



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

B. Beleuchtungskunde oder Lehre von den Lichtstufen.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

B. Beleuchtungskunde oder Lehre von den Lichtstufen.

Während in der Schattenkonstruktionslehre nur Lichtflächen, Körperschattenflächen und Schlag-schattenflächen an den dargestellten Gebilden auftraten und nur die Grenzlinien dieser drei Flächen zu suchen waren, ist die Beleuchtungskunde, wie früher ausgesprochen, die Lehre von den feineren Unterschieden der Schattierung, von der Abstufung der Lichtstärken auf den beleuchteten oder im Schatten befindlichen Flächen eines Körpers. Sie stellt sich zunächst die Frage: „Wie gross ist unter Voraussetzung der eingeführten Richtung der Lichtstrahlen die Stärke der Beleuchtung an jedem einzelnen Punkt der Oberfläche des darzustellenden Körpers?“ und sucht auf den gekrümmten Flächen ununterbrochene Linien, von welchen jede die Punkte einer bestimmten Lichtstärke zusammenfasst.

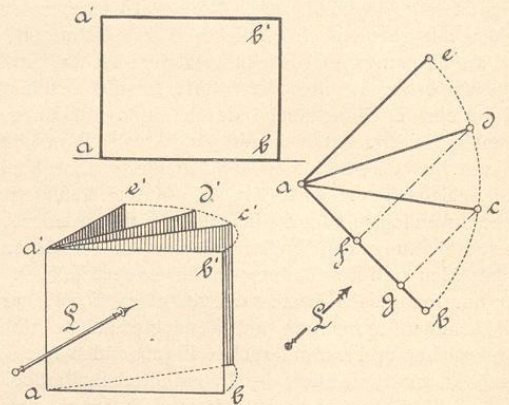
XI. Die Normalkugel.

81. Das Gesetz der Lichtstufen.

Eine genügend einfache und deutliche Formenwiedergabe der technischen Gebilde mit Hilfe der Schattierung ist nur möglich unter der Voraussetzung einfarbiger, nicht glänzender, nicht erheblich durchscheinender Oberflächen, für welche eine Aenderung der Stellung des anschauenden Auges eine merkliche Aenderung der wahrgenommenen Beleuchtungsstufen nicht herbeiführt. Gekrümmte Spiegel-flächen, die alles auf sie fallende Licht regelmässig zurückwerfen und ihr Aussehen mit jedem Standpunkt ändern, schattieren sich überhaupt nicht, sondern zeigen nur Spiegelbilder äusserer Dinge; für minder stark glänzende Oberflächen müsste immer ein bestimmtes Verhältnis zwischen der Menge des regelmässig zurückgeworfenen und zerstreut reflektierten Lichtes festgesetzt werden, um ihre Lichtstufen verfolgen zu können; auch wäre immer ausser der Lichtrichtung ein Standpunkt des betrachtenden Auges oder eine Richtung paralleler Sehstrahlen einzuführen, welchen gegenüber das physikalische Gesetz von der Zurückwerfung des Lichtes anzuwenden wäre, wodurch die Bestimmung der Lichtstufen äusserst umständlich und schwierig werden müsste. Eine so erhaltene Schattierung, etwa für ein Ellipsoid, würde das formale Gesetz der Fläche weit weniger deutlich fühlen lassen, als diejenige für eine nicht glänzende Oberfläche, wie am besten die Photographie beweisen kann; die Darstellung würde also trotz des grösseren Aufwandes weniger erklären als sie erklären soll. Wenn es auch der Theorie nach kaum eine Fläche geben mag, die nicht bei Sonnenbeleuchtung einiges Glanzlicht in einer bestimmten Richtung zurückwirft, so lehrt doch die Beobachtung, dass die Schattierung auf solchen Stoffen, die nach der gewöhnlichen Auffassung als glanzlos be-

zeichnet werden, sich mit der Bewegung des Auges nicht merklich ändert, dass es also gerechtfertigt ist, von einer scheinbaren Beleuchtung, die gleichzeitig von der Lichtrichtung und Sehstrahlenrichtung abhängig wäre, bei der Schattierung technischer Gebilde Umgang zu nehmen. Anders ist es in der künstlerischen Malerei.

