65f liesse sich zwar durch Zeichnen des ohnehin notwendigen Schnittkreises $p'r$ in der Umklappung $p_u r_u$ und durch die zu-

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

gehörige Projektionslinie nach a_u übertragen; zur Vermeidung schiefwinkliger Durchschnitte wird aber besser der Punkt a_u durch $m_u a_u = m a$ im Grundriss erhalten.



Figur 65f.

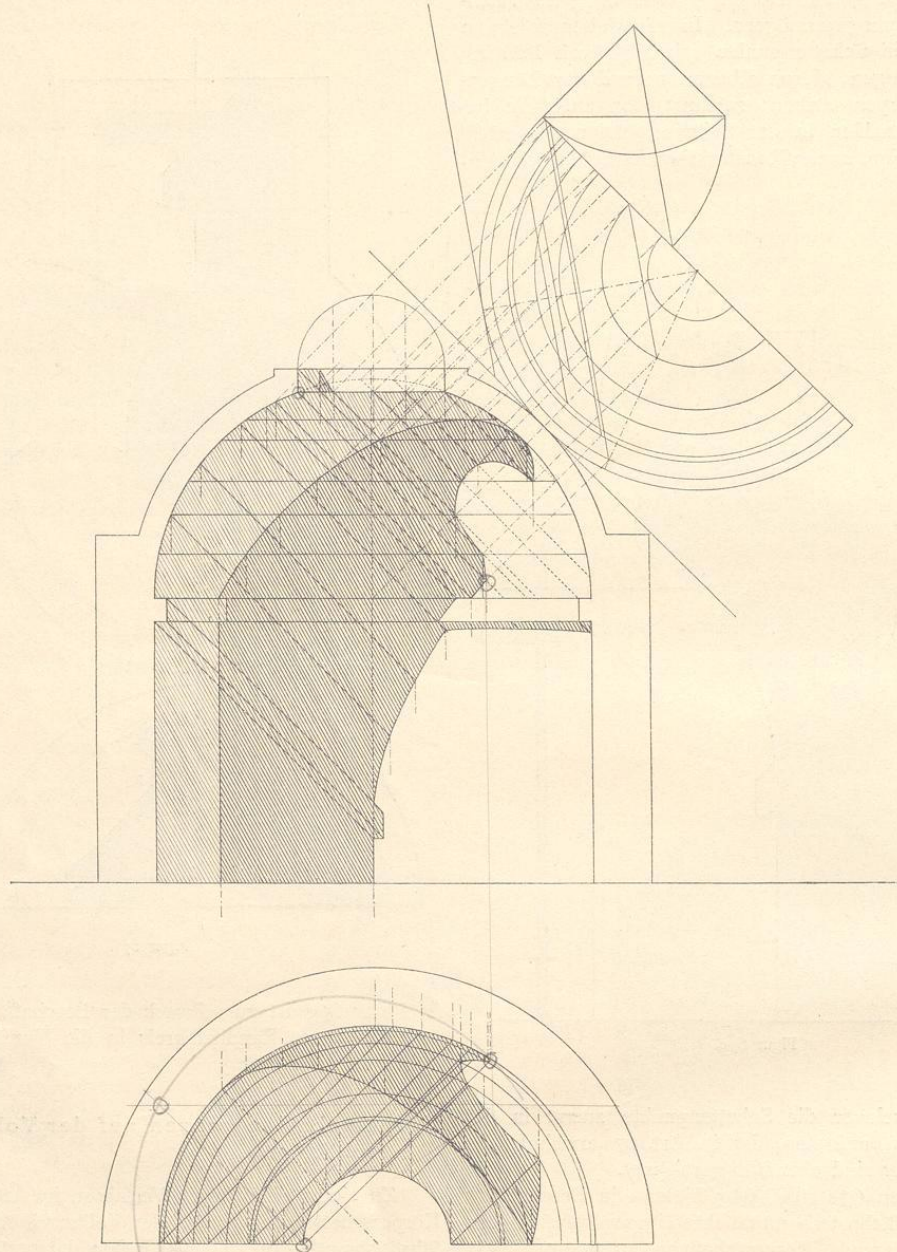
In Figur 65g ist zum Zweck der Beschaffung der Masse $m a$ der obere Randhalbkreis in die Vertikalebene umgeklappt.

Körperschattengrenzen auf der Vollkugel und 66. Hohlkugel.

Zu einem einfacheren Verfahren im Aufzeichnen der Körperschattengrenzen auf der Vollkugel oder Hohlkugel führt folgende Ueberlegung: Indem der berührende Lichtstrahl an der Kugel gleitet, beschreibt er eine Cylinderfläche mit kreisförmigem Querschnitt, welche die Kugel nach einem Grosskreis berührt, dessen Ebene senkrecht zur Lichtrichtung steht. Projiziert man die Kugel und diesen Grosskreis auf eine durch den Lichtstrahl gelegte vertikale Ebene, so erscheint der Grosskreis als Durchmesser des Kugelbildes senkrecht zum Lichtstrahl und

dieser bildet mit der Horizontalen den bekannten Winkel α (Figur 66a). Klappt man eine solche Ebene HR in die Horizontalebene um und wieder zurück (Figur 66b), so findet sich, dass der schattenabgrenzende Grosskreis

rechtwinkligen Dreieck, das zum Aufzeichnen des Winkels α dient, kann das Verhältnis von B zu A unmittelbar abgelesen werden als Verhältnis der kleineren Kathete zur Hypotenuse; doch wird die Rechnung mit der Ver-



Figur 65 g.

im Grundriss der Kugel eine Ellipse ist mit der grossen Achse $2A$ als Durchmesser des Kugelbildes senkrecht zur Lichtstrahlprojektion, und der kleinen Achse in der Richtung der Lichtstrahlprojektion $2B = 2A \sin \alpha$. Die Rechnung giebt $B = 0,5773 A$ oder rund $0,58 A$. An dem

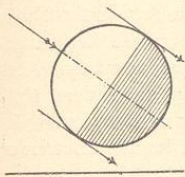
Verhältnisszahl $0,58$ ebenso rasch zum Ziel führen. Im folgenden sind für den Fall, dass die ganze Ellipse mit Hilfe des Massstabs aufgetragen werden will, einige Ordinaten derselben senkrecht zur grossen Achse berechnet. Teilt man die grosse Halbachse in vier gleiche Teile und hal-

biert noch den äussersten Teil, so sind die Ordinaten y in den Teilpunkten die folgenden, wenn die Länge der grossen Halbachse oder der Kugelhalbmesser = 1 gesetzt wird.

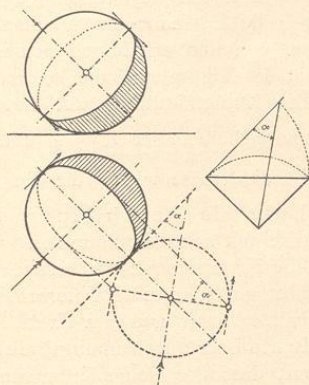
Im ersten Punkt $y_0 = 0,577$ rund 0,58 (kleine Halbachse);
 „ zweiten „ $y_1 = 0,559$ „ 0,56
 „ dritten „ $y_2 = 0,500$ „ 0,50
 „ vierten „ $y_3 = 0,382$ „ 0,38
 „ fünften „ $y_4 = 0,280$ „ 0,28
 „ Endpunkt $y_5 = 0$ „ 0.

Was für die Grundrissellipse des Kugelkörperschattens in Beziehung auf Richtung und Grösse gesagt ist, gilt völlig unverändert auch für die Aufrissellipse, wofür nur die Vertikalprojektion des Lichtstrahls an die Stelle seiner Horizontalprojektion gesetzt wird. Die Aufrissellipse ist kongruent der Grundrissellipse, und ihre grosse Achse steht ebenfalls senkrecht zur Lichtstrahlprojektion.

Zum raschen Aufzeichnen der Ellipsen bei Darstellungen in kleinerem Massstab genügt oft schon die Angabe der vier Krümmungskreise in den



Figur 66a.



Figur 66b.

Scheiteln, wobei die Radien nach der unten in Art. 68f angegebenen Konstruktion zu bestimmen sind und die zwischenliegenden Teile des Ellipsenumfangs nach Schätzung eingefügt werden.

67. Behandlung der Kugel als Drehungsfläche.

In manchen Fällen ist es zweckmässig, die Kugel- fläche als Drehungsfläche mit Achse senkrecht zu einer Grundebene aufzufassen und von der Eigenschaft ihrer zum Lichtstrahl parallelen Schnitte als Kreislinien keinen Gebrauch zu machen. Dies gilt besonders dann, wenn die in Art. 61 für Drehungsflächen beschriebene Lösung mit Parallelkreisschnitten und den kongruenten Schlag- schatten auf deren Ebenen Anwendung finden kann. So liesse sich z. B. auf dem in 65d gezeichneten Beispiel, ferner in dem als Höhenschnitt gezeichneten, oben kreis-

förmig offenen Kuppelgewölbe mit kugelförmiger Leibung in 65g die Selbstbeschattung mit solchen Parallelkreisschnitten bestimmen. Auch die Betrachtung der Parallelkreisschnitte der Kugel als niedriger Kegelzonen, wie bei den Drehungsflächen nach Art. 56, kann in manchen Fällen rascher zum Ziel führen als die Umklappung von Schnittebenen parallel zum Lichtstrahl, indem sie mit der ebengenannten Schlagschattenbestimmung verbunden die Körperschattengrenze liefert.

Oft verwertbare Hilfskonstruktionen für die 68. Ellipse und ihre Tangenten.

Da die Ellipse sowohl als Schattengrenzlinie auf Kugel- flächen, Cylinderflächen, Kegelflächen, wie auch als Kante und Hilfslinie bei den Schattenkonstruktionen auf diesen und anderen Körpern samt ihren Tangenten sehr häufig zu zeichnen ist, so sind im folgenden einige oft verwertbare Hilfskonstruktionen für die Linie selbst, wie für die scharfe Bestimmung von Tangenten und Berührungspunkten eingeschaltet. In der letzten Beziehung sind auch andere Kurven berücksichtigt.

a) Ellipsenkonstruktion; gegeben beide Achsen. Man beschreibt um den Schnittpunkt beider Achsen zwei Kreise mit den Halbachsen als Radien. Man zieht eine Anzahl beliebiger gemeinschaftlicher Radien beider Kreise. Für jeden solchen Halbmesser zieht man durch seinen Endpunkt auf dem grösseren Kreis eine Parallele zur kleinen Achse und durch seinen Punkt auf dem kleineren Kreis eine Parallele zur grossen Achse. Der Schnittpunkt je zweier zu demselben Halbmesser gehöriger Parallelen ist ein Ellipsenpunkt. — Da sich bei dieser Konstruktion alle zu benützenden Punkte aus einem rechtwinkligen Schnitt zweier Linien ergeben, so liefert sie die Ellipsenpunkte mit grosser Sicherheit.

b) Ellipsenkonstruktion; gegeben beide Achsen. Man trägt auf einem Papierstreifen von einem Punkt p aus die grosse Halbachse pa und in derselben Richtung die kleine Halbachse pb auf, so dass in dem Stück ab die Differenz beider Halbachsen erscheint. Man legt nun in verschiedenen Richtungen nacheinander den Papierstreifen so an, dass der Punkt a auf eine kleine Halbachse, der Punkt b auf eine grosse fällt. In jeder solchen Lage giebt der Punkt p einen Ellipsenpunkt an. Diese Konstruktion liefert die Ellipsenpunkte zwar rascher, aber weit weniger zuverlässig als die erste, letzteres besonders bei geringem Unterschied beider Halbachsen. Immerhin ist sie zum praktischen Schattenkonstruieren meist ausreichend, wenn nicht andere Resultate aus der Ellipse abzuleiten sind.

c) Ellipsenkonstruktion; gegeben beide Achsen. Man durchschneidet die grosse Achse von den Endpunkten der kleinen Achse aus mit Kreisbögen, deren Halbmesser gleich der grossen Halbachse ist. Die zwei Schnittpunkte sind die Brennpunkte der Ellipse. Man beschreibt nun aus dem einen Brennpunkt einen Kreisbogen mit einem beliebigen Bruchteil der grossen Achse, aus dem andern einen Kreisbogen mit dem Rest der grossen Achse; beide Kreisbögen schneiden sich in einem Ellipsen-

hiefür Punkt h angenommen. Man zieht $h o_1$ mit Verlängerung und macht $hn = R$. Die auf der Mitte von $o_3 n$ in k errichtete Senkrechte zu $o_3 n$ giebt als Durchschnitt mit hn den Punkt o_2 als Mittelpunkt des Uebergangskreises. — Wird Punkt i auf dem grösseren Krümmungskreis als Uebergangspunkt angenommen, so zieht man $i o_3$ und macht darauf $im = r$. Das Mittellot $l o_2$ von $m o_1$ liefert als Schnitt mit $i o_3$ den Mittelpunkt des Uebergangskreises o_2 . Für die praktische Verwertung der Konstruktion empfiehlt sich die Annahme des Uebergangspunktes auf dem kleinen Krümmungskreis am meisten. Die Annäherung an die Ellipse kann hiebei rascher erreicht werden als mit der Wahl eines Zwischenradius z und ist bei allen Konstruktionen um so vollständiger, je kleiner der Unterschied beider Halbachsen ist.

h) Eine Tangente an die Ellipse aus einem äusseren Punkt oder parallel zu einer andern Geraden ist durch Anlegen des Lineals an der Kurve mit Sicherheit genau zu ziehen; damit ist aber der Berührungspunkt noch nicht bestimmt. Man erhält ihn, wenn die Achsen bekannt sind, durch Betrachtung der Ellipse als der aus dem Kreis durch proportionale Verkürzung aller Ordinaten abgeleiteten Kurve. Die Tangenten in den Endpunkten aufeinanderfallender Ordinaten des Kreises und der aus ihm abgeleiteten Ellipse schneiden sich auf der Abscissenachse, das heisst auf der grossen Achse der Ellipse. Man beschreibt also über der grossen Achse der Ellipse einen Kreis, zieht aus dem Schnittpunkt der Ellipsentangente mit der grossen Achse eine Tangente an den Kreis, bestimmt deren Berührungspunkt und erhält dann den Berührungspunkt der Ellipsentangente als Schnitt mit der durch den Kreisberührungspunkt gezogenen Ordinate. Liegt der Berührungspunkt der grossen Achse näher, so wird besser der Kreis über der kleinen Achse mit dem Schnittpunkt der Tangente und der kleinen Achse benützt.

i) Ist die Tangente in einem gegebenen Punkt der Ellipse zu ziehen, so wird dieselbe Thatsache benützt, indem zuerst die Ordinate durch den Punkt für Ellipse und Kreis, dann die Kreistangente gezeichnet und aus ihrem Schnittpunkt mit der grossen Achse nach dem gegebenen Berührungspunkt gezogen wird. Dasselbe Problem lässt sich auch mit Hilfe der Brennpunkte lösen; die Tangente an der Ellipse steht senkrecht auf der Halbierungslinie des Winkels zwischen den beiden nach dem Berührungspunkt gezogenen Brennstrahlen.

k) Sind die Achsen der Ellipsen nicht bekannt und es ist der Berührungspunkt einer vorhandenen Tangente zu bestimmen, so zieht man zwei zur Tangente parallele Sehnen in thunlichst grosser Entfernung voneinander und mit möglichst sicherem Schnitt mit der Peripherie. Die gerade Verbindungslinie der Halbierungspunkte beider Sehnen ist der Durchmesser nach dem Berührungspunkt.

Die Konstruktion ist die Anwendung der folgenden, für alle Kurven möglichen, auf den besonderen Fall der Ellipse. Man zieht eine Anzahl zur Tangente paralleler Sehnen und halbiert sie; die Kurve, welche die Halbierungspunkte verbindet, führt zum Berührungspunkt. Bei den Linien zweiter Ordnung wird diese Kurve zur Geraden.

l) Ist in einem Punkt eines Ellipsenstücks mit unbekannten Achsen eine Tangente zu ziehen, so kann man zur thunlichst sicheren Bestimmung ihrer Richtung folgende, auch für alle andern Kurven brauchbare Konstruktion benützen, durch welche man einen zweiten Punkt der Tangente erhält. Man beschreibt um den Berührungspunkt einen Kreis, zieht verschiedene Radien, welche auch die Kurve schneiden und trägt von den Kreispunkten einer Seite aus auf den Radien die Sehnen der Kurve nach aussen und innen auf. Man erhält dann zwei Kurven, welche sich auf dem Kreis schneiden; der Schnittpunkt ist ein Tangentenpunkt. Nimmt man die Konstruktion zu beiden Seiten des Berührungspunktes vor, so erhält man zwei auf einem Durchmesser liegende Tangentenpunkte. An die Stelle des Kreises kann auch eine Gerade oder beliebig gezogene Kurve treten, welche von den Verlängerungen der zu beiden Seiten des Berührungspunktes liegenden Sehnen der gegebenen Kurve geschnitten wird.

IX. Schatten auf minder häufig verwerteten Flächen.

Die Flächen zweiter Ordnung.

69.

Soweit diese Flächen nicht zu den Drehungsflächen gehören und als solche schattiert werden, sind es die folgenden: das dreiachsige Ellipsoid, das elliptische Paraboloid, das zweimantelige elliptische Hyperboloid, das einmantelige elliptische Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid.

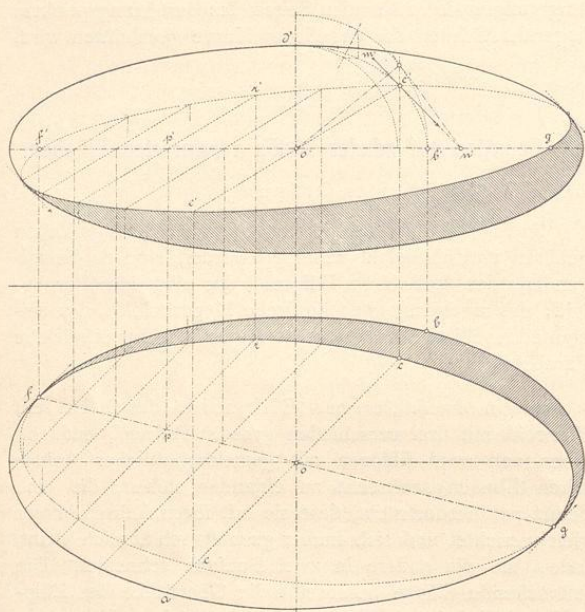
a) Ein dreiachsiges Ellipsoid, das heisst ein Ellipsoid mit drei verschieden grossen Achsen, entsteht, wenn von zwei Ellipsen mit gemeinschaftlicher Achse, deren Ebenen senkrecht zu einander stehen, die eine derart parallel fortrückt, dass sie mit ihren Achsen immer gleichgerichtet und sich immer geometrisch ähnlich bleibt, indem sie die andere in zwei Punkten schneidet. Die fortrückende Ellipse beschreibt die Oberfläche des Ellipsoids. (Wird sie ein Kreis, oder ist die feste Ellipse ein Kreis, so geht das dreiachsige Ellipsoid in ein Drehungsellipsoid über, das nach Kap. VII zu behandeln ist.)

Die Fläche hat die Eigenschaft, dass sie von parallelen Ebenen irgend welcher Richtung nach Ellipsen geschnitten wird, die unter sich geometrisch ähnlich sind. Wenn also in Anwendung der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen das Ellipsoid durch vertikale Lichtstrahlenebenen geschnitten und an die Schnittkurven die berührenden Tangenten gezogen werden, so sind alle diese Schnittkurven ähnliche Ellipsen, auf welchen auch die Berührungspunkte der Lichtstrahlen, das heisst die Körperschattengrenzpunkte, ähnlich liegen. Hierauf gründet sich folgende Konstruktion der Körperschattengrenze, wobei nach Figur 69a ein Ellipsoid mit senkrecht zu den drei Grundebenen stehenden Achsen als Beispiel gewählt sein mag.

Man zieht durch den Mittelpunkt o der Grundrissellipse einen Lichtstrahl ab und zeichnet im Aufriss die Ellipse $b' c' d'$, nach welcher die Vertikalebene dieses Lichtstrahls den Körper schneidet. (Für diese Ellipse ist die

vertikale Achse diejenige des Ellipsoids und die horizontale durch Hinaufloten der Endpunkte des Grundrissdurchmesserlichtstrahls ab erhältlich.) Man zieht an diese Schnittellipse einen berührenden Lichtstrahl $m'n'$, bestimmt dessen Berührungspunkt c' scharf nach Art. 68 und lotet ihn auf den Grundrissdurchmesser nach c hinunter. Hierauf zieht man genügend viele Sehnen der Grundrissellipse parallel zum Lichtstrahl und teilt sie in demselben Verhältnis ein, in welchem der Lichtstrahldurchmesser durch die beiden Punkte c und e eingeteilt ist ($oe = oc$). Die stetige Verbindung der erhaltenen Punkte liefert die Körperschattengrenze im Grundriss, die ihrer Entstehungsweise nach elliptisch sein muss.

Die Verbindungslinie gf der Halbierungspunkte der parallelen Sehnen ist ein horizontaler Durchmesser sowohl des Ellipsoids, als der Schattengrenzlinie auf ihm. Diese



Figur 69 a.

Linie erscheint im Aufriss als $f'g'$ horizontal und durch den Mittelpunkt gehend; die Halbierungspunkte p können also durch Hinaufloten auch im Aufriss erhalten werden. Durch diese Punkte p' sind im Aufriss Parallelen zu dem schrägen Durchmesser $o'c'$ jener ersten vertikalstehenden Schnittellipse zu ziehen und dann die Endpunkte der Sehnen r aus dem Grundriss in den Aufriss nach r' hinaufloten, um auch dort die Schattengrenzpunkte zu erhalten. Bei einem hohen Ellipsoid würden die Projektionslote schiefwinklige Durchschnitte ergeben; man bestimmt in diesem Fall die Aufrisspunkte besser aus der Proportionalität der Sehnen. Jede Aufrisssehne $p'r'$ verhält sich zu dem ihr parallelen Durchmesser $o'c'$ wie die zugehörige Grundrisssehne pr zu dem ihrigen oc . Zur Abnahme der Proportionalmasse für Grundriss und Aufriss kann dasselbe Strahlenbüschel dienen.

Die Körperschattengrenzlinie wird eine Ellipse, deren

Mittelpunkt mit dem des Körpers zusammenfällt, welche also die Oberfläche in zwei polarsymmetrische Hälften für Licht und Schatten zerlegt. In der Projektion des Körpers auf eine zur Richtung fg senkrecht stehende vertikale Ebene erscheint sie als gerade Linie.

Die an den beiden Körperumrissen tangierenden Lichtstrahlenprojektionen berühren in denselben Berührungspunkten auch die Projektionen der Schattengrenzlinie. Diese Thatsache gilt allgemein für gekrümmte Flächen, deren Umrisse in den beiden Projektionen nicht durch Kanten, sondern durch Auswölbung gebildet sind; sie ist eine notwendige Folgerung aus dem in Art. 34a ausgesprochenen Satz. Denkt man sich für eine solche etwa im Aufriss gezogene Lichtstrahl tangente die vertikalprojizierende Ebene, so berührt diese Ebene den Körper in einem Punkt, der der Körperschattengrenze angehört, weil er auf einem berührenden Lichtstrahl liegt. Diese Grenze kann aber über die Ebene offenbar nicht hinaus, da sie sonst aus der Körperoberfläche hinausgehen müsste; sie muss also umkehren und da sie bei stetiger Krümmung der Fläche keine Ecke bilden kann, muss sie mit Berührung umkehren, abgesehen von dem seltenen Fall, in welchem der sichtbare Teil mit dem unsichtbaren zusammenfällt. Vergl. Art. 63 a, Schattengrenzen auf Drehungsflächen. Weitere Beispiele für die beschriebene Thatsache bieten die Figuren 69b, 69c, 71, 74a, 74c.

Ein zweites Verfahren für die Schattenbestimmung auf dem Ellipsoid wäre das im folgenden für das elliptische Hyperboloid angewendete Behandeln jedes horizontalen Durchchnitts als eines niedrigen elliptischen Kegelumrisses.

b) Das elliptische Paraboloid (mit vertikaler Achse) entsteht, wenn an die Stelle der festen Ellipse, die bei Erzeugung des Ellipsoids vorausgesetzt wurde, eine Parabel (mit vertikaler Achse) tritt. Die Bestimmung der Körperschattengrenze, die selbst parabolisch und im Grundriss geradlinig wird, kann einen ähnlichen Weg verfolgen wie bei jenem, wenn an die Stelle der Grundrissellipse eine beliebige horizontale Schnittellipse des Paraboloids als Fussfläche gesetzt wird. Alle Vertikalschnitte werden parabolisch und nicht nur ähnlich, sondern kongruent. Auf kurzem Weg kann die geradlinige vertikale Projektion der Körperschattengrenze auf einer zu fg senkrechten Vertikalebene gefunden und zur Konstruktion jener benutzt werden.

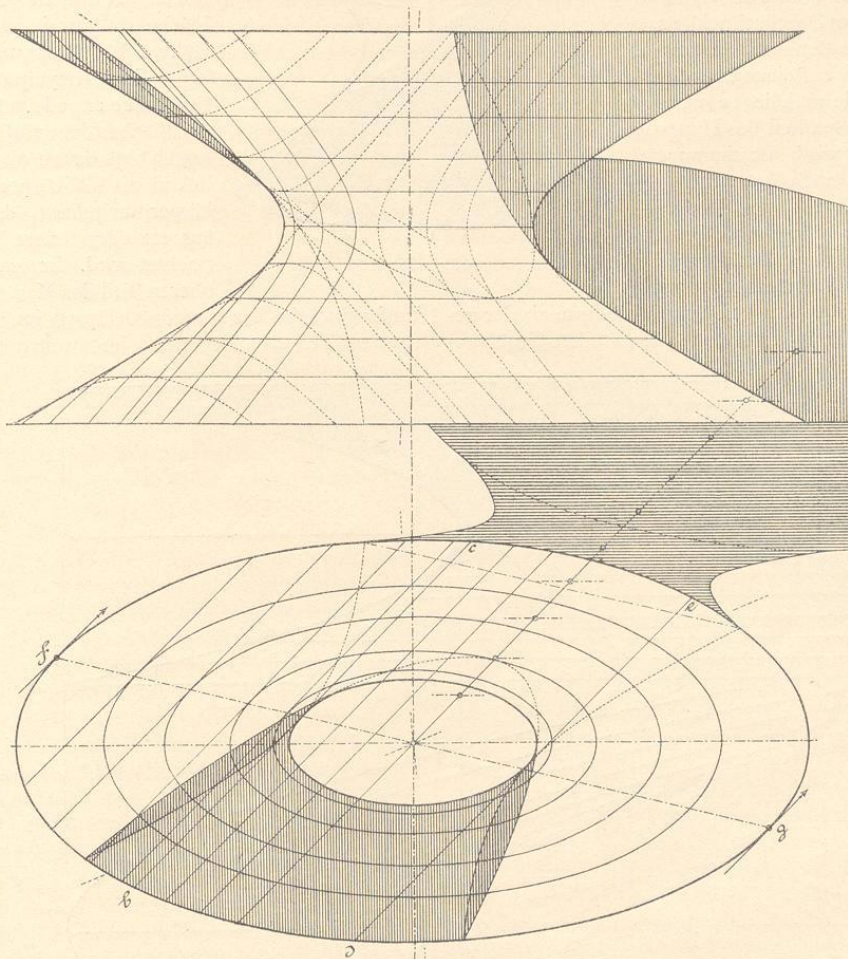
c) Ein zweimanteliges elliptisches Hyperboloid entsteht, wenn eine (am besten horizontal liegend gedachte) Ellipse, deren Ebene senkrecht zur wirklichen Achse einer Hyperbel steht, derart parallel forttrückt, dass sie mit ihrer Achse immer gleichgerichtet und sich immer geometrisch ähnlich bleibt, indem sie die Hyperbel immer in zwei Punkten schneidet. Die beiden Schnittpunkte mit der Hyperbel können Endpunkte einer Achse oder eines andern Ellipsendurchmessers sein. Die bewegliche Ellipse erzeugt zwei kongruente Mantelflächen, auf denen die hyperbolische Körperschattengrenze in ähnlicher Weise gefunden werden kann wie beim Ellipsoid und Paraboloid,

wenn eine beliebige Lage der beweglichen Ellipse als Grundrissellipse aufgefasst wird. Alle Vertikalabschnitte werden hyperbolisch und geometrisch ähnlich.

Zur Bestimmung von Schlagschattengrenzen auf allen drei Flächen wird, von besonderen Fällen abgesehen, nur das allgemeine Verfahren mit den Vertikalschnitten zur Verfügung stehen; doch bringt auch hiebei die Thatsache, dass alle Vertikalschnitte parallel zur Lichtrichtung geome-

beschattung; der Schlagschatten kann entweder auf die Aussenseite des Mantels oder auf die Innenfläche fallen, je nach der Neigung der Hyperbelzweige.

Die Schattenkonstruktion könnte auch bei dieser Fläche, ähnlich wie bei den drei vorhergehenden, Gebrauch machen von der Thatsache, dass alle Hyperbeln, nach welchen die Fläche durch vertikale Lichtstrahlenebenen geschnitten wird, geometrisch ähnlich sind, und es wäre



Figur 69b.

trisch ähnlich sind, eine Abkürzung, indem das Zeichnen konzentrischer Grundrissellipsen erspart werden kann.

d) Das einmantelige elliptische Hyperboloid entsteht durch das parallele Fortrücken einer (am besten horizontal liegend gedachten) Ellipse auf einer Hyperbel (mit vertikaler imaginärer Achse) in der Weise, dass 1) die Ebene der Ellipse immer senkrecht bleibt zur imaginären Achse der Hyperbel, 2) die Ellipse sich immer geometrisch ähnlich und gleichgerichtet bleibt. Die Fläche bietet neben der Körperschattengrenze auch eine Selbst-

dieser Weg der kürzeste. Diese Schnitthyperbeln projizieren sich auf eine zu fg (Figur 69b) senkrecht stehende vertikale Ebene als eine Hyperbelschar, deren Asymptoten dargestellt sind durch die Projektionen der zwei geraden Linien, nach welchen eine berührende Schnittebene bc oder de die Fläche schneidet. Von dieser Hyperbelschar wäre nur eine einzige Hyperbel (bei Annahme der Fläche nach Figur 69b ausserhalb bc und de liegend) zu zeichnen, um die gerade Linie zu erhalten, als welche die Körperschattengrenze sich auf die zu fg senkrecht gerichtete vertikale Ebene projiziert.

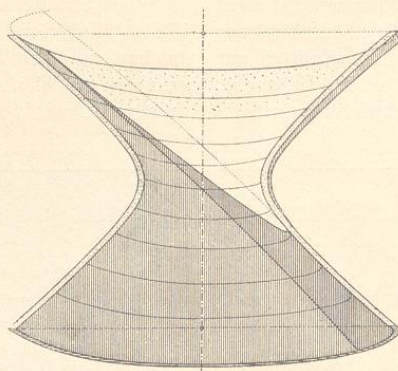
Die an Figur 69b und c durchgeführte Lösung für die Körperschattengrenzlinie eines vertikalstehenden Hyperboloids ist eine andere und zwar die folgende. Jeder horizontale Durchschnitt des Körpers liefert eine Ellipse, welche betrachtet werden kann als sehr niedriger Abschnitt eines elliptischen Kegels, dessen äusserste Mantellinie dieselbe Neigung hat wie die Tangente der Hyperbel an der Stelle des Durchschneidens. Wo die Körperschattengrenze auf dieser Ellipse liegt als auf einer Zone des Kegels, da muss sie auch liegen, wenn die Ellipse als Bestandteil des Hyperboloids aufgefasst wird. Bestimmung der Kegelschatten nach Art. 41.

Zur Durchführung des Verfahrens ist nicht nötig, die Schnittellipsen im Grundriss zu zeichnen, sondern die Bestimmung der Kegelschattenmantellinien kann mit einer einzigen Grundrissellipse als der gemeinschaftlichen Basis der verschieden steilen Kegel ge-

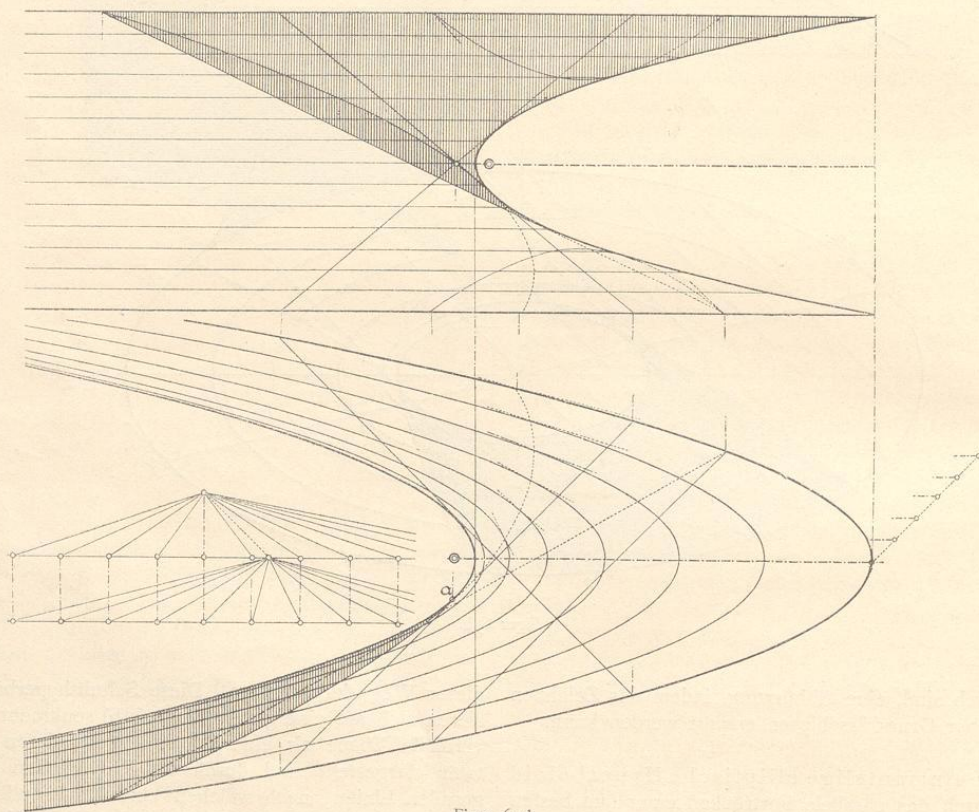
ellipte. Scharfe Bestimmung der Berührungspunkte auf der Ellipse nach Art. 68; scharfe Bestimmung der Tangenten an der Hyperbel in den für die Horizontalschnitte ausgewählten Punkten als der Halbierungslinien des Brennstrahlenwinkels.

Die Körperschattengrenze wird eine Hyperbel, die sich auf eine zur Richtung fg senkrechte vertikale Ebene als Gerade projiziert und die Fläche in zwei polarsymmetrische Hälften für Licht und Schatten zerlegt. Ihre Asymptoten sind durch Endstücke angedeutet. Welche Hälfte der Fläche Licht und welche Schatten hat, hängt davon ab, ob das Hyperboloid als Vollkörper oder als Hohlkörper aufgefasst, das heisst ob die äussere oder innere Mantelfläche betrachtet wird. Im ersten Fall sind am oberen Teil des Mantels die grösseren

Umfangsstücke der Horizontalellipsen im Schatten und am unteren Teil die kleineren; im zweiten Fall ist es um-



Figur 69c.



Figur 69d.

schehen, wenn immer der Radius nach dem Berührungspunkt der Tangente, den das Verfahren liefert, im selben Verhältnis vergrössert oder verkleinert wird, in welchem die Schnittellipse grösser oder kleiner wäre als die Grundriss-

gekehrt. In der Figur ist der Aufriss als Ansicht der Aussenfläche, der Grundriss als Oberansicht der Innenfläche aufgefasst, weshalb die Lichtflächen der Vertikalprojektion im Grundriss als Schattenflächen auftreten.

Die Schlagschattengrenze der Selbstbeschattung ist ähnlich erhalten wie in Art. 61 bei Drehungsflächen. Es wurden die Ellipsen einiger Horizontalschnitte im Grundriss gezeichnet und auf den Ebenen dieser Schnitte der Schatten der oberen Randellipse angegeben, der eine kongruente, aber in der Lichtrichtung verschobene Ellipse ist. Zu diesem Zweck wurde die Randellipse auf Pauspapier gezeichnet und im Grundriss nacheinander in der Richtung des Lichtstrahls je um soviel fortgeschoben, als die Länge des Lichtstrahls bis zur Schnittebene angab (die Mittelpunkte der fortgeschobenen Lagen sind bezeichnet). In jeder Lage wurden die zwei Schnittpunkte zwischen Schattenellipse und Schnittellipse als Schlagschattenpunkte durchgestochen und bezeichnet. Fast ebenso rasch, aber mit minder sicherer Bestimmung der Körperschattengrenze, würde das allgemeine Verfahren zum Ziel geführt haben. Einige Schnittebenen und Schnittkurven hierfür sind eingezeichnet.

Nur im Innern des Mantels erscheint der Schlagsschatten, und zwar umfasst er am oberen Teil die beiden spitzwinkligen Zwickel als Ausläufer des unter dem Hals von den gekrümmten Linien gebildeten Vierecks mit dem kleineren Abschnitt der Fussellipse. Die Parallelperspektive Figur 69c (Schnitt nach der durch die Achse gehenden Lichtstrahlenebene) soll die Verteilung der Innenfläche an Licht, Körperschatten und Schlagsschatten besser zur Anschauung bringen, als es die geometrische Darstellung vermag.

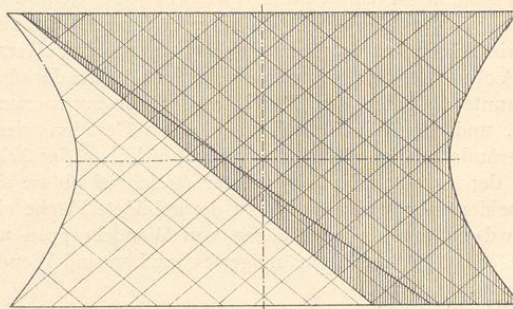
e) Das hyperbolische Paraboloid, bei Abgrenzung durch vier gerade Ränder auch das „windschiefe Viereck“ genannt, lässt sich auf verschiedene Weise erzeugen; in Figur 69d ist diejenige als „Rückungsfläche“ aus der Bewegung einer Parabel gewählt. Zwei Parabeln haben Scheitel und Achse gemein; die erste, festgedachte, liegt in einer Vertikalebene und erstreckt sich rechts ins Unendliche; die zweite liegt in einer Horizontalebene und erstreckt sich links ins Unendliche; sie rückt parallel und unveränderlich auf der ersten fort, mit dem Scheitelpunkt auf ihr bleibend. Beide Parabeln können ihre Eigenschaft als fest und beweglich vertauschen, ohne dass die Fläche sich ändert.

Dieser Erzeugungsweise entsprechend kann jeder Horizontalschnitt der Fläche aufgefasst werden als ein sehr niedriger schiefer Cylinder parallel zur Vertikalebene, dessen horizontale Basis die bewegliche Parabel ist und dessen Mantellinien gleich geneigt sind wie die Tangente der festen Parabel an der Stelle des Durchschneidens. Wo die Körperschattengrenze auf der horizontalen Parabel liegt als auf einer Zone des Cylinders, da muss sie auch für das Paraboloid liegen. Die Bestimmung der Körperschattengrenze auf dem Cylinder geschieht nach Art. 49. In einfacher Weise ergeben sich aus einer und derselben Hilfsfigur, die innerhalb des Grundplans gezeichnet ist, die Richtungen der Tangenten, welche an die horizontalen Schnittparabeln zu ziehen sind, und deren Berührungspunkte die Körperschattengrenze bilden. Diese wird eine Parabel, die sich in der Seitenprojektion als gerade Linie projiziert, also wie bei 69b auch auf kürzerem Weg gefunden werden kann.

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

(Bestimmung der Tangenten in den ausgewählten Punkten der festen Parabel und ebenso der Berührungspunkte der Tangenten an der beweglichen Parabel nach dem Satz, dass jede Tangente der Parabel senkrecht und in der Mitte steht auf der Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Fusspunkt des Lotes, das vom Berührungspunkt auf die Direktrix gefällt wird.)