Die Annahme einer Beleuchtung nicht glänzender, nicht erheblich durchscheinender Oberflächen durch par-



Figur 81.

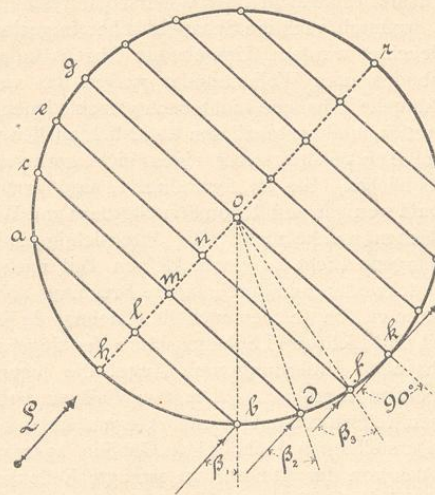
allele Lichtstrahlen, welche andere Lichtquellen nicht erzeugen, führt zu der von der Beobachtung bestätigten Folgerung, dass die vom Licht senkrecht getroffenen Stellen einer Körperoberfläche die hellsten sind, und dass die Lichtstärke um so geringer wird, je schiefer die Lichtstrahlen die Fläche treffen. Dabei richten sich die Lichtstärken nach folgendem Gesetz:

„Die Lichtstärken verschieden gerichteter beleuchteter Ebenen verhalten sich wie die Sinuse der Winkel, unter

denen die Ebenen von den Lichtstrahlen getroffen werden, oder, mit andern Worten, wie die Kosinuse der Winkel, welche die Lichtstrahlen mit den Senkrechten auf den Ebenen bilden. — Bei gekrümmten Flächen ist jedes Flächenelement ebenso hell wie die zugehörige tangierende Ebene. Die Lichtstärken verschiedener Punkte einer beleuchteten gekrümmten Fläche verhalten sich also wie die Kosinuse der Winkel, welche die Lichtstrahlen mit den Normalen der Fläche in diesen Punkten bilden.“

Dieses Gesetz wird durch folgende Betrachtung gewonnen. Es sei in Figur 81 die Horizontallinie L die Richtung des Lichtstrahls (das heisst, das Grundebenensystem sei so gewählt, dass die im Raum geneigte Richtung des Lichtstrahls als horizontale Linie auftritt). ab sei ein ebenes Rechteck, senkrecht zum Lichtstrahl gerichtet und von der Höhe h . Dieses Rechteck wird getroffen von einem vierseitig prismatischen Lichtstrahlenbüschel, dessen Querschnittsfläche gleich ist der Fläche des Rechtecks, also ausgedrückt ist durch $ab \cdot h$. — Denkt man sich nun das Rechteck um seine Kante aa' in die Lage ac gedreht, so wird das Lichtstrahlenbüschel, das in dieser Lage seine Ebene trifft, kleiner sein; es wird einen Querschnitt haben gleich $ag \cdot h$. — Dreht man das Rechteck weiter in die Lage ad , so wird das Lichtstrahlenbüschel abermals kleiner; es wird einen Querschnitt haben gleich $af \cdot h$. Daraus folgt, dass die Lichtmengen auf dem Rechteck in den zwei beliebigen Lagen ac und ad sich verhalten wie ag zu af oder wie $\sin acg$ zu $\sin adf$; denn $\sin acg = \frac{ag}{ab}$ und $\sin adf = \frac{af}{ab}$. Also verhalten sich die Lichtstrahlenbüschel, welche zwei beliebige Lagen der rechteckigen Ebene treffen, mit andern Worten die Lichtmengen auf der Ebene, wie die Sinuse der Winkel, welche die Lichtstrahlen mit dieser Ebene bilden. Dies trifft nicht etwa nur beim Rechteck zu, sondern eine einfache Betrachtung kann lehren, dass für jede beliebige ebene Figur der Querschnitt des Lichtstrahlenbündels gleich ist der Fläche der Figur mal dem Sinus des Winkels der Lichtstrahlen mit der Fläche.

auf der Kugelfläche, denselben Winkel β_2 ; denn wie dieser Winkel in der Figur erscheint, so ist er in jeder andern Ebene, die durch den Durchmesser hr gelegt wird. Also wird die Lichtstärke der Kugelfläche längs des ganzen Parallelkreises cd dieselbe sein. Dasselbe gilt für den Parallelkreis ab , weil in allen seinen Punkten der Winkel



Figur 82.