Zur Bestimmung der Schlagsschattengrenze ist dasselbe Verfahren gewählt wie oben für das elliptische Hyperboloid; das heisst, die obere Randparabel wurde auf Pauspapier gezeichnet und in der Lichtstrahlrichtung parallel verschoben. Im gezeichneten Fall wurde die Schlagsschattengrenze zufällig nahezu geradlinig, was mit der geringen Krümmung des schattenwerfenden Randstücks zusammenhängt; eine strenge gerade Linie kann aber nicht entstehen. Denn wenn die Schlagsschattengrenze wirklich eine Gerade wäre, so würden die Lichtstrahlen, welche sie erzeugen, eine Ebene bilden, und eine solche müsste die horizontale Ebene des oberen Randes nach einer geraden Linie schneiden; das heisst, der obere



Figur 69c.

Rand der Fläche müsste, soweit er den Schatten wirft, selbst geradlinig, anstatt parabolisch mit geringer Krümmung sein.

Figur 69c zeigt die Seitenansicht von rechts mit Angabe der Schattenflächen und Beifügung einiger Lagen der Geraden, welche entstehen, wenn man die Fläche durch Vertikalebenen schneidet, welche die ursprüngliche Lage der horizontalen Parabel berühren. Eine wichtige Ebene dieser Art ist die Vertikalebene parallel zur Lichtrichtung; sie liefert den Durchgangspunkt a , in welchem die Körperschattengrenze jene horizontale Parabel schneidet.

Der Schlagsschatten erscheint an der Aussenseite des Mantels; würde der Parameter der festen Parabel genügend vergrößert, so würde nur auf der Innenseite Selbstbeschattung stattfinden. Zwischen beiden Fällen liegt ein Grenzfall, in welchem gar kein Schlagsschatten erscheint; er ist geboten, wenn die zwei Geraden, nach welchen die Fläche von einer tangierenden vertikalen Lichtstrahlenebene geschnitten wird, im Aufriss unter 45° stehen und beide gegebene Parabeln kongruent sind. Für die Schlagsschattenbestimmung hätten auch Schnitte parallel zur Vertikalebene, die ebenfalls alle kongruent sind, verwertet werden können.

Das allgemeine Verfahren ist durch Einzeichnen der mit einer vertikalen Lichtstrahlenebene erhaltenen Schnittkurve angedeutet.

70. Schraubenflächen, Wendelflächen. Die Schrauben und die schraubenförmig verdrehten Stabformen.

Eine Schraubenfläche im weitesten Sinne entsteht, wenn eine Gerade auf einer Schraubenlinie derart fortschreitet, dass sie ihre Richtung gegenüber der Schraubenlinie nicht ändert, das heisst, dass sie einen Kreiscylinder, der die Achse mit der Schraubenlinie gemeinschaftlich hat, fortwährend berührt und mit den Mantellinien dieses Cylinders immer denselben Winkel einschliesst. Auch die Berührung dieses Cylinders findet nach einer Schraubenlinie statt, und zwar hat diese dieselbe Ganghöhe wie die als Leitlinie dienende.

Ein erster besonderer Fall ist geboten, wenn die bewegliche Gerade die Tangente der Schraubenlinie bildet; die Fläche heisst dann eine „entwickelbare“ Schraubenfläche. Ein zweiter, bei den scharfgängigen Schrauben verwirklichter Fall ist der, dass die erzeugende Gerade die Achse der Schraubenlinie schneidet (wobei der oben genannte Cylinder den Durchmesser Null angenommen hat), und der Winkel zwischen beiden Geraden wieder unveränderlich ist. Wird der Winkel zwischen der Achse und der Erzeugenden ein rechter (gleichviel ob sie sich schneiden oder nicht), so heisst die gebildete Fläche eine Wendelfläche. Unterflächen von Wendeltreppen und die Gewindeflächen flachgängiger Schrauben sind Wendelflächen.

Die Anwendung der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen auf die Schraubenflächen aller Art gestaltet sich ganz wie in Art. 27 für „Regelflächen“ überhaupt beschrieben (Figur 70a). Man zeichnet eine genügende Zahl von Mantellinien in Grundriss und Aufriss, indem man den Umfang des Grundrisskreises und die Ganghöhe der Schraubenlinie je in 8 oder 12 oder 16 gleiche Teile teilt und Gebrauch macht von der Thatsache, dass bei einem Fortschreiten der Erzeugenden im Grundriss von einem Teilpunkt zum andern ihre beiden Endpunkte um denselben Bruchteil der Ganghöhe höher rücken. Die Schnittkurve einer jeden vertikalstehenden Lichtstrahlenebene mit der Fläche ergibt sich nun daraus, dass man die Schnittpunkte dieser Ebene mit den verschiedenen Mantellinien, die im Grundriss vorhanden sind, sobald die Lichtstrahlprojektion gezogen ist, hinaufletet in die Aufrisse der Mantellinie und die erhaltenen Punkte verbindet. Im übrigen gelangt die allgemeine Lösung aus Art. 27 ohne weitere Hilfsmittel zur Verwertung; für den unteren Teil der Fläche sind die Schnittkurven eingezeichnet.

Dieses allgemeine Verfahren liefert zwar die Schlagschattengrenzen rasch und genügend scharf, leidet aber in Beziehung auf die Körperschatten an dem Mangel, dass die Berührungspunkte der Tangenten innerhalb weiter Grenzen unsicher sind. Eine genauere Bestimmung ist möglich nach Art. 105; die dort genannte Lichtstufenlinie ± 4 , die mit dem Werkzeug der Beleuchtungskunde,

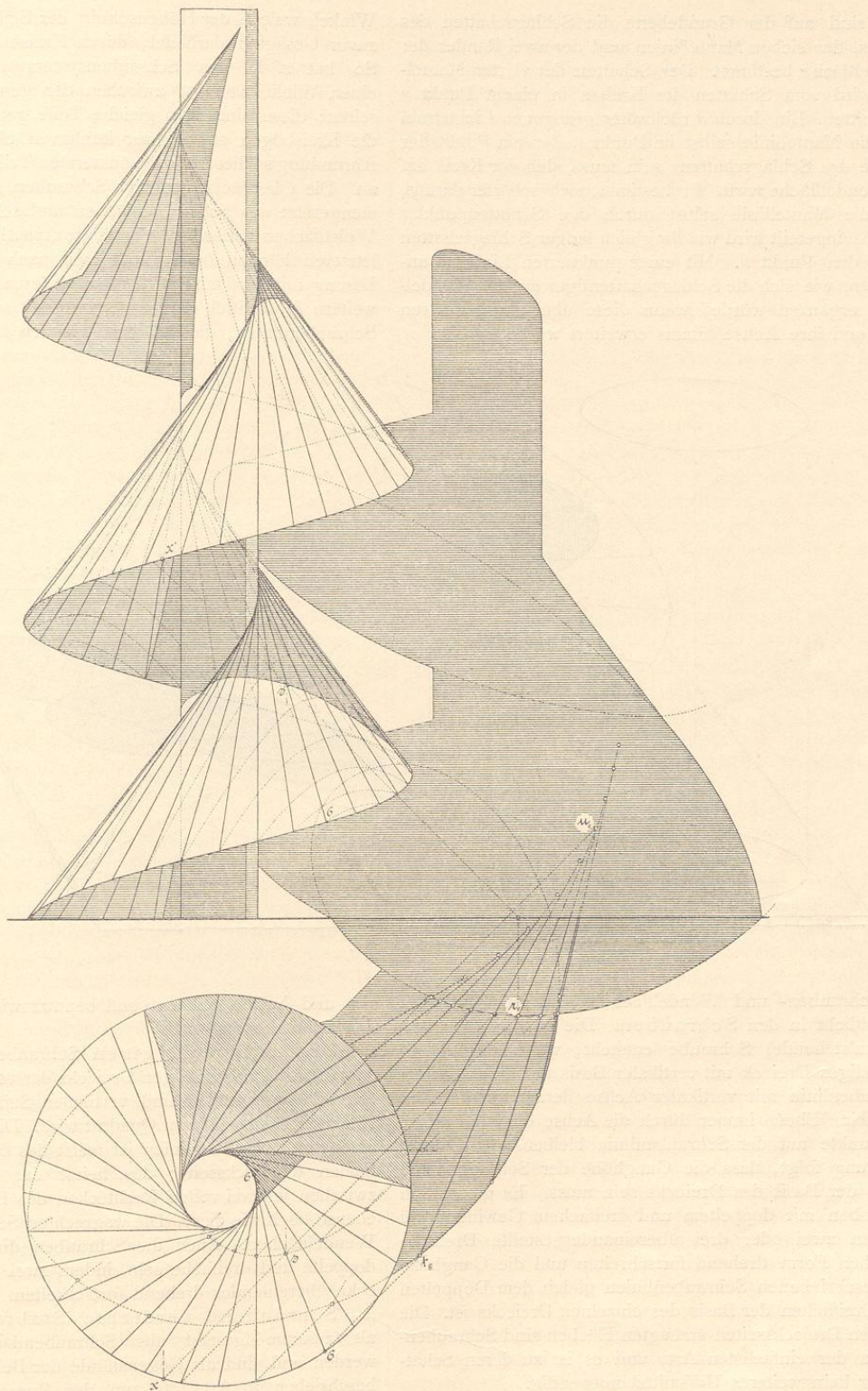
der „Normalkugel“ erhalten wird, ist nichts anderes als die Körperschattengrenze der Fläche.

Eine weitere Konstruktion für die Schlagschattengrenzen, ebenfalls in Figur 70a zur Anschauung gebracht, ist die folgende. Man sucht auf einer beliebigen Horizontalebene (hier der Grundebene) die Schlagschatten einer Anzahl von Mantellinien, ferner den Schlagschatten derjenigen Linie, deren Schlagschatten auf der Schraubenfläche zu suchen ist, sei nun diese Linie eine Randlinie der Fläche selbst, wie bei der Selbstbeschattung in Figur 70a, oder sei sie die Selbstschattengrenze eines anderen Körpers. Wo der Schlagschatten t_{6u6} einer Mantellinie o geschnitten wird vom Schlagschatten dieser Grenzlinie (das heisst des nächstoberen Flächenrandes), da ist der gemeinschaftliche Schlagschatten r_6 derjenigen zwei Punkte s und x beider Linien, die einander in Schatten setzen. Dieser Schlagschattenpunkt liegt auf demselben Lichtstrahl mit den zwei Punkten, so dass ein durch ihn rückwärts bis zur Mantellinie gezogener Lichtstrahl zum Schlagschattenpunkt ss' auf der Fläche führt. Selbstverständlich ist der erhaltene Punkt nur dann ein wirklicher Schattengrenzpunkt, wenn die Mantellinie nicht selbst im Körperschatten ist; denn andernfalls kann sie keinen Schatten aufnehmen. Man erhält auf diesem Weg die Schlagschattengrenze rasch und genügend scharf.

Auch zur Bestimmung der Körperschattengrenze kann dieses Verfahren dienen, wenigstens der Theorie nach. Man sucht auf derselben Horizontalebene die Schlagschatten einiger Mantellinien aus demjenigen Teil der Fläche, auf welchem die Schattengrenze zu vermuten ist, zeichnet die Umhüllungskurve dieser Schlagschattenlinien und bestimmt möglichst scharf den Berührungspunkt zwischen der Kurve und jeder Mantellinie. Der durch einen solchen Berührungspunkt rückwärts gezogene Lichtstrahl führt zu dem Körperschattengrenzpunkt auf der zugehörigen Mantellinie. Wo der Durchschnitt unsicher wird, da ist zu beachten, dass die Mantellinie selbst durch den Körperschattenpunkt im gleichen Verhältnis eingeteilt wird wie die Schlagschattenlinie durch den Berührungspunkt. An die Stelle der horizontalen Ebene kann bei diesem Verfahren auch die vertikale Grundebene oder eine dazu parallele Ebene treten. Leider stösst es bei der praktischen Ausführung gewöhnlich auf unüberwindliche Hindernisse, indem es um so schwieriger ist, die Berührungspunkte auf den Schatten der Erzeugenden zu bestimmen, je mehr sich die Schraubenfläche einer entwickelbaren nähert. —

Wenn die erzeugende Gerade der Schraubenfläche horizontal wird, so entsteht die Wendelfläche. Die Bestimmung der Schattengrenzen bleibt dabei völlig unverändert.

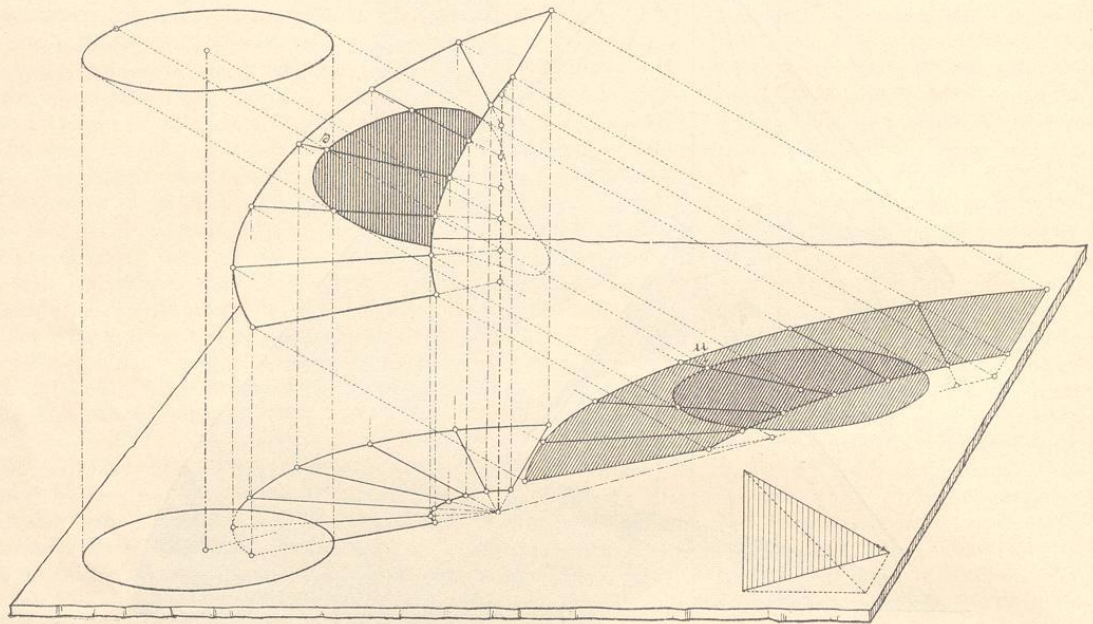
In Figur 70b ist der zweite für die Schraubenfläche beschriebene Weg der Schlagschattenbestimmung in seiner Anwendung auf eine Wendelfläche perspektivisch zur Anschauung gebracht. Auf der horizontalen Grundebene ist links der Grundriss eines schattenwerfenden horizontalen Kreises und einer beschatteten Wendelfläche mit sieben Mantellinien perspektivisch gezeichnet, darüber die beiden Raumgebilde selbst. Auf dem gewöhnlichen



Figur 70 a.

Weg sind auf der Grundebene die Schlagschatten des Kreises, der sieben Mantellinien und der zwei Ränder der Wendelfläche bestimmt. Der Schatten der vierten Mantellinie wird vom Schatten des Kreises in einem Punkt u geschnitten. Ein durch u rückwärts gezogener Lichtstrahl trifft die Mantellinie selbst im Punkt s , der ein Punkt der Grenze des Schlagschattens sein muss, den der Kreis auf die Wendelfläche wirft. Er bestimmt sich schärfer daraus, dass die Mantellinie selbst durch den Schattenpunkt s ebenso eingeteilt wird wie ihr gleich langer Schlagschatten durch den Punkt u . Mit einer punktierten Linie ist angegeben, wie sich die Schlagschattenfigur auf der Wendelfläche ergänzen würde, wenn diese über ihren inneren Rand und ihre Achse hinaus erweitert würde.

Winkel, welche der Höhenschnitt der Schraube nach dem zuvor Gesagten darbietet, durch Kreisbögen abgerundet. So hat z. B. das Schraubensystem nach Whitworth einen Winkel von 55° zwischen den geneigten Dreiecksseiten; diese sind in 6 gleiche Teile geteilt gedacht und die Kreisbögen sowohl der konkaven als der konvexen Abrundung schliessen je am äussersten Teilpunkt berührend an. Die Oberflächen solcher Schrauben sind also zusammengesetzt aus Schraubenflächen und schraubenförmigen Wulstflächen mit kreisförmigem Vertikalschnitt. Diese letzteren können beim Schattieren nach der allgemeinen Lösung mit Vertikalschnitten parallel zum Lichtstrahl ohne weitere Hilfsmittel einbezogen werden, indem man die Schraubenlinien, die auf diese Flächen fallen, in Grund-



Figur 70b.

Schrauben- und Wendelflächen sind am häufigsten verwirklicht in den Schrauben. Die scharfgängige (vertikalstehende) Schraube entsteht, wenn ein gleichschenkliges Dreieck mit vertikaler Basis auf einer flachen Schraubenlinie mit vertikaler Achse derart fortschreitet, dass seine Ebene immer durch die Achse geht und seine Fusspunkte auf der Schraubenlinie bleiben. Aus dieser Erklärung folgt, dass die Ganghöhe der Schraubenlinie gleich der Basis des Dreiecks sein muss. Es giebt auch Schrauben mit doppeltem und dreifachem Gewinde, bei welchen zwei oder drei übereinandergestellte Dreiecke derselben Form drehend fortschreiten und die Ganghöhe der beschriebenen Schraubenlinien gleich dem Doppelten oder Dreifachen der Basis des einzelnen Dreiecks ist. Die von den Dreiecksseiten erzeugten Flächen sind Schraubenflächen der einfachsten Art, und es ist zu deren Schattierung kein weiteres Hilfsmittel notwendig.

In der Ausführung sind die ein- und ausspringenden

riss und Aufriss zeichnet und benutzt wie diejenigen auf den Schraubenflächen.

Bei den flachgängigen Schrauben erscheint anstatt des gleichschenkligen Dreiecks der vorigen ein Rechteck mit horizontalen und vertikalen Seiten, das bei bestimmten Systemen zum Quadrat wird. Die Ganghöhe der erzeugten Schraubenlinien ist meist das Doppelte der vertikalen Rechtecksseite; das heisst das hohle Rechteck zwischen je zwei vollen Rechtecken des Höhenschnitts ist ebenso hoch wie diese. Die wagrechten Seiten beschreiben Wendelflächen. Auch die Schrauben dieser Art können doppelte und dreifache sein, indem zwei oder drei Rechtecke übereinander drehend fortschreiten.

Schraubend verdrehte Stabformen können als zusammengesetzt aus Schraubenflächen aufgefasst werden und sind als Gegenstände der Beleuchtungskunde beschrieben in Art. 106; um den Zusammenhang nicht aufzuheben, ist dort auch die Konstruktion der Schlag-

schattengrenzen erklärt, die sich übrigens ganz in derselben Weise finden lassen wie bei den Schraubenflächen. Die Körperschattengrenze ergibt sich als Lichtstufenlinie ± 4 oder auch ohne die Hilfsmittel der Beleuchtungskunde auf eigenen Wegen, die ebenfalls in Art. 106 gezeigt sind.

Verwandt mit den Schraubenflächen, weil auffassbar als aus solchen zusammengesetzt, ist ferner das ringförmig-steigende Tonnengewölbe. Es ist als Gegenstand der Beleuchtungskunde ebenfalls behandelt in Art. 106 und in den Figuren 106c und d. Ein Halbkreis mit vertikaler Achse (oder Segmentbogen oder Spitzbogen oder eine andere Mauerbogenlinie) rückt derart fort, dass sein Scheitelpunkt immer auf einer vertikalstehenden Schraubenlinie bleibt und seine Ebene immer durch die Achse dieser Schraubenlinie geht. Jede Tangente an dem beweglichen Bogen beschreibt eine Schraubenfläche. Das allgemeine Verfahren für gekrümmte Flächen ist hier das nächstliegende, weil Schlagschatten auftreten. Zu seiner Durchführung ist eine genügende Zahl der von den Kreispunkten beschriebenen Schraubenlinien in Grundriss und Aufriss zu zeichnen. Für jeden im Grundriss gezogenen Lichtstrahl sind die Schnittpunkte mit den Grundrisskreisen in die Aufrisse der Schraubenlinien hinaufzuloten (und bei schiefwinkligem Durchschnitt mit Hilfe der Proportionalität der Höhen und Centriwinkel schärfer zu bestimmen). Hiedurch wird im Aufriss die Schnittlinie der vertikalstehenden Lichtstrahlenebene mit der Leibungsfläche erhalten, die mit den übrigen in bekannter Weise zu benutzen ist.

71. Die schraubenförmige Röhre oder Wulstfläche und andere Röhrenflächen mit kreisförmigem Querschnitt.

Unter einer „Röhrenfläche“ versteht man zwar gewöhnlich die Fläche, welche ein unveränderlicher Kreis bei normalgerichtetem Fortschreiten auf irgend einer Linie erzeugt; hier sollen jedoch, um eine kurze Bezeichnung für eine in der Technik nicht selten vorkommende Art von Flächen zu haben, als Röhrenflächen im weitesten Sinn bezeichnet werden alle Flächen, welche eine beliebige unveränderliche oder geometrisch ähnlich bleibende gekrümmte oder zusammengesetzte ebene Linie erzeugt, indem ein Punkt ihrer Ebene auf einer Leitlinie fortschreitet und ihre Ebene immer normal zu dieser Linie bleibt. (Man kann ja die bewegliche Linie immer zur geschlossenen Figur ergänzen, so dass in der That eine „Röhre“ erzeugt wird.) Zur Begriffserklärung der Fläche gehört noch, dass sich die bewegliche Linie gegenüber der Leitlinie auch nicht in ihrer eigenen Ebene verdrehen darf; das heisst, es muss bei einer ebengekrümmten Leitlinie immer dieselbe Sehne der beweglichen Linie in der Ebene der Leitlinie bleiben, und bei einer gewundenen Leitlinie immer dieselbe Sehne der beweglichen Linie in die „Schmiegungebene“ der Leitlinie fallen; mit andern Worten, die bewegliche Linie muss immer dieselbe Lage gegenüber der „Hauptnormalen“ der Leitlinie beibehalten. („Schmiegungebene“ in einem bestimmten Punkt einer gewundenen Kurve heisst diejenige Ebene, welche

durch die beiden an den Punkt anstossenden, geradlinig gedachten Elemente der Kurve gelegt ist. Verbindet man den Punkt geradlinig mit einem vor ihm liegenden und einem nachfolgenden Punkt, so bilden die beiden Verbindungslinien eine bestimmte Ebene. Nähern sich die beiden Punkte dem gegebenen, so schmiegt sich die Ebene der Kurve immer mehr an; fallen sie endlich mit dem gegebenen zusammen, so ist die Ebene zur „Schmiegungebene“ geworden. Die Tangente liegt in der Schmiegungeebene. — „Hauptnormale“ für einen bestimmten Punkt einer gewundenen Kurve heisst die Schnittlinie der Schmiegungeebene mit der Normalebene oder zur Tangente senkrecht stehenden Ebene; diese Linie steht also senkrecht zur Tangente.)

Im vorliegenden Artikel sind die Röhrenflächen im engeren Sinn, das heisst diejenigen mit kreisförmigem unveränderlichem Normalschnitt behandelt. Sie können auch als Umhüllungsflächen aller Lagen einer unveränderlichen Kugel aufgefasst werden, deren Mittelpunkt auf der als Leitlinie gegebenen Kurve fortschreitet; jede solche Kurve berührt die Röhrenfläche nach einem Normalschnittkreis, und wo die Körperschattengrenzpunkte auf diesem als auf einem Bestandteil der Kugel liegen, da liegen sie auch für die Röhrenfläche.

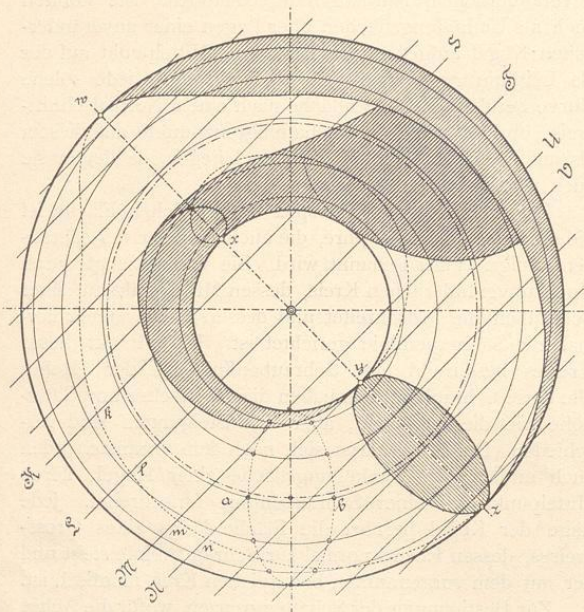
Das interessanteste Beispiel einer solchen Fläche ist die schraubenförmige Röhre, die auch zuweilen der schraubenförmige Wulst genannt wird. Sie wird erzeugt durch einen unveränderlichen Kreis, dessen Mittelpunkt auf einer Schraubenlinie fortschreitet und dessen Ebene immer normal zur Schraubenlinie gerichtet ist. Jeder Punkt dieses Kreises beschreibt eine Schraubenlinie auf der Fläche; alle diese Schraubenlinien haben dieselbe Achse und Ganghöhe wie die gegebene, aber ihre Steigungen sind verschieden. Die Fläche lässt sich nach dem Voranstehenden auch erklären als Umhüllungsfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt auf einer Schraubenlinie fortschreitet. Jede Lage der Kugel berührt die Fläche längs eines Grosskreises, dessen Ebene normal zur Schraubenlinie steht und der mit dem vorgenannten beweglichen Kreis identisch ist.

Zur Bestimmung der Schattengrenzen, wofür die Achse vertikal gedacht sein mag, steht zunächst das allgemeine Verfahren für gekrümmte Flächen zur Verfügung, und zwar gestaltet es sich wie folgt:

Man zeichnet im Grundriss eine genügende Zahl der zuvor genannten konzentrischen Schraubenlinien, indem man den beweglichen Kreis in 6, 8 oder 12 gleiche Teile teilt und die einander entsprechenden Teilpunkte der verschiedenen Lagen verbindet. Dabei ist zu beachten, dass die elliptischen Grundrisse aller Lagen des beweglichen Kreises kongruent und mit der grossen Achse gegen den Mittelpunkt gerichtet sind. Das Achsenverhältnis dieser Ellipsen ergibt sich, indem man (Figuren 71a und 71b) eine Lage des beweglichen Kreises so annimmt, dass er sich im Aufriss als gerade Linie $a'b'$ projiziert, das heisst an einem Punkt, in welchem die schraubenlinienförmige Röhrenachse eine Tangente parallel zur Vertikalebene hat. Ist aus diesem Aufriss die erste Grundrissellipse abgeleitet, so legt man durch deren Punkte konzentrische Kreise; diese stellen die Grundrisse jener Schraubenlinien dar.

Teilt man nun den Grundrisskreis in 8 oder 12 Teile und zeichnet für jeden Teil die Ellipse ebenso wie sie sich für jenen ersten Punkt ergeben hat, so lassen sich die zu jeder Ellipse gehörigen Aufrisspunkte erhalten, indem man Gebrauch macht von der Thatsache, dass beim Fortschreiten des Schnittkreises von einem Teilpunkt zum andern alle seine Punkte um gleich viel, und zwar hier um ein Achtel oder Zwölftel der ganzen Ganghöhe höher rücken. Die stetige Verbindung der einander entsprechenden Punkte der Aufrissellipsen des beweglichen Kreises liefert die Aufrisse jener Schraubenlinien. Figur 71 b zeigt ihre Bewegung auf der Fläche.

Die Schnittkurve zwischen der Fläche und einer beliebigen vertikalen Lichtstrahlenebene ergibt sich nun daraus, dass man die Schnittpunkte des Lichtstrahls mit den konzentrischen Kreisen aus dem Grundriss auf die



Figur 71a.

Schraubenlinien im Aufriss hinaufklet. Wo der Schnitt allzu schief wird, da lässt sich die Höhenlage des Punktes aus der Steigung der zugehörigen Schraubenlinie schärfer bestimmen, da die in jedem Punkt einer Schraubenlinie erreichte Höhe proportional dem Centriwinkel ist. Figur 71 c zeigt die Fläche mit allen im Grundriss Figur 71 a angegebenen Vertikalschnitten, worunter auch diejenigen der inneren, die Röhre in x und y berührenden Ebenen, deren Kurven schiefe verzogene doppelte Schleifen bilden.

Die Körperschattengrenze ergibt sich nun in bekannter Weise als Verbindungslinie der Berührungspunkte $k' l' m' n'$ der Lichtstrahl tangente, welche im Aufriss an die Schnittkurven gezogen werden. Wo eine solche Tangente eine in derselben Vertikalebene liegende zweite Schnittkurve schneidet, da ist ein Schlagschattenpunkt.

Schnittkurve K liefert z. B. links oben den Körperschattenpunkt k ; die Verlängerung des berührenden Licht-

strahls schneidet rechts unten die in derselben Vertikalebene mit K liegende Schnittkurve S im Punkt s' ; dieser ist ein Punkt der Schlagschattengrenze. Ebenso liefern die Körperschattenpunkte $l' m' n'$ u. s. w. die Schlagschattenpunkte $l' u' v' u. s. w.$

Die obere Grenzkurve der Schlagschattenfläche ist nur im Grundriss sichtbar; im Aufriss konnte sie nicht eingetragen werden, da sie fast durchaus mit dem oberen Umriss der Röhre zusammenfällt.

Die Schnittpunkte x' und y' der zuvor genannten doppelten Schleifen sind wichtige Körperschattengrenzungspunkte. Ebenso liefern die im Grundriss den äusseren Umriss berührenden Lichtstrahlen die wichtigen Grenzpunkte w' und z' in gleicher Höhenlage mit den vorigen; die Höhenlage lässt sich aus der Ganghöhe leicht scharf bestimmen. Die Körperschattengrenzen werden im Grundriss durchaus symmetrisch zur Achse wz , weil die Schnittkurven, beziehungsweise Paare von Schnittkurven, welche die vertikalen Lichtstrahlenebenen liefern, polar kongruente Hälften haben, beziehungsweise polar kongruent sind.

Um den Verlauf der Kurven noch deutlicher zu zeigen, ist in Figur 71 d ein Vertikalschnitt nach dem Grundrissdurchmesser LT beigelegt, der auch die im Aufriss nicht sichtbare obere Schlagschattengrenze darbietet. In diesem Schnitt fallen die Projektionen der Punkte xx' und ww' aufeinander. Zu beachten ist, dass die in der Figur erscheinende Vertikalschnittfläche der Röhre nicht symmetrisch zu ihrer vertikalen Mittellinie, sondern innen voller ist als aussen.

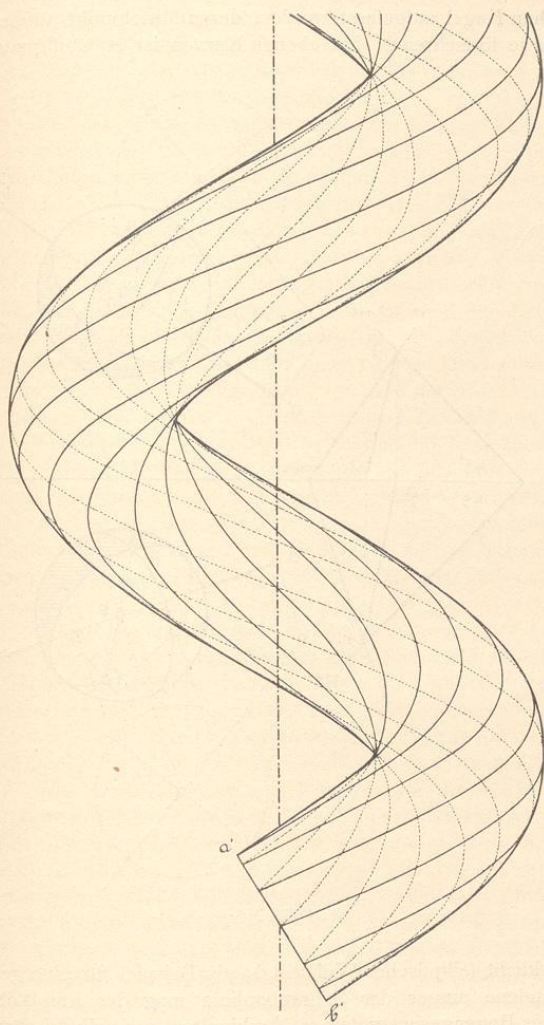
Interessant ist das Hinuntersteigen der inneren Körperschattengrenze von der oberen Hälfte zur unteren im Punkt xx' mit der Schleife im Grundriss, ebenso der Uebergang der äusseren Körperschattengrenze mit Fallen und Wiederaufsteigen in der Nähe des Punktes ww' unter Bildung einer kleinen Schleife im Aufriss. Auf der entgegengesetzten Seite der Röhre, an den Punkten y und z , verlaufen die Schattengrenzen ohne jeden Konflikt.

Ein eigenartiger Grenzfall für diese Uebergänge wird erhalten, wenn man den Steigungswinkel der leitenden Schraubenlinie der Röhre genau der Neigung des Lichtstrahls entsprechend, also gleich dem Winkel $\alpha = 35^\circ 15,9'$ annimmt. Ein Kreiscylinder, dessen Achse mit der Richtung des Lichtstrahls zusammenfällt, hat Körperschatten als Streiflicht auf der ganzen Mantelfläche. Wird er im Grundriss um einen kleinen Winkel flacher zum Grundriss gedreht, so erhält die rechte Hälfte Licht; wird er etwas steiler zum Grundriss gedreht, die linke. Dies angewendet auf den genannten Fall und auf den Normalschnitt wx mit zwei nahen Normalschnitten rechts und links von ihm ergibt folgendes: Eine obere Grenzkurve läuft stetig durch den höchsten Punkt des Normalschnitts wx , ebenso eine untere durch den tiefsten. Der Normalschnittkreis wx selbst ist ebenfalls Körperschattengrenze. Von den vier Flächenräumen, welche durch die drei Kurven abgegrenzt werden, haben zwei Scheitelräume Licht und zwei solche Schatten, und zwar sind im Schatten der äussere untere und der obere innere. In diesem Grenzfall findet also der Uebergang der Schattengrenze von oben nach unten und umgekehrt auf dem Normalschnittkreis selber statt. Wird

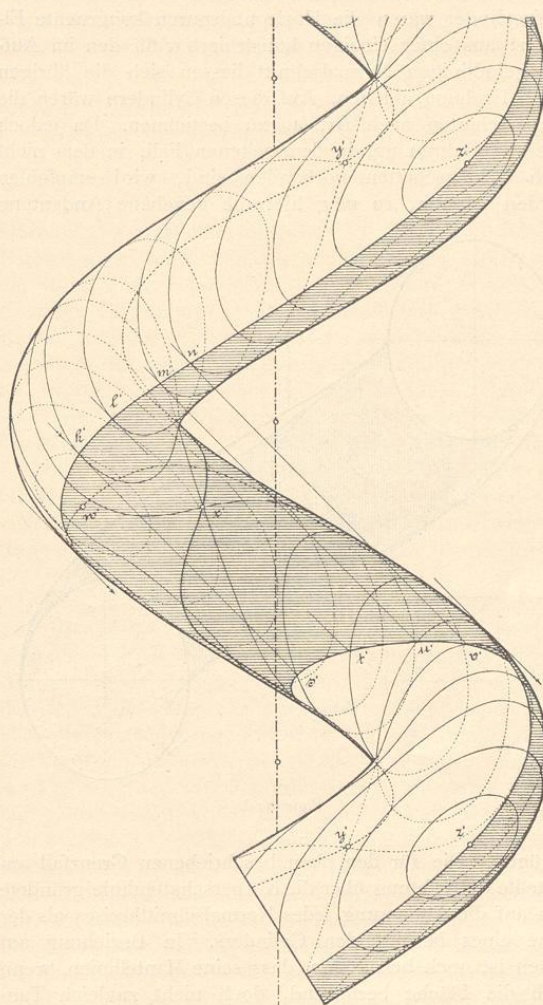
die Röhrenachse noch flacher angenommen, so trennen sich die Schattengrenzen wieder und verlaufen ohne Verwicklung, bis als weiterer Grenzfall der wagrecht liegende Wulst mit kreisförmiger Mittellinie (Figur 38 a) erreicht ist.

Die Schlagschattengrenzlinie wird auf dem oben beschriebenen Weg genügend scharf bestimmt; auch wird für sie ein anderes Verfahren kaum rascher zum Ziel führen. Dagegen kann man die Körperschattengrenze in

dass die kleine Achse der Kugelellipse immer in der Richtung des Lichtstrahls bleibt, so kann man auf jeden Normalschnitt die zwei Punkte durchstechen, in welchen die Kugelschattengrenze, also auch die Röhrenschattengrenze, die Normalschnittellipse schneidet. Für die Aufrisspunkte kann man entweder dasselbe Verfahren mit dem Aufriss der Kugel gegenüber den Aufrissellipsen der Normalschnitte anwenden, oder man kann die Grundrisspunkte



Figur 71 b.



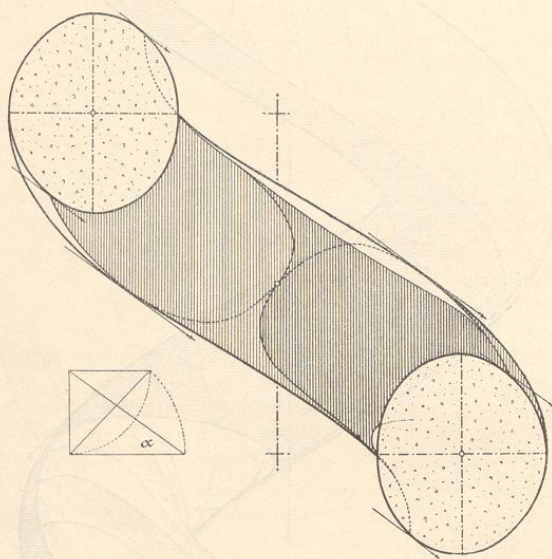
Figur 71 c.

der angegebenen Weise wegen der Unmöglichkeit der scharfen Bestimmung der Berührungspunkte, wenn auch wohl praktisch genügend, doch minder genau erhalten. Zu einer exakten Konstruktion führt die Betrachtung des Normalschnittkreises der Röhrenfläche als des Bestandteils der berührenden Kugelfläche. Legt man im Grundriss auf die elliptischen Projektionen der Normalschnitte nacheinander den Grundriss einer mit ihrer elliptischen Schattengrenze versehenen gleich grossen Kugel, und zwar so,

in den Aufriss hinaufloten, oder endlich man kann wieder die Höhenlage jedes Aufrisspunktes über oder unter dem Mittelpunkt seiner Kugel aus dem Grundriss ableiten. Der vertikale Abstand eines solchen Grenzpunktes vom Mittelpunkt seiner Kugel ist nämlich proportional dem Abstand seines Grundrisspunktes von der grossen Achse seiner Grundrissellipse, da alle Normalschnitte gleiche Horizontalneigung haben; an dem Normalschnitt, der sich im Aufriss als gerade Linie projiziert, lassen sich für alle

solche Grundrissabstände die zugehörigen Höhen leicht abnehmen. Diese Körperschattenbestimmung bildet einen Bestandteil der Konstruktion der Lichtstufenlinien, die in Art. 107 beschrieben ist, wonach in Beziehung auf den Gang der Konstruktion auf diesen Artikel verwiesen werden kann.