β_1 derselbe sein muss, endlich für den Parallelkreis ef mit dem gleichbleibenden Winkel β_3 .

Wendet man das Gesetz an, dass sich die Lichtstärken verschiedener Flächenpunkte verhalten wie die Kosinuse der Winkel des Lichtstrahls mit den Normalen in diesen Punkten, so findet sich, wenn mit h die Lichtstärke im Punkt h und mit ab die Lichtstärke längs des Kreises ab bezeichnet wird, die Proportion:

$$h : ab : cd : ef : gk = \cos 0^\circ : \cos \beta_1 : \cos \beta_2 : \cos \beta_3 : \cos 90^\circ.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \cos 0^\circ &= 1 \\ \cos \beta_1 &= \cos boh = 0|ob = \frac{3}{4} \\ \cos \beta_2 &= \cos doh = 0m/od = \frac{2}{4} \\ \cos \beta_3 &= \cos foh = 0n/of = \frac{1}{4} \\ \cos 90^\circ &= 0. \end{aligned}$$

Also verhalten sich jene Lichtstärken wie $1 : \frac{3}{4} : \frac{2}{4} : \frac{1}{4} : 0$, oder wie $4 : 3 : 2 : 1 : 0$.

Hätte man etwa den Kugelradius oh in 6 gleiche Teile anstatt in 4 geteilt, so wäre für die Lichtstärken erschienen das Verhältnis $6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1 : 0$, und damit ein geringerer Unterschied der Lichtstärke von einem Parallelkreis zum andern.

Reflexlichtwirkung. Lichtstufen auf der Schatten-83. seite der Kugel.

Was die vom Sonnenlicht abgewandte Hälfte der Kugel betrifft, so wäre sie unter der gemachten Voraussetzung, dass die direkten Lichtstrahlen keine weiteren Lichtquellen hervorrufen, durchaus gleich dunkel wie der schattenabgrenzende Grosskreis; sie würde also durchaus

82. Lichtstufen auf der Lichtseite der Kugel.

Als erster Gegenstand der Verwertung des Gesetzes über die Lichtstärken sei die Kugel gewählt. Der gezeichnete Kreis (Figur 82) sei die Horizontalprojektion einer Kugel in einem Grundebenensystem, in welchem die Richtung des Lichtstrahls wieder dargestellt ist durch die Horizontallinie L . Man zieht einen Kugeldurchmesser parallel zum Lichtstrahl und teilt ihn in 8 gleiche Teile; durch die Teilpunkte legt man Ebenen senkrecht zum Lichtstrahl; diese schneiden die Kugel nach 7 Kreisen, die sich in der Figur als gerade Linien projizieren und von welchen der mittlere als Grosskreis die Grenze zwischen Licht und Körperschatten bildet, indem längs dieses Kreises die Lichtstrahlen die Kugel berühren. Der Punkt h , in welchem der Lichtstrahl zusammenfällt mit der Normalen auf der Kugelfläche, wird der hellste Punkt sein. In jedem Punkt des Parallelkreises cd bildet der Lichtstrahl mit dem Kugelradius, das heisst mit der Normalen