Ein dritter Weg wäre die Auffassung jedes Normalschnittkreises als der Zone einer schiefergerichteten Cylinderfläche mit diesem Normalschnitt. Für alle derart erhaltenen Kreiscylinder wären die Horizontalspuren kongruente Ellipsen; aus einer einzigen konstruierten für den im Aufriss geradlinigen Normalschnitt liessen sich die übrigen durch Drehung ableiten. Auf diesen Cylindern wären die Körperschatten nach Art. 49 zu bestimmen. Da jedoch dieses Verfahren nur in dem seltenen Fall, in dem nicht auch Schlagschatten vorhanden sind, wird empfohlen werden können, so mag hier die gegebene Andeutung

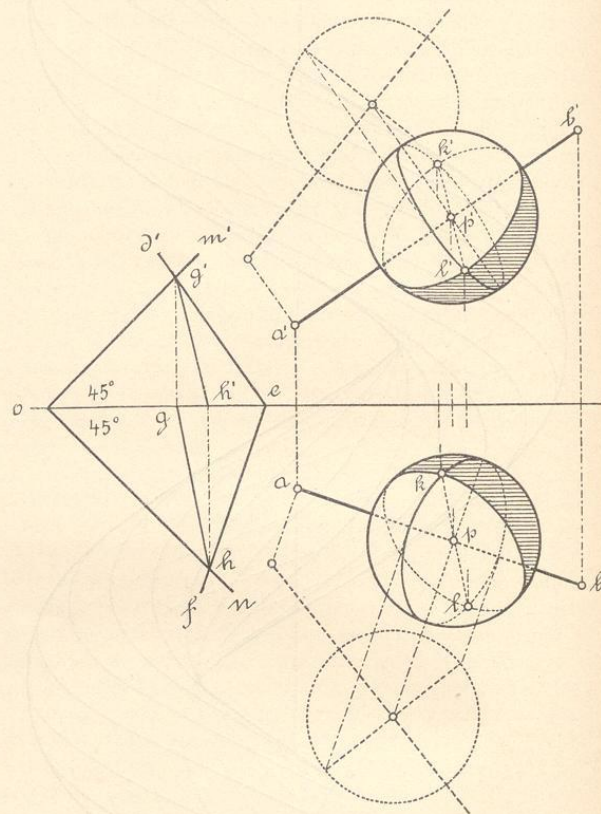


Figur 71 d.

genügen. Die für den oben beschriebenen Grenzfall angestellte Betrachtung über die Körperschattenlinie gründete sich auf die Auffassung jedes Normalschnittkreises als der Zone eines berührenden Cylinders. In Beziehung auf diesen ist noch beizufügen, dass seine Mantellinien, wenn auch die Fläche berührend, doch nicht zugleich Tangenten der Schraubenlinien auf der Röhrenfläche sind; diese haben ja verschiedene Neigungen und sind innen steiler als aussen, wogegen die Mantellinien des gedachten Cylinders alle die Neigung der leitenden Schraubenlinie haben. Die Tangenten an den Schraubenlinien erzeugen eine Fläche weit höherer Ordnung. Folgerichtig ist aber auch die Grundrissrichtung jeder solchen Tangente eine andere als die der Cylindermantellinie in demselben Punkt. Es gehen also durch den Berührungspunkt einer Tangentialebene an der Fläche drei Gerade, die alle in dieser Ebene liegen, erstens die Cylindermantellinie senkrecht zur Normalschnittebene oder parallel zur Tangente im zu-

gehörigen Punkt der leitenden Schraubenlinie, zweitens die Tangente am Normalschnittkreis, drittens die Tangente an der Schraubenlinie.

Tritt an die Stelle der Schraubenlinie der betrachteten Röhre eine beliebige andere Kurve, so erscheint der allgemeine Fall der Röhrenfläche mit kreisförmigem Normalschnitt. Auch dieser Fall kann als Umhüllungsfläche aller Lagen einer beweglichen unveränderlichen Kugel aufgefasst werden, deren Mittelpunkt auf der Kurve fortschreitet. Mit ebenen Kurven ist er häufig ver-



Figur 71 e.

wirklich (elliptischer Wulstring); als Beispiel für eine gewundene ausser der Schraubenlinie mag der Rundstab eines Bogengesimses (einer „Archivolte“) auf cylindrischer Wandfläche genannt werden.

Zur Bestimmung der Körperschattengrenze führt im allgemeinen am raschesten die oben bei der Schraubenröhre durchgeführte Betrachtung des Normalschnittkreises als der Berührungslinie der rückenden Kugel und die Bestimmung der Schattenpunkte auf diesem Kreis der Kugel. An die beliebig gekrümmte Achse der Röhre sei in einem bestimmten Punkt pp' (Figur 71 e) eine Tangente $ab a'b'$ gezogen worden. Man hat dann auf der mit ihren Körperschattengrenzen versehenen Umhüllungskugel in pp' den Kreis zu zeichnen, dessen Ebene normal zu dieser Tan-

gente steht. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit dem Körperschattenkreis der Kugel sind die Schattenpunkte kk' und ll' für den Normalschnitt der Röhre im Punkt pp' .

Der gesuchte Kreis projiziert sich in zwei Ellipsen, deren grosse Achsen senkrecht zu den Tangentenprojektionen stehen. Die kleine Achse im Grundriss ergibt sich aus der Umklappung der horizontalprojizierenden Ebene der Tangente in die Horizontalebene. In dieser Umklappung ist der Schnittkreis eine Gerade senkrecht zur umgeklappten Tangente; das Zurückklappen der Endpunkte dieser Geraden giebt die kleine Achse im Grundriss. Die Durchführung derselben Konstruktion im Aufriss liefert die kleine Achse der Aufrissellipse.

Das umständliche Konstruieren der beiden Ellipsen des Normalschnittkreises lässt sich nun aber ersparen und zwar dadurch, dass man die Schnittlinie $klk'l'$ der Ebenen beider Kreise unmittelbar aufsucht. Die Spuren einer Ebene, die senkrecht zu einer Geraden steht, sind senkrecht zu den Projektionen der Geraden gerichtet, also die Spuren der Ebene der Kugelschattengrenze senkrecht zu den Lichtstrahlprojektionen und die Spuren der Ebene des Normalschnittkreises senkrecht zu den Projektionen der Tangente. Sind also in Figur 71 $e om'$ und on senkrecht zu den Lichtstrahlprojektionen die Spuren der ersten Ebene, ferner $e d'$ senkrecht zu $a' b'$ und $e f$ senkrecht zu $a b$ die Spuren der zweiten, so geben die Projektionen der Schnittlinie beider Ebenen gh und $g' h'$ die Richtungen kl und $k' l'$, in welchen im Grundriss und Aufriss der Berührungskugel die Durchmesser durch den Mittelpunkt pp' zu ziehen sind, um als Schnitte mit den Schattenkreisprojektionen der Kugel die Punkte kk' und ll' zu liefern.

Zu grösserer Sicherheit in der Bestimmung der Tangentenprojektionen für einen ausgewählten Punkt einer doppelt gekrümmten Leitlinie kann man oft Gebrauch machen von der Thatsache, dass eine Tangente einer ebenen Kurve beim Aufwickeln der Kurvenebene auf einem vertikalen Cylinder ihre Horizontalneigung nicht ändert.

Die zuvor beschriebene Konstruktion der Körperschattengrenze einer Röhrenfläche mit kreisförmigem Normalschnitt vereinfacht sich wesentlich, wenn die Röhrenachse eine ebene Kurve parallel zu einer Grundebene wird, weil dann in der Projektion auf diese Grundebene alle Normalschnitte geradlinig werden. Die Körperschattengrenze ergibt sich in diesem Fall ohne Benützung eines Grundplans, indem der Aufriss der Umhüllungskugel samt ihrer Körperschattengrenze einmal gezeichnet und mit Durchmessern parallel zu den ausgewählten Normalschnitten versehen wird. Jede Normalschnittlinie im Aufriss der Fläche ist dann ebenso einzuteilen, wie der ihr parallele Durchmesser durch die Schattengrenzlinie der Kugel eingeteilt ist. (Vergl. Art. 58; die dort gezeichnete Figur kann auch für den vorliegenden Fall als Beispiel gelten.)

Für Schlagschatten auf solchen Flächen (mit ebengekrümmter oder doppeltgekrümmter Achse) wird kaum eine andere als die allgemeine Lösung für gekrümmte Flächen zu finden sein. Sie erfordert das Zeichnen von Linien, die von auszuwählenden Punkten des fortücken-

den Kreises beschrieben werden, in Grundriss und Aufriss, und es sind diese Linien ganz in derselben Weise zu benützen, wie die Schraubenlinien bei der schraubenförmigen Röhre. Sehr häufig wird jedoch dieses umständliche Verfahren dadurch umgangen werden können, dass mässig lange Stücke zwischen zwei Normalschnitten als Kreiscylinder betrachtet und mit Schattengrenzen beider Art bedacht werden. Dies ist zwar nur eine Annäherung und um so weniger streng richtig, je stärker die Krümmung der Röhrenachse; aber es wird in den meisten Fällen der praktischen Schattenkonstruktion genügen.

Röhrenflächen mit beliebigem, aber unveränderlichem Normalschnitt. 72.

Der einfachste Fall einer solchen ist die Cylinderfläche mit beliebigem Normalschnitt; Kreislinien des Fortschreitens ergeben Drehungsflächen. Beispiele für das Fortschreiten auf anderen ebengekrümmten Linien sind die Rundstäbe, Hohlkehlen, Karniese und Wellen der Gesimse mit elliptisch oder wellenförmig geschweiften Kanten, wie sie etwa der Barockstil anwendet, oder die Horizontalgesimse auf ebenso im Grundriss geschweiften Wandflächen. Doppelt gekrümmte Linien des Fortschreitens bieten die zuvor genannten geschweiften Gesimse, wenn sie auf cylindrischer Wandfläche auftreten.

Jeder Normalschnitt einer solchen Fläche lässt sich als eine niedrige Zone eines Cylinders vom selben Normalschnitt auffassen, dessen Mantellinien parallel sind der Tangente an der Kurve des Fortschreitens in dem Punkte des Normalschnitts.

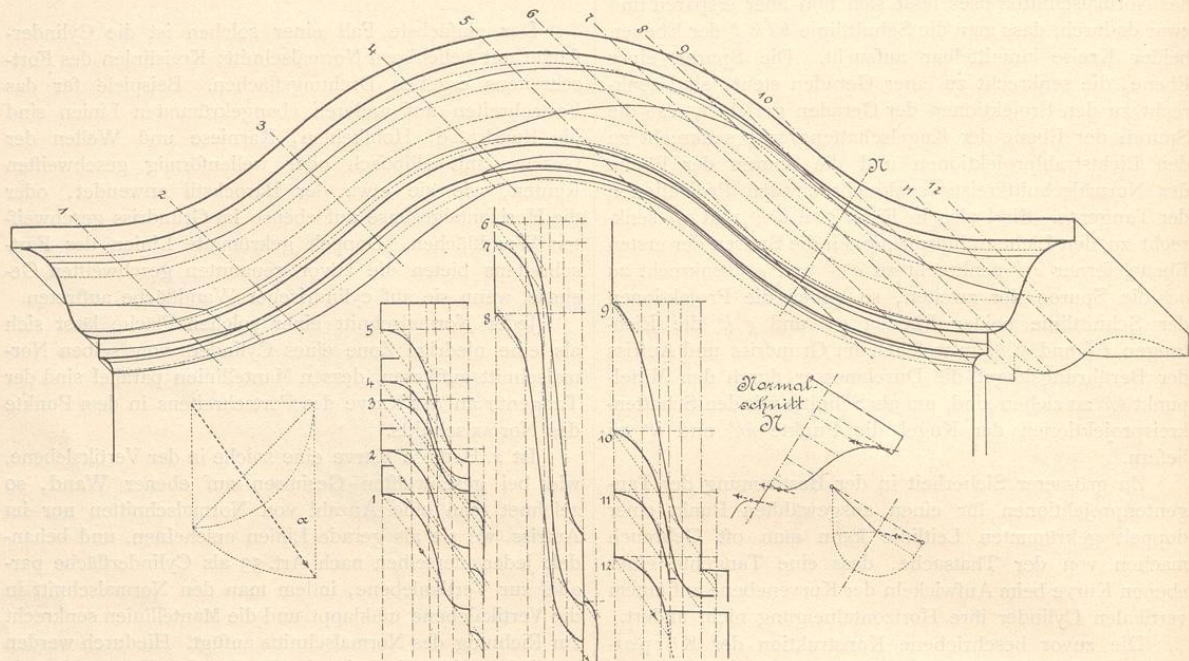
Ist z. B. diese Kurve eine solche in der Vertikalebene, wie bei geschweiften Gesimsen auf ebener Wand, so zeichnet man eine Anzahl von Normalschnitten nur im Aufriss, wo sie als gerade Linien erscheinen, und behandelt jeden derselben nach Art. 53 als Cylinderfläche parallel zur Vertikalebene, indem man den Normalschnitt in die Vertikalebene umklappt und die Mantellinien senkrecht zur Richtung des Normalschnitts anfügt. Hiedurch werden auf jedem Normalschnitt die Punkte der Körperschattengrenze erhalten. Schlagschatten einer Selbstbeschattung können zunächst nach dem allgemeinen Verfahren erhalten werden, indem man die äquidistanten Kurven zeichnet, die bestimmte Punkte der Normalschnittkurve bei deren Bewegung beschreiben; als Schnittebenen wird man dabei im allgemeinen besser die vertikalprojizierenden als die vertikalen wählen, und oft ohne Grundriss mit Hilfe der leicht erhältlichen Umklappungen der Schnittlinien in die Vertikalebene arbeiten, indem man in einer besonderen Figur alle Schnittlinien als Profile verschiedener Höhe, aber gleicher Ausladung aufeinanderlegt und die veränderte Richtung des Lichtstrahls für die Umklappung mit dem Winkel α berücksichtigt. Wenn man aber einmal solche Schnitte der Schlagschatten wegen einzuführen hat, so benützt man sie zweckmässig auch für die Körperschattengrenze, und es entfällt dann deren zuerst beschriebene Bestimmung.

Figur 72a bietet ein durchgeführtes Beispiel. Unter der Hauptfigur sind die Schnittkurven der vertikalprojizierenden

zierenden Ebenen 1 bis 12 herausgetragen; links unten ist die Richtung des Lichtstrahls für die Ebenen dieser Schnittkurven bestimmt und diesen letzten sind sowohl die berührenden als die schlagschattengebenden Lichtstrahlen beigelegt. Rechts unten erscheint die zuerst beschriebene Bestimmung der Körperschattenpunkte für den Normalschnitt N mit Verwertung von Art. 53.

Wenn die Schlagschattengrenze auf der Fläche von einem Flächenrand erzeugt wird, wie in Figur 72 a, so giebt es noch ein zweites Verfahren zu ihrer Bestimmung, verwandt mit demjenigen aus Art. 61 für Drehungsflächen. Man sucht den Schlagschatten des Flächenrandes auf einer Schnittebene, die zur Vertikalebene parallel steht; die Schattenlinie wird kongruent der Randlinie und nur in der

der in dem Rahmengesims um einen Steinbogen in kreis-cylindrischer Mauer auftritt, wobei die ursprünglich in einer Vertikalebene liegende kreisbogenförmige Unterkante des Bogengesimses samt ihrer Vertikalebene und dem Gesims darauf auf der cylindrischen Wand aufgewickelt zu denken ist. Jede gerade Linie als Basis eines Normalschnittprofils in dem auf der Vertikalebene stehenden Gesims verwandelt sich bei diesem Aufwickeln in eine Schraubenlinie, und die horizontalen, zur Vertikalebene senkrechten Abscissen der Normalschnittprofilinie in deren eigener Ebene bilden nach dem Aufwickeln, indem sie sich normal zur Cylinderfläche stellen, eine Wendelfläche, so dass auch die ursprünglich ebene Normalschnittprofilinie eine doppelt-gekrümmte Kurve, und zwar eine solche in einer Wendel-



Figur 72 a.

Richtung des Lichtstrahls verschoben. Die Schnittlinie der Ebene mit der Fläche ist eine der oben genannten äquidistanten Kurven und leicht erhältlich. Wo sie geschnitten wird von jener Schlagschattenlinie, da ist ein Schlagschattengrenzpunkt auf der Fläche.

Uebrigens wird es auch hier für manche Fälle der praktischen Schattenkonstruktion genügen, wenn mässig lange Stücke der Fläche zwischen zwei Normalschnitten als Cylinderflächen betrachtet und sowohl in Beziehung auf die Schlagschattengrenze einer Selbstbeschattung als auf die Körperschattengrenzen als solche behandelt werden. Die gebrochenen Linien, die bei diesem Näherungsverfahren für die Schattengrenzen entstehen, sind leicht durch stetige zu ersetzen.

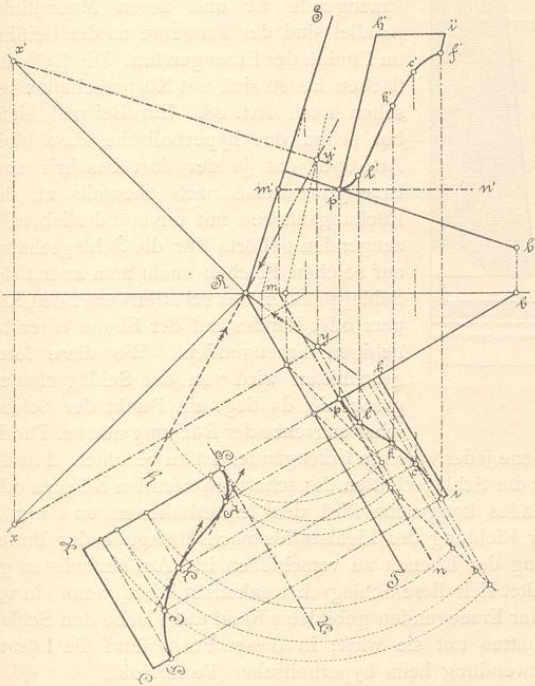
Schwieriger, aber auch theoretisch interessanter wird die exakte Schattenkonstruktion bei doppelt gekrümmten Kurven des Fortschreitens, etwa bei einem Glockenleiten,

fläche wird. Trotz dieser verwickelten Form lässt sich jede solche Kurve mit Hilfe der Uebertragung jener horizontalen Abscissen in die Aufwicklung unschwer darstellen. Verbindet man die einander entsprechenden Punkte der Profillinien in der Aufwicklung, so erhält man in Grundriss und Aufriss die äquidistanten Linien, welche die Punkte der Profillinie bei deren Bewegung auf der Cylinderfläche beschreiben; diese Linien können auch hier die Grundlage des allgemeinen Verfahrens bilden, das jedoch in diesem Fall nur mit vertikalstehenden Schnittebenen parallel zum Lichtstrahl durchgeführt werden kann. Bei kreis-cylindrischer Mauer werden die Linien selbstverständlich im Grundriss konzentrische Kreise.

Mit der angegebenen Erzeugungsweise entfernt sich übrigens das Gesimsglied ein wenig von dem eingeführten Begriff der Röhrenfläche, in dem nicht mehr die ebenen Normalschnitte kongruent sind, und es wären streng ge-

Für eine strenge Röhrenfläche mit beliebig gewundener Leitlinie ist schon das Aufzeichnen der Umrisse und Kanten der Fläche eine sehr zeitraubende Arbeit, mehr noch die Schattenkonstruktion; doch mag sie in den Grundzügen

Für eine strenge Röhrenfläche mit beliebig gewundener Leitlinie ist schon das Aufzeichnen der Umrisse und Kanten der Fläche eine sehr zeitraubende Arbeit, mehr noch die Schattenkonstruktion; doch mag sie in den Grundzügen



Figur 72 b.

Nach Art. 48 ist der Lichtstrahl auf die Normalschnittebene zu projizieren und zwar in der Richtung der Mantel-

Nach Art. 48 ist der Lichtstrahl auf die Normalschnittebene zu projizieren und zwar in der Richtung der Mantel-

Die Richtung der Spuren SR und RT der Normalschnittebene ist rasch erhältlich; sie stehen senkrecht zu den gleichnamigen Projektionen $p'b'$ und $p'b$ der Tangente. Da die Hauptnormale in der Normalschnittebene liegt, so müssen die Spuren der letzten durch die Spuren der ersten gehen, also muss die Vertikalspur SR durch m' gezogen werden.

Die Richtung der Spuren SR und RT der Normalschnittebene ist rasch erhältlich; sie stehen senkrecht zu den gleichnamigen Projektionen $p'b'$ und $p'b$ der Tangente. Da die Hauptnormale in der Normalschnittebene liegt, so müssen die Spuren der letzten durch die Spuren der ersten gehen, also muss die Vertikalspur SR durch m' gezogen werden.

Man klappt nun die Normalschnittebene samt dieser Lichtrichtung und der Hauptnormalen in eine Grundebene um, fügt in der Umklappung an die Hauptnormale PN die Profilinie der Röhre $FPHj$ in der gegebenen Lage und bestimmt die Berührungspunkte K und L der in der gefundenen Lichtrichtung YR gezogenen Tangenten an der Profilinie. Durch Zurückklappen dieser Punkte und einer genügenden Zahl von andern Punkten C der Profilinie erhält man in den Projektionen gleichzeitig die Schattenschnitte und die zum Zeichnen der Umrisslinie der Röhre notwendigen Normalschnittlinien.

Man klappt nun die Normalschnittebene samt dieser Lichtrichtung und der Hauptnormalen in eine Grundebene um, fügt in der Umklappung an die Hauptnormale PN die Profilinie der Röhre $FPHJ$ in der gegebenen Lage und bestimmt die Berührungspunkte K und L der in der gefundenen Lichtrichtung YR gezogenen Tangenten an der Profilinie. Durch Zurückklappen dieser Punkte und einer genügenden Zahl von andern Punkten C der Profilinie erhält man in den Projektionen gleichzeitig die Schattenspunkte und die zum Zeichnen der Umrisslinie der Röhre notwendigen Normalschnittlinien.

Röhrenflächen mit veränderlichem Normal-

schnitt.

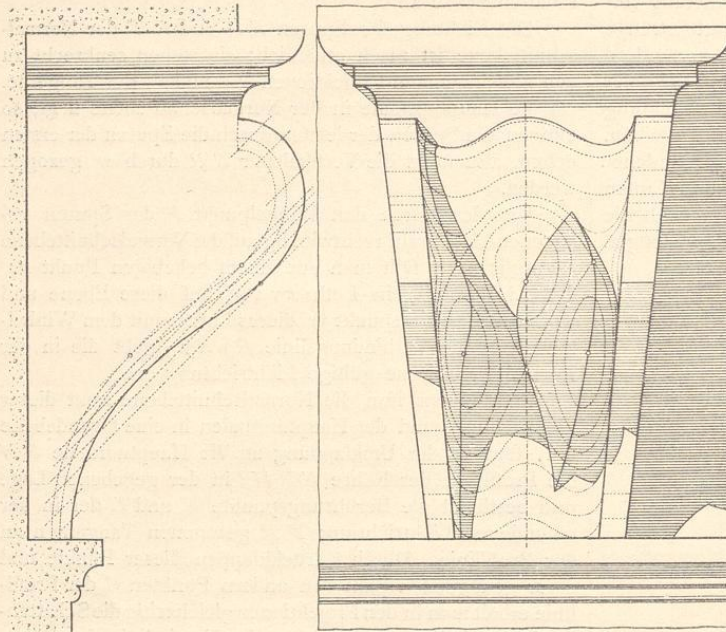
Die Schattenkonstruktion ist die strenge Durchführung des allgemeinen Verfahrens mit Benützung der seitlich projizierenden Lichtstrahlenebenen als Schnittebenen, wobei sich eine interessante Schnittkurvengruppe auf einfachem Weg ergeben hat.

Die Schattenkonstruktion ist die strenge Durchführung des allgemeinen Verfahrens mit Benützung der seitlich projizierenden Lichtstrahlenebenen als Schnittebenen, wobei sich eine interessante Schnittkurvengruppe auf einfachem Weg ergeben hat.

spiele gewundene Hornformen oder gewundene Rokoko-
gesimse, die ihr Profil im Fortschreiten verjüngen) dürfte
ebenfalls nur das allgemeine Verfahren anwendbar sein.
Hiebei wären für eine genügende Zahl von Normalschnitten

normal zur Leitlinie bleibt, während sie bei dieser
immer parallel gerichtet ist, ferner bei dieser auch eine
Verdrehung stattfinden kann, bei jener nicht.

Der einfachste Fall der Rückungsfläche ist derjenige,
in welchem die rückende Kurve immer
kongruent und gleichgerichtet bleibt. Hie-
für sei zunächst der Fall des Fortschreitens
auf ebener Kurve ins Auge gefasst. Aus
dem Begriff der Fläche folgt in diesem Fall,
dass alle ihre ebenen Schnitte parallel zur
Ebene der Leitlinie dieser kongruent sind.
Jede Lage der Erzeugenden lässt sich auf-
fassen und schattieren als eine niedrige
Zone einer Cylinderfläche, deren Basis die
Erzeugende ist und deren Mantellinien
parallel sind der Tangente an der Leitlinie
im Punkte der Erzeugenden. Die Cylinder-
flächen lassen sich mit Körperschaften ver-
sehen nach Art. 48. Ein Beispiel hiefür
bot schon das hyperbolische Paraboloid,
Art. 69e, das ja der dort beschriebenen
Erzeugungsweise nach ebenfalls zu den
Rückungsflächen mit unveränderlichen Er-
zeugenden gehört. Für die Schlagschatten
auf solchen Flächen sucht man zuerst den
Schlagschatten des schattenwerfenden Kör-
pers oder Randes auf der Ebene einer be-
liebigen Erzeugenden. Wo diese letzte
geschnitten wird von der Schlagschatten-
grenzlinie, da liegt ein Punkt der Schlag-
schattengrenze der Rückungsfläche. Für die



Figur 73.

die beiden Projektionen ganz in derselben Weise durch
Umklappungen zu beschaffen und durch Verbinden ähn-
lich liegender Punkte zu verwerthen, wie für die Flächen
mit unveränderlicher Erzeugenden am Schluss des Art. 72
beschrieben ist.

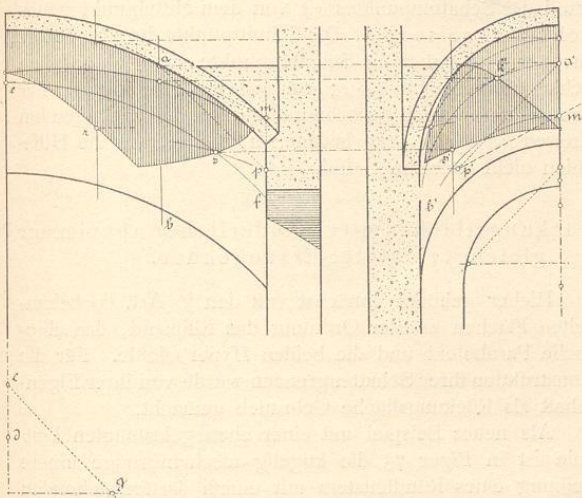
74. Rückungsflächen mit gleichgerichtet fortschrei-
tender, unveränderlicher Erzeugenden.
Steigendes Tonnengewölbe mit bogenför-
miger Scheitellinie. Gewundene Säule.

Rückungsflächen entstehen, wenn eine beliebige
ebene Kurve mit einem bestimmten Punkt ihrer Ebene
auf einer beliebigen Leitlinie derart fortschreitet, dass ihre
Ebene immer parallel bleibt, ihre Form immer unverändert
oder geometrisch ähnlich bleibt und im letzten Fall ihre
Grösse sich nach einem bestimmten Gesetz ändert, das
gewöhnlich durch eine zweite Kurve, die ein zweiter Punkt
der Erzeugenden oder ihrer Ebene beschreibt, dargestellt
ist. Gewöhnlich bleibt die rückende Kurve gleichgerichtet;
doch sollen hier zu den Rückungsflächen im weitesten
Sinn auch solche Flächen gerechnet werden, bei welchen
die Erzeugende, indem ihre Ebene parallel fortrückt, in
dieser Ebene sich dreht, und zwar nach irgend einem
Gesetz, das von demjenigen des Parallelrückens abhängig
ist. Hienach scheiden sich die hier im weitesten Sinne
gebrauchten Begriffe „Röhrenfläche“ und „Rückungsfläche“
dadurch, dass bei jener die Ebene der Erzeugenden immer

Ebene jeder weiteren Erzeugenden ist zu beachten, dass auf
ihr der Schlagschatten des schattenwerfenden Körpers oder
Randes kongruent wird dem ersterhaltenen und nur in
der Richtung des Lichtstrahls nach Massgabe der Entfer-
nung der Ebenen zu verschieben ist. Am einfachsten ge-
staltet sich diese Schlagschattenkonstruktion, wenn ein von
einer Erzeugenden gebildeter Rand der Fläche den Schlag-
schatten auf sie wirft; in dieser Form fand die Lösung
Anwendung beim hyperbolischen Paraboloid.

In Figur 74a ist als einfaches Beispiel mit kreisförmiger
vertikalstehender Erzeugenden und kreisförmiger Leitlinie
ein steigendes Tonnengewölbe mit bogenförmiger Scheitel-
linie gewählt und durch Längenschnitt und Vorderansicht
dazu dargestellt. Die Leibungsfläche erzeugt sich ent-
weder durch paralleles Rücken des (halben) Stirnbogens
an der Scheitellinie oder durch Rücken des Scheitelbogens
am Stirnbogen; beide Erzeugungen liefern dieselbe Fläche.
Zur Bestimmung der Körperschattengrenze ist für einen
ausgewählten Vertikalschnitt $ab'a'b'$, der sich im Längens-
schnitt als Vertikallinie projiziert, die Tangente am an die
Scheitellinie zu ziehen und auf das erhaltene kurze Stück
eines gerade steigenden Tonnengewölbs die Konstruktion
aus Art. 52 anzuwenden. Es ist also am bis zum Schnitt
mit der Bogenwandebene zu verlängern, m nach m' hin-
überzutragen und durch aa' der Lichtstrahl $ap'a'p'$ bis
zum Schnitt mit der Bogenwandebene in pp' zu ziehen.
Der Berührungspunkt k' einer an den Schnittkreis $a'b'$
parallel zu $m'p'$ gezogenen Tangente ist ein Körperschatten-

grenzpunkt. Die Punkte erscheinen zuerst in der Vorderansicht (oder Seitenprojektion) und sind in den Längenschnitt (oder Aufriss) hinüber zu linieren. Für die Bestimmung eines Schlagschattengrenzpunktes ist eine Lage der fortrückenden Scheiteltangentenlinie im Längenschnitt gezeichnet; sie bildet einen kongruenten Bogen ef mit vertikal fortgeschobenem Mittelpunkt d . Wo diese Erzeugende geschnitten wird von dem Schlagschatten, den der Scheiteltangentenbogen auf ihre Ebene wirft, da ist ein Schlagschattengrenzpunkt s . Der Schlagschattenkreis ist ein kongruenter Kreis aus dem Mittelpunkt g . Da auch der Stirnbogen einen Teil der Selbstbeschattungsgrenze der Fläche wirft, so ist für die Stirnbogenlinie in der Seitenprojektion dieselbe Konstruktion durchzuführen wie für den Scheiteltangentenbogen im Aufriss. (Die Konstruktion ist dargestellt durch den Schlagschattengrenzpunkt r mit seinen Hilfslinien.) Zu-



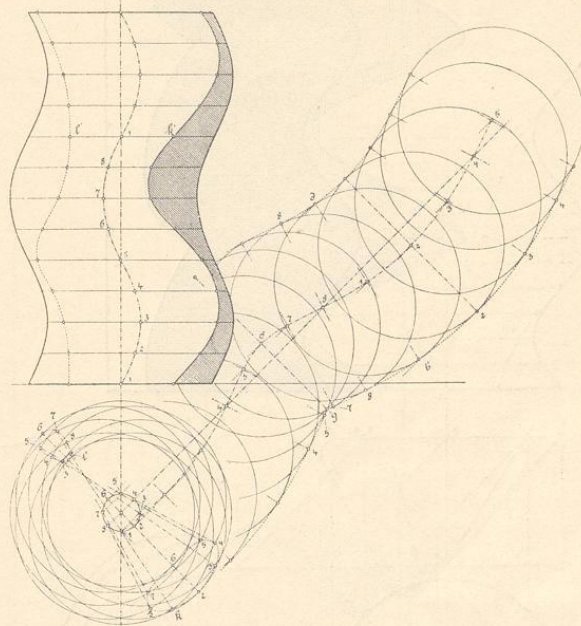
Figur 74 a.

letzt sind die im Aufriss erhaltenen Schlagschattenpunkte hinüberzuliniieren in die Seitenprojektion, ebenso die in dieser erhaltenen in den Aufriss.

Von den selten verwirklichten Rückungsflächen mit gewundener Leitlinie und unveränderlicher Erzeugenden ist die nächstliegende und interessanteste der Schaft der gewundenen Säule des Barockstils. Dieses Gebilde ist nicht etwa als steile schraubenförmige Wulstfläche nach Art. 71 zu gestalten, da der Horizontalschnitt einer solchen keinen Kreis liefert, also Basis und Kapitäl der Säule im Grundriss nicht kreisförmig sein könnten. Vielmehr ist die gewundene Säulenschaftfläche dadurch zu erzeugen, dass der Mittelpunkt eines horizontalen unveränderlichen Kreises auf einer steilen Schraubenlinie mit vertikaler Achse ansteigt (Figuren 74b und 74c). Die Umrisslinien im Aufriss werden der Projektion dieser Schraubenlinie kongruent, da alle Kreispunkte, also auch die beiden äussersten, im Aufsteigen kongruente Schraubenlinien beschreiben.

In Figur 74 b ist die Körperschattengrenze ähnlich bestimmt wie für die Drehungsflächen nach Art. 59. Auf der Horizontalebene sind die Schlagschatten einiger Lagen

123 u. s. w. des erzeugenden Kreises gezeichnet; die Umhüllungslinien dieser Kreise sind die Schlagschattengrenzen des Schaftes, also von den Körperschattengrenzen geworfen. Bestimmt man möglichst genau die Berührungspunkte b und d dieser Umhüllungslinien und eines Schattenkreises i , so erhält man in ihnen die Schlagschatten des Körperschattengrenzpunktes, die auf dem erzeugenden Kreis i liegen. Wenn daher durch die Punkte b und d ein Lichtstrahl rückwärts gezogen oder im Grundriss durch den Mittelpunkt i des erzeugenden Kreises eine Parallele zu dem Durchmesser bd des Schattenkreises i gezogen wird, so schneidet der Lichtstrahl oder diese Parallele den Grundrisskreis i in den Körperschattenpunkten k und l , die in den Aufriss nach k' und l' hinaufzuloten sind.



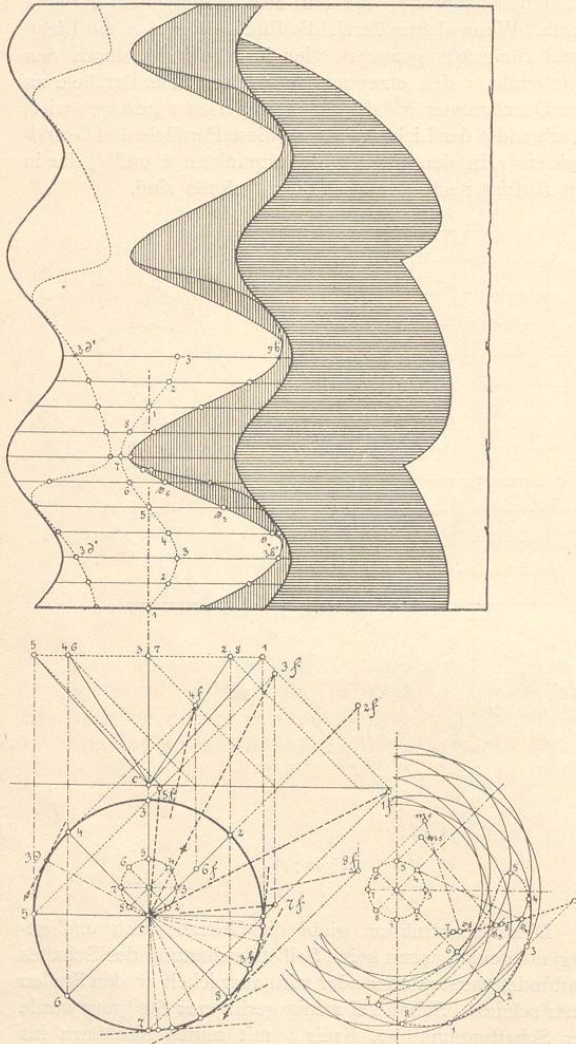
Figur 74 b.

Diese Konstruktion giebt die Grenze rasch und genügend genau, wenn keine Selbstbeschattung des Schaftes stattfindet, versagt aber oder wird verwickelt an den Stellen einer solchen. Schon bei wenig geringerer Steigung würde der Schattenpunkt auf Kreis 6 mit seinen Nachbarn ins Innere der Schattenfläche rücken und daraus Selbstbeschattung der Schaftfläche zu erkennen sein.

Figur 74c bietet neben der Bestimmung einer solchen Selbstbeschattung eine andere, kaum minder einfache Konstruktion für die Körperschattengrenze. Jeder Horizontalkreis des Schaftes ist aufgefasst als Zone eines niedrigen schiefen Cylinders, dessen Basis der Horizontalkreis und dessen Achse die Tangente an der leitenden Schraubenlinie im Mittelpunkt des Kreises. Wo die Körperschattenpunkte auf diesem Kreis liegen als auf einem Bestandteil der Cylinderfläche, da müssen sie auch für die Schaftfläche liegen. Die Schattenpunkte auf den Cylindern sind nach Art. 49 bestimmt; der grössere Grundrisskreis

um c ist als gemeinschaftlicher Basiskreis für alle Cylinderflächen benützt.

Durch einen beliebigen Punkt cc' der Horizontalebene sind Parallelen zu den Tangenten in den Punkten 1 bis 8 an der leitenden Schraubenlinie gezogen, wofür die Steigung dieser durch Verstreckung ihres Grundrisskreises zu



Figur 74 c.

bestimmen war. Diese Parallelen bilden 8 Mantellinien $c'1, c'2, c'3$ u. s. w. einer geraden Kreiskegelfläche mit nach unten gerichteter Spitze cc' . Durch die Basispunkte 1, 2, 3 u. s. w. dieser Kegelfläche sind Lichtstrahlen bis zum Schnitt mit der Horizontalebene gezogen. Die Verbindungslinie des hiedurch erhaltenen Schnittpunktes $3f$ mit c giebt die Richtung $3fc$, mit welcher an den erzeugenden Kreis 3 die Tangenten zu ziehen sind, deren Berührungspunkte $3b$ und $3d$ die Körperschattenpunkte der Schafffläche auf Kreis 3 darstellen. Im Aufriss können nun von Punkt 3 der Leitlinie aus die im Grundriss er-

haltenen Horizontalmasse für die Schattengrenzpunkte $3b'$ und $3d'$ aufgetragen werden, und in derselben Weise dient der einzige Grundrisskreis für alle Lagen des Horizontal-schnittkreises.

Zur Bestimmung der Grenze der Selbstbeschattung ist im Hilfsgrundriss rechts der Schlagschatten des Körperschattengrenzstücks 7, 8, 1 auf der Horizontalebene des erzeugenden Kreises 4 gezeichnet. Wo dieses Schattenstück geschnitten wird von dem Grundrisskreis 4, da ist der Schlagschattenpunkt auf dem Kreis 4; wo es geschnitten wird von den leicht erhältlichen Schlagschatten der Kreise 5 und 6 auf derselben horizontalen Ebene, da sind die Schlagschattenpunkte für die Kreise 5 und 6 in dem Sinne, dass im Aufriss die horizontale Entfernung des Schattenpunktes s_5 von seinem Mittelpunkt 5 dieselbe sein muss, wie im Hilfsgrundriss der horizontale Abstand des Schattenpunktes s_5 von dem Mittelpunkt seines Schattenkreises m_5 . Die Schnittpunkte der drei Kreise aus 4, 5, 6 gaben die Schattenpunkte s_4, s_5, s_6 auf dem Schlagschattenstück 7, 8, 1; zur sicheren Bestimmung der Grenze waren noch Zwischenpunkte auf den erzeugenden Kreisen 5, 5 und 6, 5 zu bestimmen, für welche die Hilfslinien nicht gezeichnet sind.

Rückungsflächen mit veränderlicher, aber immer 75, gleichgerichteter Erzeugenden.

Hierher gehören zunächst von den in Art. 69 behandelten Flächen zweiter Ordnung das Ellipsoid, das elliptische Paraboloid und die beiden Hyperboloide. Für die Konstruktion ihrer Schattengrenzen wurde von ihrer Eigenschaft als Rückungsfläche Gebrauch gemacht.

Als neues Beispiel mit einer eben gekrümmten Leitlinie ist in Figur 75 die kugelig-nischenförmige innere Leibung eines Rundfensters mit einem darüberstehenden „Kernbogen“ gewählt. Für die Fensterleibung ist zunächst der Höhenschnitt mit dem oberen und unteren Umriss der Fläche festgesetzt, und zwar jener gerade, dieser als konkave Kreislinie. Die Fläche selbst ist dann durch Rücken eines veränderlichen Kreises parallel zur Wandebene erzeugt, wobei die Endpunkte des vertikalen Kreisdurchmessers immer auf jenen beiden Leitlinien bleiben.

Jede Zone einer solchen Rückungsfläche zwischen zwei einander nahe liegenden verschieden grossen Erzeugenden lässt sich auffassen und schattieren als niedrige Zone einer Kegelfläche, wobei die kurzen Stücke der von geometrisch-ähnlich liegenden Punkten bei der Erzeugung beschriebenen Kurven zu Mantellinien der Kegelfläche geworden sind. Fallen die beiden Erzeugenden in eine zusammen, so gehen die Mantellinien in Tangenten an jenen Kurven über. Die Spitze des gedachten Kegels ist erhältlich als Schnittpunkt zweier solcher Tangenten. Wo die Körperschattenpunkte auf der Erzeugenden liegen als auf der Basis des Kegels, da liegen sie auch für die Rückungsfläche. (Die Betrachtung würde auch für eine gewundene Leitlinie gelten.)