die Lichtstärke Null darbieten. Diese Voraussetzung kann aber nur etwa bei der Mondkugel als erfüllt erklärt werden; sie hat bei dieser zur Folge, dass der im Schatten befindliche Teil der Mondscheibe unsichtbar oder fast unsichtbar ist. Bei allen Beleuchtungen auf der Erde giebt es keine Lichtstärke Null, eben weil die direkten Lichtstrahlen immer Reflexlicht oder Widerschein reichlich hervorufen, wodurch auch die Schattenflächen in geringerem Grad beleuchtet werden. Umgebende Gegenstände oder der Fussboden oder Wolkenränder werfen das von der Hauptlichtquelle erhaltene Licht nach verschiedenen Richtungen zurück, und ausser diesen Reflexlichtquellen widerstrahlt die Atmosphäre selber einen nicht geringen Teil des Sonnenlichts. Sie ist fortwährend, und zwar bald stärker, bald weniger, erfüllt von Staubkörnern und Wasserdampfbläschen, welche nicht völlig durchsichtig sind, also das empfangene Licht zu einem kleinen Teil nach allen Seiten zurückwerfen und durch innere Brechung ablenken oder zerstreuen, von welchen auch die abnehmende Farbenkräftigkeit und Licht- und Schattenstärke der Gegenstände mit wachsender Entfernung vom Auge, die sogenannte Luftperspektive herrührt. — Die von Fall zu Fall veränderlichen Reflexe von umgebenden Gegenständen bleiben für die Darstellungen technischer Gebilde ausser Spiel und nur das von der Atmosphäre erzeugte Reflexlicht ist zu berücksichtigen. Es lässt sich nachweisen, dass dieses zwar nach allen Richtungen des Raums, am stärksten aber in derjenigen Richtung wirkt, welche dem Sonnenstrahl genau entgegengesetzt ist und in dieser Weise führt man es in die Darstellungen ein. Es wird auf die Schattenseite der Kugel in derselben Weise wirken wie das direkte Licht auf die Lichtseite, nur weit schwächer. Der dem hellsten Punkt gerade entgegengesetzte Punkt der Kugel-*fläche* (h) erhält die Reflexlichtstrahlen normal zu seiner Fläche, wird also der hellste Punkt des Körperschattens sein. Die Parallelkreise der Lichtseite werden sich auf der Schattenseite symmetrisch als Linien gleicher Schattenstärke wiederholen, um so dunkler, je näher sie der Körperschattengrenze liegen; nur wird der Unterschied zwischen zwei benachbarten Schattenkreisen ein weit kleinerer sein als zwischen zwei Kreisen im Licht. Somit finden sich die Lichtstärken vom hellsten Punkt h an abnehmend bis zur Schattengrenze, dann wieder um ein Geringes stetig zunehmend bis zum hellsten Reflexpunkt r .

84. Lichtstufen im Schlagschatten auf der Kugel.

Noch ist zu sprechen über die Abstufung der Schlagschatten. Irgend ein Gegenstand werfe einen Schlagschatten auf die Kugel, oder die ganze Kugel sei im Schlagschatten, so wird zunächst die Kugelhälfte mit Körperschatten vom Reflexlicht getroffen werden nach wie vor, also unverändert bleiben wie bei der beleuchteten Kugel. Die Schlagschattenfläche wird aber von den Reflexlichtstrahlen der oben für die Lichtkugel angegebenen Richtung nicht mehr erhellt werden können, also dunkler sein als der Körperschatten, und dies entspricht der Beobachtung. Doch wirkt immer auch noch auf den Schlagschatten dasjenige Reflexlicht, das die Wasserbläschen

und Staubkörner der Atmosphäre seitlich zurückwerfen oder durch Brechung seitlich ablenken. Man kann sich dieses Licht als parallel zur Ebene des schattenabgrenzenden Grosskreises gk von allen Seiten gegen die Kugel strahlend vorstellen, natürlich äusserst schwach. Seine Wirkung muss wieder um so geringer sein, je schiefer es die Kugelfläche trifft. Im früheren hellsten Lichtpunkt h streift es die Fläche nur, also wird dieser Punkt als Schlagschattenpunkt s der dunkelste Punkt sein. Jeder Parallelkreis der früheren beleuchteten Kugelhälfte wird auch für den Schlagschatten eine Linie gleich heller Punkte sein und die Lichtstärke wird vom dunkelsten Schlagschattenpunkt s an mit jedem solchen Kreis ein wenig zunehmen, bis sie im Grosskreis gk dieselbe Stufe erreicht wie bei der beleuchteten Kugel. Hienach findet sich auf der im Schlagschatten befindlichen Kugel eine stetige Abnahme der Lichtstärke vom hellsten Reflexpunkt r bis zum dunkelsten Schlagschattenpunkt s ; bei der beleuchteten Kugel erschien die Lichtstärke abnehmend und dann wieder wachsend.