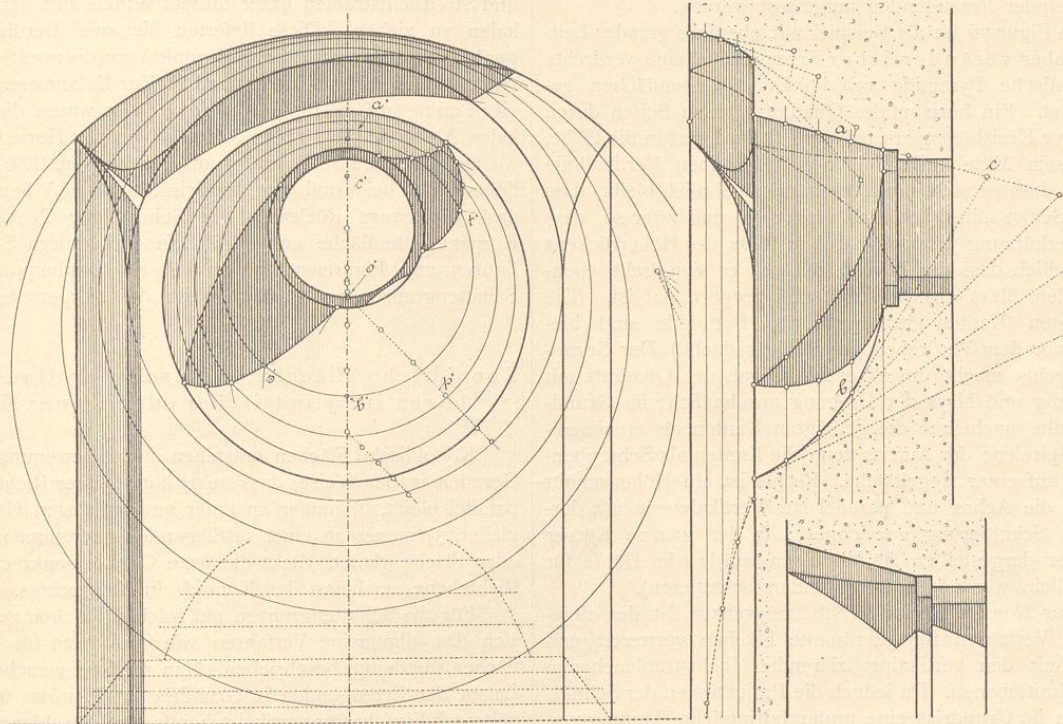
In dem eingeführten Beispiel wird für die Lage ab der Erzeugenden die Spitze c des Kegels im Höhenschnitt der Leibungsfläche erhalten als Schnitt der verlängerten oberen

Leitlinie mit der Tangente bc an der unteren Leitlinie im Fußpunkt b der Erzeugenden. Die Bestimmung der Körperschattenpunkte auf der Erzeugenden erfolgt nach Art. 46; Hilfslinien hierfür sind nicht eingezeichnet.

Der Schlagschatten auf einer solchen Rückungsfläche wird auf demselben Weg erhalten wie für die Rückungsflächen mit unveränderlichen Erzeugenden. Bei dem gewählten Beispiel wirkt für die Frontansicht des Fensters der kreisförmige Rand den Schlagschatten, so dass die Schattenpunkte in einfacher Weise je als Schnittpunkte zweier in Frontansicht erscheinender Kreise auftreten. So sind z. B. die Punkte s' und t' erhalten als Schnitte des aus p' mit dem Radius des Randkreises o' beschriebenen Kreises mit

den Höhenschnitt auf die Vertikallinie für die Ebene der Erzeugenden hinüberliniert werden kann. Zu beachten ist, dass hierfür die Lichtstrahlrichtung in der Frontansicht von rechts oben nach links unten geht.

Was den über dem Rundfenster befindlichen „Kernbogen“ betrifft, so ist er erzeugt wie folgt: Als gegeben ist betrachtet die untere halbkreisförmige Stirnbogenlinie, die zwei Bogenlinien in den Vertikalebenen der seitlichen Leibungsflächen, welche diese nach oben begrenzen, und die ebenfalls kreisbogenförmige Scheitellinie des Bogens. Der untere Stirnbogen gleitet nun parallel bleibend und sich allmählich vergrößernd einerseits an den zwei Leibungsbögen, andererseits am Scheitelsbogen. Zur Kon-



Figur 75.

dem Kreis $a'b'$. Punkt p' liegt unter o' um die horizontale Entfernung der Ebenen des Randkreises und des Schnittkreises ab .

Der erste Höhenschnitt zeigt die Ansicht der linken Hälfte des Fensters mit den Schatten wie sie die Frontansicht darbietet; die Schattenlinien der rechten Seite sind einpunktiert; wogegen der zweite Höhenschnitt dieselbe Hälfte so zeigt, als ob die rechte Hälfte nicht da und die Richtung des Lichtstrahls für den Grundriss dieser Figur die gewöhnliche wäre. Um in diesem zweiten Höhenschnitt den Schlagschatten der geraden oberen Schnittkante auf der Leibungsfläche zu suchen, zeichnet man in der Vorderansicht die leicht erhältlichen Schlagschatten dieser Kante auf den Ebenen der Erzeugenden. Wo ein solcher Schlagschatten die erzeugende Kreislinie seiner Ebene schneidet, da ist ein Schlagschattenpunkt, der in

struktion sind verschiedene Lagen des erzeugenden Kreises gezeichnet und zu Vollkreisen ergänzt, um im Höhenschnitt die untere Umrisslinie der erzeugten Fläche zu erhalten, welche (wie die untere Umrisslinie der Fensterleibung) zur Bestimmung der Kegelspitzen notwendig ist. Im übrigen ist die Konstruktion der Schattengrenzen von derjenigen bei der Fensterleibung nur darin verschieden, dass bei Bestimmung der Kegelspitzen anstatt der geraden oberen Umrisslinie die Tangenten der gekrümmten zu benutzen sind.

Ein Beispiel einer hieher gehörigen Rückungsfläche mit gewundener Leitlinie wäre der Schaft einer gewundenen Säule mit Verjüngung nach oben, wobei entweder die Durchmesser der erzeugenden Kreise der Figuren 74b und c proportional dem Mass des Höherrückens kleiner würden, oder alle Horizontalschnitte den gleich hochliegen-

den einer nicht gewundenen, aber „geschwellten“ Säule kongruent wären.

76. Rückungsflächen mit drehend fortschreitender, veränderlicher oder unveränderlicher Erzeugenden.

Hierher gehören als einfache Beispiele mit unveränderlichen Erzeugenden die Wendelflächen und die verdrehten Stabformen aus Art. 70 und 106; die Leitlinie ist hiebei eine Gerade; der Winkel der Drehung ist proportional dem Masse des Fortrückens. Auch die Konoide (Art. 77) können als solche Rückungsflächen mit drehender gerader Erzeugenden aufgefasst werden.

In Figur 76 ist als Beispiel mit ebenfalls gerader Leitlinie, aber veränderlicher Erzeugenden eine verdrehte quadratische Pyramide mit konkaven Seitenflächen gezeichnet. Ein horizontales Quadrat, dessen Seiten durch konkave Kreisbögen ersetzt sind, rückt derart in die Höhe, dass sein Mittelpunkt immer auf derselben Vertikallinie bleibt, dass es sich immer geometrisch ähnlich bleibt, dass seine Seiten allmählich sich verkürzen, und zwar so, dass die Verkürzung proportional dem Masse des Höherrückens ist, endlich dass der Winkel, um den es sich dreht, ebenfalls dem Masse des Höherrückens proportional ist. (Die geneigten Kanten der verdrehten Pyramide sind hienach vor dem Verdrehen geradlinig gedacht.) Der Grundriss rechts macht die elf ersten Lagen des Quadrats mit Richtung und Masse der Drehung anschaulich; im Grundriss links erscheinen die geneigten Kanten als archimedische Spiralen; der Aufriss zeigt die Kanten als Schraubenlinien auf einer Kegelfläche. Rechts ist ein Höhenschnitt durch die Achse und parallel zur Vertikalebene mit derselben Schattierung gezeichnet, die der ganze Körper auf der dargestellten Hälfte zeigen würde (die Hälfte für sich allein würde sich etwas anders schattieren).

Zur Konstruktion der Schattengrenzen ist das allgemeine Verfahren für gekrümmte Flächen verwertet und zwar mit den vertikalprojizierenden Lichtstrahlenebenen als Schnittebenen. Da jedoch die Projektionen der Schnittkurven im Grundriss eine undurchdringliche Häufung von Linien ergeben hätten, so sind sie in wahrer Gestalt getrennt herausgetragen worden, wie in Figur 72a. Für den Schnitt MN z. B. wurde zuerst (Figur rechts oben) auf einer Vertikallinie 1 2 3 . . . 8 die Strecke $a'h'$ mit ihrer Einteilung durch die Punkte $b'c'd'e'f'g'$ aufgetragen. Dann wurden aus dem linksseitigen Grundriss die Schnittpunkte der Kanten mit der Schnittebene geholt, das heisst die horizontalen, senkrecht zur Vertikalebene gerichteten Abstände der Kantenpunkte $a'b'e'h'$ von der zur Vertikalebene parallelen Achsenschnittebene des Körpers entnommen und in den Schnitt MN eingetragen. (In diesem ist also 1 a für Punkt $a' = 1a$ im Grundriss, 2 b für Punkt $b' = 2b$ im Grundriss, 5 e für $e' = 5e$ im Grundriss u. s. w., wobei der Grundriss von rechts betrachtet wurde, also Abstände von der Achse aus gegen den Grundschnitt von der Vertikalen im Schnitt MN aus nach rechts aufzutragen waren). In den Punkten $a'c'd'e'f'g'$ schneidet die Schnittebene die Lagen VIII VII VI V IV des erzeugenden

Quadrats. Diese Punkte $a'c'd'e'$ u. s. w. wurden im rechtsseitigen Grundriss aufgesucht; es wurde 1 a im Schnitt $MN = 1a$ im Grundriss nach rechts getragen (Probe mit dem Kantenpunkt), 3 c im Schnitt $MN = 3c$ im Grundriss nach rechts getragen, 4 d im Schnitt $MN = 4d$ im Grundriss nach links getragen, 4 d_1 im Schnitt $MN = 4d_1$ im Grundriss nach rechts getragen u. s. w. Die Verbindung der erhaltenen Kantenpunkte und Kreisflächenpunkte ergab die Schnittfigur MN .

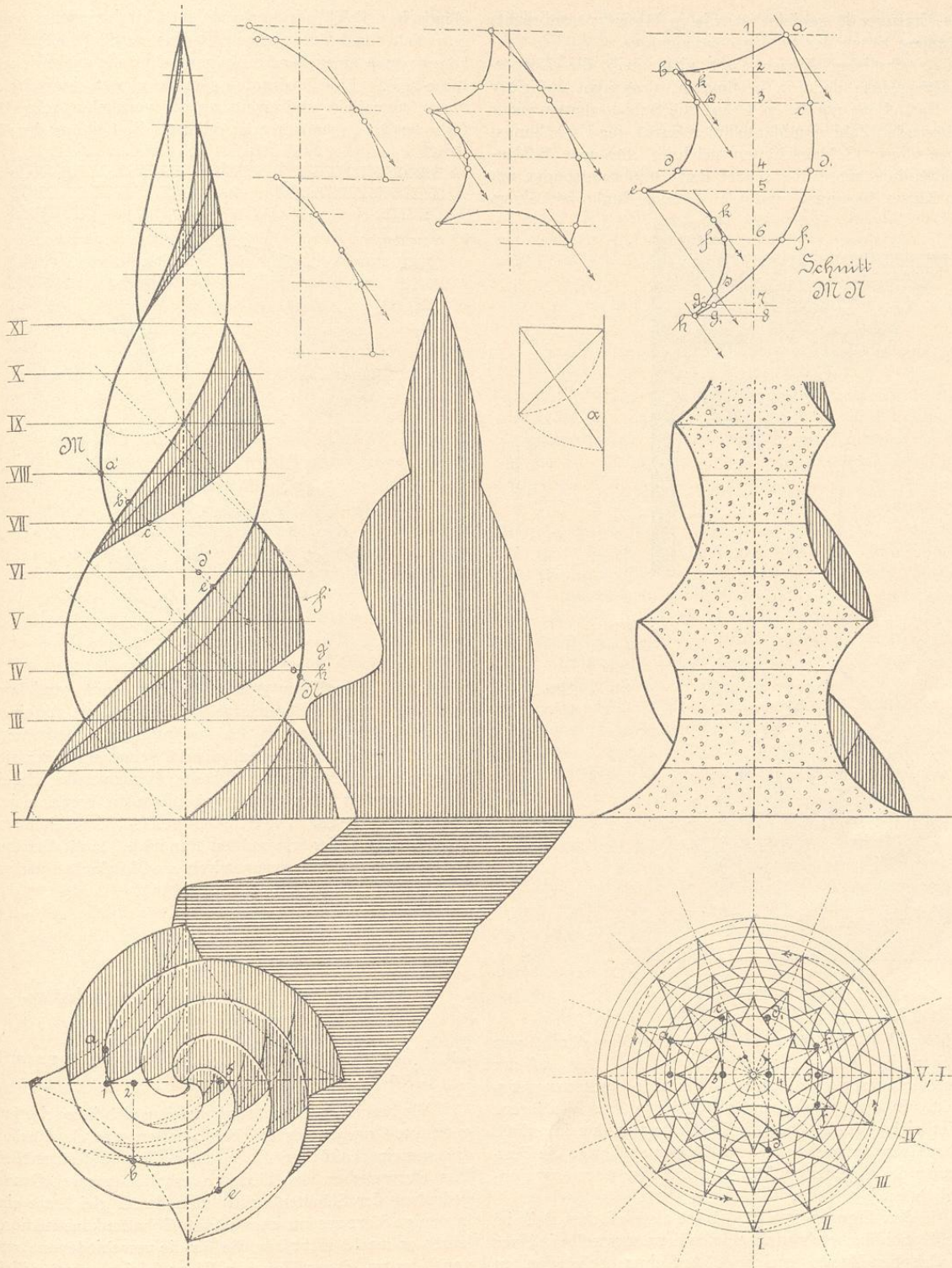
In der Schnittebene MN bildet der Lichtstrahl mit der Gefällslinie 12 . . . 8 oder mit der herausgetragenen Vertikalprojektion des Lichtstrahls den bekannten Winkel α ; an die erhaltene Schnittkurve MN waren also Tangenten und Streiflichtstrahlen unter diesem Winkel mit der Vertikalen zu ziehen. Diese lieferten die zwei Berührungspunkte k als Körperschattengrenzpunkte und die zwei Schnittpunkte s als Schlagschattenpunkte. Zur Uebertragung der vier Punkte auf die Linie MN im Aufriss waren die vertikalen Abstände der Punkte k und s von der Horizontalen 1 a auf der Linie MN von a' aus abzumessen. Die Streiflichtstrahlen bei a und h an der Schnittfigur MN beweisen, dass die ganze Rückseite der Schnittfigur MN einer Körperschattenfläche angehört. Die drei andern Schnittfiguren und Figurenstücke wurden zur Bestimmung der Schattengrenzen auf der Rückseite des Körpers benutzt.

Konoidische Flächen; windschiefer Haustein-77. bogen in cylindrischer oder ebener Mauer.

Konoidische Flächen entstehen durch Bewegung einer Geraden in der Weise, dass sie 1) immer einer Richtebene parallel bleibt, 2) immer an einer andern, festen Geraden gleitet, 3) immer an einer festliegenden gekrümmten Linie oder Fläche gleitet. Steht die feste Gerade senkrecht zur Richtebene, so heisst das Konoid ein senkrechtes.

Für die Schattengrenzen auf solchen Flächen gestaltet sich das allgemeine Verfahren wie in Art. 29 für Regelflächen überhaupt beschrieben. Man zeichnet verschiedene Lagen der Erzeugenden in Grundriss und Aufriss und erhält nach Einführung vertikalstehender Lichtstrahlenebenen durch Hinaufloten der Grundrisschnittpunkte in den Aufriss die Schnittkurven, die in bekannter Weise zu benutzen sind. Ein Beispiel war schon Figur 29b.

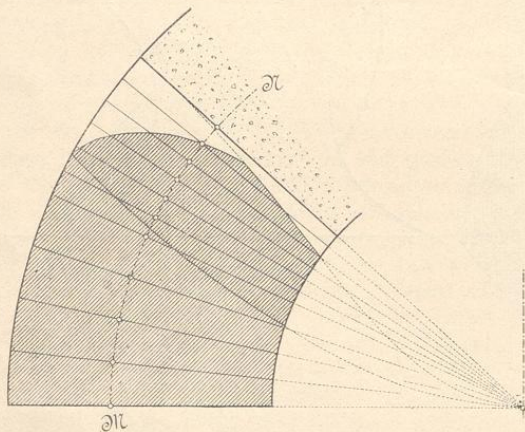
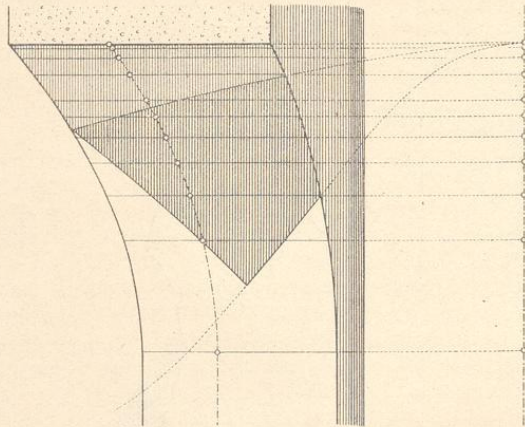
Eine weitere Konstruktion für Schlagschattengrenzen ist die folgende, welche auf der Eigenschaft der Konoidfläche als Rückungsfläche mit gerader Erzeugenden beruht. Man sucht auf einer beliebigen, zur Richtebene parallelen Schnittebene den Schlagschatten derjenigen Linie, welche die Konoidfläche beschattet, sei nun diese Linie eine Randlinie der Fläche selbst, wie bei der Selbstbeschattung, oder sei sie die Selbstschattengrenze eines andern Körpers. Wo die in der gewählten Ebene liegende Erzeugende die Schlagschattenlinie schneidet, da ist ein Punkt der Schlagschattengrenze auf der Fläche. Für weitere Parallelebenen werden die Schlagschattenlinien kongruent der ersterhaltenen und erscheinen nur in der Richtung des Lichtstrahls verschoben. Besonders einfach gestaltet sich die Lösung, wenn ein schattenwerfender Rand durch



Figur 76.

eine Erzeugende gebildet ist, wie in Figur 77 a am rechts liegenden Stück der Schlagschattengrenze.

In ähnlicher Weise lässt sich auch die Körperschattengrenze dadurch bestimmen, dass man auf einer zur Richtebeine parallelen Ebene die Schlagschatten einer genügenden Zahl von Mantellinien sucht, die Umhüllungskurve dieser Schlagschatten zeichnet, für jede Schlagschattenlinie möglichst scharf den Berührungspunkt mit der Kurve bestimmt und von diesem Punkt auf einem

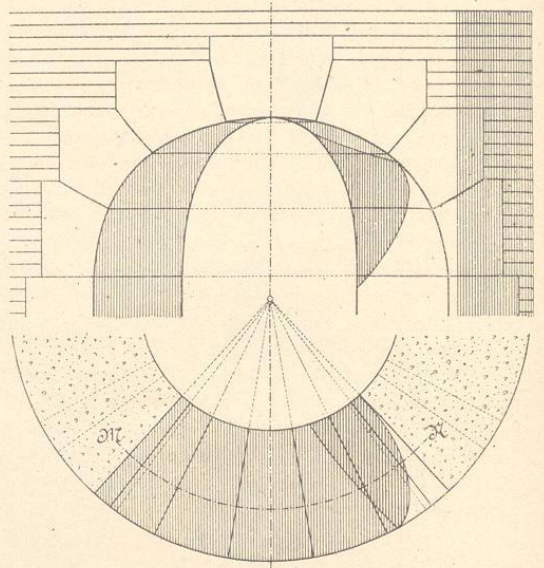


Figur 77 a.

Lichtstrahl rückwärts geht bis zu der Mantellinie, von welcher die Schlagschattenlinie herrührt. Der auf der Mantellinie erhaltene Punkt ist ein Körperschattengrenzpunkt. In der praktischen Ausführung dieses Verfahrens findet sich jedoch, dass die Berührungspunkte innerhalb weiter Grenzen unsicher einzuschätzen sind, also die Festsetzung der Schattenpunkte ganz unsicher oder sogar unmöglich ist.