Auch der dunkelste Schlagschattenpunkt s hat nicht die Lichtstärke Null; er ist noch immer von demjenigen Reflexlicht beleuchtet, das nach allen Seiten strahlt, und erreicht dadurch eine Lichtstufe, die zwar gegenüber den Lichtflächen verhältnismässig dunkel ist, aber als absoluter Wert der Lichtempfindung noch immer recht ansehnlich sein kann.

Es ist also dreierlei Reflexlicht zu Hilfe genommen, um die nun abgeleiteten Lichtstufen auf den Schattenflächen der Kugel zu begründen, erstens ein stärkstes Reflexlicht, dem direkten entgegengesetzt, das die Körperschattenfläche abstuft, zweitens ein mittleres, in der Richtung des schattenabgrenzenden Grosskreises von allen Seiten senkrecht zum direkten Licht wirkend, das Streiflicht erhellend und die Schlagschattenfläche abstufend, drittens ein schwächstes Reflexlicht, nach allen Richtungen gleichmässig wirkend und auch die dunkelste Schlagschattenfläche erhellend. Diese Annahmen über die Reflexwirkungen mögen vielleicht ungenügend begründet und willkürlich erscheinen; aber es ist für den vorliegenden Zweck notwendig, an die Stelle der zahllosen Zufälligkeiten der Wirklichkeit etwas Unveränderliches zu setzen, dessen Ergebnis wenigstens vielen Fällen der Wirklichkeit nahe kommt und eine Schattierung mit guter Anschauung der Formen liefert. Dieses Ergebnis muss die Annahme rechtfertigen.

Die vier Hauptlichtstufen.

85.

Wie gross man die Unterschiede zwischen den vier Hauptlichtstufen h (hellster Punkt im Licht), k (Körperschattengrenzlicht), r (hellster Reflexpunkt) und s (dunkelster Schlagschattenpunkt) und im Zusammenhang damit diejenigen zwischen je zwei Parallelkreisen halten soll, kann nicht durch allgemeingültige Verhältniszahlen festgesetzt werden, sondern muss der Beobachtung und dem Gefühl überlassen bleiben.

Die Beobachtung ergibt, dass diese vier Werte mit sehr weiten Grenzen für ihre Verhältnisse mit gleichem

Recht gewählt werden können. Einerseits hängen sie als absolute Werte und in ihren gegenseitigen Verhältnissen von der jeweiligen Stärke des Sonnenlichtes ab, andererseits von der Körperfarbe und dem Grad der Durchstrahlbarkeit der Stoffe, aus welchen die Körper bestehen.

Bei grellem Licht ist der Gegensatz von Licht und Schatten sehr gross und die Abstufung sowohl innerhalb der beleuchteten als der im Schatten befindlichen Flächen (wenn zufällige Reflexlichtquellen ferngehalten werden) nur wenig fühlbar. Die Lichtstärke der direkt beleuchteten Flächen scheint bis nahe zur Körperschattengrenze fast durchaus dieselbe zu sein, dann mit schmaler Abstufungszone fast sprungweise in das sehr dunkle Streiflicht überzugehen und von diesem aus gegen den hellsten Reflexpunkt nur wenig heller zu werden. Dies ist wohl dadurch zu erklären, dass auch bei der ausschliesslichen Sonnenbeleuchtung noch viele konvergierende sehr kräftige gebrochene Strahlen die parallelen durchkreuzen, dass ferner bei grellem Licht die Stärke der Lichtempfindung nicht proportional der Lichtstärke zunimmt, sondern schwächer, wonach die Unterschiede greller Lichtstufen von einer gewissen Grenze an nicht mehr erkannt werden. Eine von der Sonne beleuchtete Kugel aus hellem Material widerspricht hienach, wenn auch nur scheinbar, allem früher für die Lichtstufen Abgeleiteten; sie macht aber auch, genau nachschattiert oder photographiert, weit weniger den Eindruck einer Kugel und lässt das Gesetz der Kugelgestalt, das unveränderliche Krümmungsmass, weit weniger fühlen als eine mässig beleuchtete. Wenn in einer solchen Darstellung der Umriss verdeckt wird, erkennt man die Kugelfläche nicht mehr als solche. Als ein hieher gehöriger Beleg ist auch die Mondkugel zu nennen, welche aus Mangel an Lichtabstufungen den Eindruck einer ebenen Scheibe giebt. Für das eingehende Schattieren der technischen Gebilde ist also das Streben nach der Nachbildung der bei Sonnenbeleuchtung erscheinenden Lichtstufen nur nachteilig, und es empfiehlt sich weit mehr, eine mässige Lichtstärke der Parallelbeleuchtung vorauszusetzen, welche weniger starke Unterschiede von Licht und Schatten darbietet, dafür aber die Abstufungen zwischen beiden möglichst voll zur Geltung gelangen lässt; aus diesen heraus wird die Krümmung der Fläche am deutlichsten gefühlt.