In den Figuren 77 a und b ist als einfaches Beispiel einer Konoidfläche ein windschiefes Tonnengewölbe in einer cylindrischen Mauer gezeichnet. Auf einem beliebigen, zu beiden Mauerflächen konzentrischen Vertikalcyliner MN ist ein Halbkreisfeld (oder Segmentbogenfeld oder halb-

elliptisches Feld) mit horizontalem Durchmesser so aufgewickelt, dass der vertikale Radius vertikal bleibt. (Es könnte auch einer der Stirnbögen selber die aufgewickelte Linie sein.) Eine horizontale Gerade gleitet einerseits an dieser Bogenlinie, andererseits an der vertikalen Achse der Cylinderflächen und erzeugt dadurch die Leibung des Ge-



Figur 77 b.

wölbs. Es ist in Figur 77 a im Längenschnitt gezeichnet, so dass die oberste Mantellinie und Scheitellinie mit einem Teil des Stirnbogens den Schlagschatten wirft. Mit punktierten Linien ist angegeben, wie die Schattengrenzen sich fortsetzen würden, wenn die Fläche bis zur vertikalen Leitlinie fortgesetzt wäre. Figur 77 b bietet die Vorderansicht desselben Gewölbs. Die Schattengrenzen, abgesehen von derjenigen aus der wagrechten Randlinie, sind dieselben wie in Figur 77 a, nur symmetrisch zur Mittelachse verlegt.

X. Rückblick auf die Lehre von den Schattengrenzlinien.

Zwei Grundgedanken in der Schattenkonstruktion.

Alle beschriebenen Lösungen teilen sich in zwei scharf getrennte Gruppen; es ist ebenso interessant als nützlich, die gemeinschaftlichen Züge jeder Gruppe festzustellen. Das Hervorheben der hiedurch erhaltenen zwei Grundgedanken der Schattenkonstruktion liefert gleichsam eine in wenige Sätze zusammengedrückte Schattenkonstruktionslehre; es macht nicht nur die für die verschiedenen Arten von Körpern eingeschlagenen Wege leichter verständlich, indem es die Lösungen jeder Gruppe als verschiedene Formen eines und desselben Grundverfahrens erkennen

lässt, sondern erleichtert auch deren Beherrschung durch das Gedächtnis.

79. Die unmittelbare Schattenbestimmung und ihre vier Fälle.

Bei aller Schlagschattenkonstruktion hat man immer und immer wieder den Schlagschatten eines Punktes auf einem Körper zu suchen. Alle Konstruktionen der ersten Gruppe haben das Gemeinsame, dass man durch den schattenwerfenden Punkt einen Lichtstrahl zieht, durch den Lichtstrahl eine Ebene legt und die Schnittlinie dieser Ebene mit dem beschatteten Körper aufsucht. Wo diese Schnittlinie getroffen wird vom Lichtstrahl, da ist der Schlagschattenpunkt.

Auch für die Bestimmung der Körperschattengrenzen wurden diese Schnittlinien verwertet. Wo die zu einem Lichtstrahl gehörige Schnittlinie (als Schnittpolygon bei eben begrenzten Körpern und als Schnittkurve bei gekrümmten Flächen) gestreift oder berührt wird vom Lichtstrahl, da ist ein Punkt der Körperschattengrenze.

Für die Wahl der durch den Lichtstrahl zu legenden Schnittebene erschienen vier Fälle, die dadurch bedingt sind, dass man immer auf eine möglichst einfache und rasch darstellbare, womöglich also eine gerade oder kreisförmige Schnittlinie ausgeht. Die vier Fälle waren die folgenden:

- a) Benützung der vertikalen Ebene des Lichtstrahls, die ihn auf die horizontale Grundebene projiziert.
- b) Benützung der unter 45° geneigten Ebene des Lichtstrahls, die ihn auf die vertikale Grundebene projiziert (der sogenannten vertikalprojizierenden Ebene).
- c) Benützung der unter 45° geneigten Ebene des Lichtstrahls, die ihn auf die Seitenebene projiziert.
- d) Benützung einer Ebene, die durch den Lichtstrahl und die Spitze eines Kegels gelegt ist, bei Schatten auf einer Kegelfläche, oder durch den Lichtstrahl parallel zu den Mantellinien einer Cylinderfläche gelegt ist, bei Schatten auf einer schiefgerichteten Cylinderfläche.

79a. mit vertikalstehenden Schnittebenen parallel zur Lichtrichtung.

Der erste Fall (Benützung der vertikalen Ebene des Lichtstrahls) erschien als „allgemeine Lösung“

1) bei Schlagschatten auf der vertikalen Grundebene, Art. 9–11 (denn das Lot auf dem Grundschnitt im Schnittpunkt der Horizontalprojektion des Lichtstrahls ist ja nichts anderes als die Schnittlinie der vertikalen Ebene des Lichtstrahls mit der beschatteten Fläche),

2) bei Schatten auf eben begrenzten Körpern, Art. 15 bis 18, mit Einschluss der Körperschattenbestimmung auf solchen durch Vertikalschnitte, Art. 12 zweiter Teil. Die einfachste Schnittlinie, nämlich die vertikale Gerade, ergab sich bei vertikalstehenden Prismen, zu denen auch die vertikalstehenden Cylinderflächen gerechnet werden konnten, Art. 22,

3) bei Schatten auf gekrümmten Flächen, Art. 28, insbesondere auf Kegelflächen und Drehungsflächen mit verti-

kaler Achse. Kugelflächen (Art. 65) erfuhren eine besondere Behandlung insofern, als die Schnittlinie und der Lichtstrahl nicht in der Projektion, sondern in der Umklappung gezeichnet wurden, weil in dieser die Schnittlinie sich als Kreis darstellt, also weit einfacher zu zeichnen ist als die elliptische Linie, die sie in der Projektion werden würde. Auch für andere gekrümmte Flächen war die Umklappung oder das getrennte Herausragen der Schnittlinie und des Lichtstrahls zuweilen als ein Hilfsmittel zur Erlangung grösserer Klarheit und zur Erprobung des Resultats in verwickelten Raumformverhältnissen zu empfehlen.

mit vertikalprojizierenden Schnittebenen par-79b.
allel zur Lichtrichtung.

Der zweite Fall (Benützung der vertikalprojizierenden Ebene des Lichtstrahls) umfasst die Lösungen

1) für Schlagschatten auf der horizontalen Grundebene (denn das Lot auf dem Grundschnitt im Schnittpunkt der Vertikalprojektion des Lichtstrahls ist ja nichts anderes als die Schnittlinie der vertikalprojizierenden Ebene des Lichtstrahls mit der beschatteten Fläche), Art. 9–11,

2) für Schatten auf prismatischen und cylindrischen Flächen senkrecht zur Vertikalebene, Art. 23,

3) für Schatten auf Drehungs-, Wendel- und Schraubenflächen mit Achse senkrecht zur Vertikalebene, Art. 36. Auch Kugelflächen, wenn deren Schatten vorwiegend oder ausschliesslich im Aufriss verlangt sind, reihen sich hier mit derselben besonderen Behandlung an, wie im ersten Fall, nämlich mit dem Zeichnen der Schnittlinie in der Umklappung anstatt in der Projektion, Art. 65. Andere eben begrenzte Körper und gekrümmte Flächen als die eben unter 2) 3) genannten können zwar ebenfalls mit den vertikalprojizierenden Ebenen der Lichtstrahlen behandelt werden, folgen aber im allgemeinen dem ersten Fall.

mit seitlich projizierenden Schnittebenen par-79c.
allel zur Lichtrichtung.

Der dritte Fall (Benützung der seitlich projizierenden Ebene des Lichtstrahls) erschien in den Lösungen

1) für Schlagschatten auf der Seitenebene,

2) für Schatten auf prismatischen und cylindrischen Flächen mit Kanten und Mantellinien parallel zum Grundschnitt, Art. 25,

3) für Schatten auf Drehungs-, Wendel- und Schraubenflächen mit Achse parallel zum Grundschnitt, Art. 37.

mit Schnittebenen parallel zur Lichtrichtung 79d.
gelegt durch die Spitze eines Kegels oder die Mantellinien eines schiefgerichteten Cylinders.

Der vierte und letzte Fall, in welchem beim Aufsuchen der Schatten auf Kegelflächen (Art. 41) durch die Lichtstrahlen verschiedene gerichtete Ebenen gelegt werden, welche die beschattete Fläche nach Mantellinien schneiden, enthielt als Schlüssel den Punkt, in welchem ein aus der Kegelspitze gezogener Lichtstrahl die Basis-

ebene schneidet. Von diesem Punkt aus war eine Sekante in die Basis zu ziehen, und zwar durch den Schatten des gegebenen Punktes auf der Basisebene, ferner eine Tangente an die Basislinie zu ziehen. Die Sekante lieferte die schlagschattenaufnehmende Mantellinie, die Tangente diejenige der Körperschattengrenze.

Die Schattenkonstruktion auf schiefergerichteten Cylinderflächen nach Art. 48 kann als besonderer Fall der vorgenannten Lösung für den als Kegel mit unendlich ferner Spitze aufgefassten Cylinder erklärt werden. Ihr Grundgedanke war das Projizieren der Lichtrichtung und der schattenwerfenden Punkte auf die Basisebene des Cylinders, mit der Richtung der Mantellinien als Projektionsrichtung. Die so erhaltene Projektion des Lichtstrahls war als die in der Basisebene gültige Lichtrichtung zu benützen und ergab in den Berührungspunkten ihrer Tangenten die Endpunkte der körperschattenabgrenzenden Mantellinien, ferner in den Schnittpunkten mit der Basislinie die Endpunkte der schlagschattenaufnehmenden Mantellinien. Die Schnittebenen werden hier zwar wieder parallel, weil die Mantellinien parallel sind; doch ist ihre Lage noch immer eine andere als in den drei ersten Fällen.

Alle in den vier Fällen enthaltenen Lösungen haben das Gemeinsame, dass bei ihnen der Schlagschatten eines zuvor ausgewählten Punktes oder ein Körperschattenpunkt auf der beschatteten Fläche unmittelbar erhalten wird. Diese Lösungen können hienach als diejenigen der unmittelbaren oder direkten Schattenbestimmung zusammengefasst werden. Sie bilden ihres einfachen Grundgedankens wegen gleichsam die „Landstrassen“ der Schattenkonstruktion und können immer aushelfen, wo die andern Konstruktionen unbekannt oder unmöglich sind; nur erfordern sie bei bestimmten Flächen weit mehr Arbeit als diese andern. Ja schon von den in den drei ersten Fällen enthaltenen Lösungen lässt sich aussagen, dass mit ihnen allein alle Probleme überwindbar sind, wenn es sich nicht um geringen Arbeitsaufwand und Schönheit der Lösung handelt, da auch die Kegel- und schiefergerichteten Cylinderflächen mit Schnitten parallel zu den drei Grundebenen behandelt werden können.

80. Die mittelbare Schattenbestimmung und ihre vier Fälle.

Die Konstruktionen der zweiten Hauptgruppe haben das Gemeinsame, dass man bei ihnen den Schatten auf einem andern Gebilde zu Hilfe nimmt, um denjenigen auf dem gegebenen Körper zu erhalten, und es liegt eben hierin ihr entschiedener Gegensatz zu denen der ersten Gruppe. Sie können hienach als die mittelbar bestimmenden oder indirekten Schattenkonstruktionen bezeichnet werden. Ihr Grundgedanke ist selbstverständlich nur da von Wert, wo sich der Schatten auf dem Hilfsgebilde rasch erhalten lässt. Auch diese Gruppe lässt vier Fälle unterscheiden, und zwar die folgenden:

- a) Man bestimmt eine Körperschattengrenze aus dem Schlagschatten, den sie auf eine Ebene, meist eine Grundebene, wirft.

- b) Man bestimmt eine Körperschattengrenze auf Drehungs-, Röhren- und Rückungsflächen, indem man Parallelkreisschnitte, beziehungsweise Normalschnitte oder parallele Schnitte nach Lagen der rückenden Figur, als niedrige Zonen von Kegeln, oder Kugeln oder Cylindern auffasst und schattiert.
- c) Man erhält auf Drehungs- und Rückungsflächen den Schlagschatten eines Randes oder Körpers durch dessen immer kongruenten Schlagschatten auf verschiedenen Parallelkreis-, beziehungsweise Parallelschnittebenen mit Lagen der rückenden Figur.
- d) Man erhält eine Schlagschattengrenze aus den beiden Schlagschatten, die ein schattenwerfendes Gebilde und das von ihm beschattete auf eine Ebene, meist eine Grundebene, werfen.

Eine Körperschattengrenze erhalten aus ihrem 80a, Schlagschatten auf einer Grundebene.

Der erste Fall ist in erster Linie verwirklicht durch die in Art. 12 erklärte Selbstschattenbestimmung auf eben begrenzten Körpern nach dem Satz: „Diejenigen Kanten des Körpers, deren Schatten im Umriss der Schlagschattenfigur erscheinen, sind die Grenzen von Licht und Schatten auf dem Körper“. Selbstverständlich kann auch der Schlagschatten auf anderen Gebilden als einer Grundebene über die Selbstschattengrenze des schattenwerfenden Körpers Auskunft geben; aber im allgemeinen wird erst der Schlagschatten mit Hilfe dieser Grenze zu bestimmen sein, nicht umgekehrt. Daher sind bei den gekrümmten Flächen nur drei Beispiele zu nennen, nämlich die in Art. 59 erklärte Ableitung des Körperschattens einer Drehungsfläche aus deren leicht erhältlichem Schlagschatten auf einer Parallelkreisebene, und die sehr unsichere Bestimmung der Körperschattengrenze der Schraubenfläche aus der Umhüllungslinie der Schlagschatten ihrer Mantellinien auf einer Ebene senkrecht oder parallel zur Achse (Art. 70), endlich die Körperschattenbestimmung auf der gewundenen Säule durch die Schatten ihrer Parallelschnitte auf der Horizontalebene. Uebrigens könnte auch die Bestimmung der schattenbegrenzenden Mantellinien des Kegels durch die Tangenten aus dem Schlagschatten der Spitze, die ja nichts anderes sind als die Schlagschatten jener Mantellinien, hieher gerechnet werden (Art. 42).

Eine Körperschattengrenze auf Drehungs-, 80b. Röhren- und Rückungsflächen erhalten durch Hilfskegel oder Hilfskugeln oder Hilfscylinder.

Dieser Fall schliesst das wichtigste Beispiel für indirekte Körperschattenbestimmung ein, nämlich diejenige auf Drehungsflächen durch Auffassung ihrer Parallelkreise als niedriger Kegelzonen oder Kugelzonen, Art. 56 und 57, ferner diejenige auf Wulstflächen, schraubenförmigen Röhren und anderen kreisförmigen Röhren mit unveränderlichem Normalschnitt durch Auffassung des letzteren als des Grosskreises einer berührenden Kugel oder als der niedrigen Zone eines berührenden Cylinders (Art. 58 u. 71).

Auch die Behandlung von Röhrenflächen mit beliebigen unveränderlichen Normalschnitten durch Hilfszylinder, die längs der Normalschnitte die Flächen berühren (Art. 72), findet nicht selten praktische Verwertung; sogar noch von der Auffassung der kongruenten Parallelschnitte der Rückungsflächen nach Art. 74 als der Zonen schiefgerichteter Cylinderflächen, z. B. bei der gewundenen Säule, ist dies zu sagen (ein besonderer Fall einer solchen Rückungsfläche ist das hyperbolische Paraboloid aus Art. 69e). Dagegen ist die Behandlung der Rückungsflächen mit veränderlichen Erzeugenden (Art. 75) durch Hilfskegel, welche die Flächen längs Parallelschnitten berühren, und wofür das einmantelige elliptische Hyperboloid in Art. 69d ein Beispiel war, mehr nur theoretisch interessant.

80c. Eine Schlagschattengrenze auf Drehungs- und Rückungsflächen erhalten durch die Schlagschatten auf Parallelkreisebenen, beziehungsweise auf Ebenen der fortrückenden Figur.

Der dritte Fall der mittelbaren Schattenbestimmung ist derjenige, bei welchem der Schlagschatten eines schattenwerfenden Körpers oder Randes zuerst auf einer Ebene gesucht wird, in welcher eine Schnittlinie des beschatteten Körpers liegt. Wo die Hilfsschlagschattengrenze diese Schnittlinie schneidet, da ist ein Schlagschattenpunkt auf dem beschatteten Körper. Dieser Gedanke ist zwar auch verwertbar, wenn die Schnittlinien aus verschiedenen parallelen Schnitten des Körpers verschiedene Formen haben, wofür sie nur einfach und rasch gezeichnet werden können, so dass im Grunde das Verfahren für vielerlei Flächen zur Anwendung gelangen könnte. Doch wird es zumeist auf Flächen mit geometrisch ähnlichen Parallelschnitten, das heisst auf Drehungs- und Rückungsflächen beschränkt. Die meist verwertete Lösung dieser Art ist die Bestimmung des auf eine Drehungsfläche durch einen Randkreis geworfenen Schlagschattens mit Hilfe von Parallelkreisschnitten, auf deren Ebenen der Randkreis seine kongruenten Schlagschatten wirft (Art. 61). Minder häufige praktische Anwendung findet die im selben Artikel beschriebene Selbstbeschattung von Drehungsflächen mit berührenden Lichtstrahlen und Beschattung durch äussere Körper. Als mehr nur theoretisch interessant gehört endlich hieher die Schlagschattenbestimmung auf Rückungsflächen mit unveränderlicher und veränderlicher Erzeugenden nach Art. 74 und 75 mit Einschluss des hyperbolischen Paraboloids und des elliptischen Hyperboloids (Art. 69e und d).

Eine Schlagschattengrenze erhalten aus den 80d. beiden Schlagschatten, die ein schattenwerfendes Gebilde und das von ihm beschattete auf eine Grundebene werfen.

Im vierten Fall der mittelbaren Schlagschattenbestimmung wird auf einer Ebene, meist Grundebene, als dem Hilfsgebilde sowohl der Schlagschatten des schattenwerfenden Körpers oder Randes als derjenige einer Erzeugenden der beschatteten Fläche gesucht. Wo die beiden Schlagschattenlinien einander schneiden, da ist der gemeinschaftliche Schlagschatten eines Punktes der schattenwerfenden Grenzlinie und seines Schlagschattens auf der Erzeugenden, also auf der Fläche. Ein rückwärts durch diesen gemeinschaftlichen Schlagschattenpunkt bis zur Erzeugenden gezogener Lichtstrahl führt also zu einem Punkt der Schlagschattengrenze auf der Fläche. Das wichtigste Beispiel ist die Bestimmung des Schlagschattens auf einer Drehungsfläche nach Art. 62 durch die beiden Schlagschatten, die von der schattenwerfenden Grenzlinie und von einem Parallelkreis auf eine zur Achse senkrechte Ebene geworfen werden; ferner gehören hieher das Aufsuchen der Schlagschattenpunkte einer Linie auf den Kanten eines Vielfachs oder auf einer andern Linie mit Hilfe der Schlagschatten beider auf einer Grundebene (Art. 17), die Bestimmung der Selbstbeschattung (oder äusseren Beschattung) einer Schraubenfläche oder Wendelfläche durch die Schlagschatten des schraubenlinienförmigen Randes (oder der schattenwerfenden Grenzlinie) und einiger Mantellinien auf der Grundebene (Art. 70), endlich die Schlagschattenbestimmung auf der Rückungsfläche (Art. 74, gewundene Säule) und der Konoidfläche (Art. 77).

Mit Hilfe der mittelbaren Schattenbestimmung werden besonders auf Drehungsflächen und anderen gekrümmten Flächen mehr verwickelter Erzeugung die Schatten im allgemeinen rascher und bestimmter erhalten, als mit den direkten Lösungen; ihre Konstruktionen sind auch meist interessanter und schöner als diese. Beispiele für ihre vier Fälle finden sich für bestimmte Formen und Lagen der Körper wohl noch manche ausser den genannten; wenn aber auch die Schattenkonstruktionslehre in dieser Richtung noch beliebig weit ausgesponnen werden könnte, so dürften sich doch sogar bei Hereinziehen von Flächen höherer Ordnungen weitere Fälle neben die vier aufgezählten nicht stellen lassen.

Eine mittelbare Schattenbestimmung ist der Theorie nach immer möglich, aber oft undurchführbar.