Die Körperfarbe ist nicht nur von Einfluss auf die absoluten Werte der vier Lichtstärken, die selbstverständlich bei heller Körperfarbe grösser sind als bei dunkler, sondern auch auf ihre Verhältnisse, indem dunkle Körperfarbe die Schattentöne einander stärker nähert, als das Licht dem Schatten und dadurch die Abstufungen der Schattentöne stärker beeinträchtigt als die der Lichtflächen. Hiedurch wird die Schattierung dunkelfarbiger Körper in zwei Richtungen abgeschwächt. Rote, gelbe, grüne, blaue Färbungen der Körperfläche scheinen die Verhältnisse der vier Lichtstärken in verschiedener Weise zu beeinflussen.

In hohem Grad richten sich die vier Lichtstärken mit ihren Verhältnissen und Zwischenstufen nach dem Grad der Durchstrahlbarkeit der Stoffe, aus welchen die Körper bestehen. Es sind zwar oben „nicht erheblich

durchscheinende“ Stoffe vorausgesetzt worden, aber in einem bestimmten Grad, bis zu einer bestimmten Dicke, sind alle Stoffe durchstrahlbar für das Licht, selbst die Metalle, und die meisten in solchem Grad, dass ihre Schattierung dadurch beeinflusst wird. Vergleicht man z. B. ein Gebilde kleinerer Dimensionen aus weissem Marmor mit einem gleichgeformten aus trockenem Gips, so findet sich bei jenem wegen des stärkeren Durchscheinens ein geringerer Unterschied von Licht und Schatten als beim Gips; das Licht ist milder, der Schatten weniger kräftig, insbesondere aber das Reflexlicht weniger fühlbar, daher die ganze Schattierung ruhiger, weicher, edler als beim Gipsmodell. Auf Gebilden aus dem noch stärker durchscheinenden Alabaster giebt es kein kräftiges Licht und keinen kräftigen Schatten mehr; nur wenig Licht wird von der Oberfläche zurückgeworfen; weit mehr wird vom Innern verschluckt und erhellt von innen heraus die Schatten, ihnen jede Kraft und Bestimmtheit raubend.

Gegenüber dieser dreifachen Veränderlichkeit der Bedingungen für die in der Wirklichkeit erscheinenden vier Hauptlichtstärken der Schattierungen dürfte innerhalb bestimmter Grenzen jede dem Gefühl nach getroffene Wahl derselben in den Schattierungen technischer Gebilde gerechtfertigt sein, wenn auch nicht alle Annahmen gleich günstig für die Formendeutlichkeit sind. Nach Wahl der vier Lichtstärken wären die Zwischenstufen so einzuschalten, dass überall stetige Zu- und Abnahme besteht und die Lichtstärken der Parallelkreise zwischen je zweien der angenommenen Grenzwerte gleiche Unterschiede aufweisen, somit eine arithmetische Reihe bilden.

Um die praktische Verwertung der abgeleiteten Lichtstufen zu zeigen, müssen nun aber doch, alle Freiheit für den einzelnen Fall vorbehalten, bestimmte Annahmen für die vier Werte getroffen werden, worüber auf Art. 115 zu verweisen ist.

Abweichende Annahme der Reflexrichtung für 86. Gebilde auf ebener Wand.

Was über die einzuführende Richtung des Reflexlichtes gesagt wurde, erleidet eine Aenderung, wenn es sich um die Schattierung nahezu ebener Gebilde, z. B. von Reliefdarstellungen oder ganzen Fassaden handelt. Es würde ja hier das Reflexlicht mit der angegebenen Richtung die Ebene von der Rückseite her, also ihre Vorderseite gar nicht treffen, somit ohne Einfluss auf die Schattierung sein. Daher denkt man sich bei Schattierung derartiger Gebilde den Reflexlichtstrahl zwar auch unter 45° in beiden Projektionen und im Aufriss auch entgegengesetzt der Projektion des direkten Lichtstrahls, im Grundriss aber senkrecht zu derselben. Dieses Reflexlicht wirkt also gegen die Vertikalebene von rechts unten nach links oben. Sogar leichte Schlagschatten innerhalb der Fläche des vom direkten Licht erzeugten Schlagschattens, sogenannte „Gegenschatten“, werden als von diesem Reflexlicht hervorgerufen häufig eingeführt und sind für Darstellungen in grösserem Massstab meist von günstiger Wirkung. Die erste Figur auf der dritten

Lichtdrucktafel (Partie vom Palast Strozzi in Florenz) bietet ein Beispiel für die beschriebene Reflexrichtung und solche „Gegenschatten“, ebenso das Gebälk der dorisches Säulenordnung aus der Renaissance auf der vierten Lichtdrucktafel. Die unter dem Gebälk stehende Säule ist als Drehungsfläche mit den zuerst genannten, für die Kugel eingeführten Reflexlichtwirkungen schattiert, so dass in diesem Beispiel vier Reflexlichtwirkungen unterschieden werden können und streng genommen ein unschädlicher Widerspruch zwischen der Schattierung von Gebälk und Säule besteht.

Noch andere Annahmen über die Richtung des Reflexlichtes gegenüber dem direkten Licht sind nicht ausgeschlossen und werden besonders in Deutschland beim Schattieren von architektonischen Aufrissen und Perspektiven häufig getroffen, wogegen sich die französischen Darstellungen strenger an die zuvor beschriebenen zu binden pflegen. Zuweilen wird im Schlag- und Körperschatten weiter schattiert, als ob das Reflexlicht mit dem direkten annähernd gleichgerichtet und nur weit schwächer, zuweilen auch, als ob es gar nicht da wäre, und für kleineren Massstab ist diese letzte Annahme die dankbarste. Die Erfahrung und die Beobachtung der Photographie kann lehren, dass fast alle Annahmen, wenn nur einheitlich durchgeführt, eine gute Modellierung der Gebilde erzielen können. Die Anpassungsfähigkeit des Formenvorstellungsvermögens an die Schattierung geht sehr weit.

87. Zusammenstellung aller Lichtstufen.

Die Kugel mit Licht- und Schlagschattenpartien bietet alle überhaupt vorkommenden Neigungen einer Fläche gegen den Lichtstrahl und damit alle vorkommenden Stufen von Licht und Dunkel. Man benützt sie deshalb als „Lichtmassstab“, als Hilfsmittel zum Ausdruck für bestimmte Lichtstufen, indem man den Durchmesser parallel zum Lichtstrahl in 8 oder 12 gleiche Teile teilt; die Parallelkreise, die diesen Punkten entsprechen, bilden mit dem schattenabgrenzenden Grosskreis und den drei Einzelpunkten h , r und s die Stufen der Flächenbeleuchtung. Bei Teilung in 8 Teile erscheinen 13 Lichtstufen. Doch ist es zweckmässig, bei dieser Teilung nicht stehen zu bleiben, sondern den äussersten Teil vom hellsten Punkt, beziehungsweise Reflexpunkt her noch einmal im Verhältnis 3:7 einzuteilen und damit zwei weitere Lichtstufenlinien einzuführen. Die Zahl der Lichtstufen kommt hiedurch auf 16, die mit Unterscheidung durch verschiedene Vorzeichen für Licht und Schlagschatten einerseits und Körperschatten andererseits in folgender Weise bezeichnet werden.

+ 0 im Licht (hellster Punkt)	+ 0 im Schlagschatten (dunkelster Punkt)
+ 0,3 „ „	+ 0,3 „ „
+ 1 „ „	+ 1 „ „
+ 2 „ „	+ 2 „ „
+ 3 „ „	+ 3 „ „
± 4 (Körperschattengrenze)	
— 3 im Reflex- oder Körperschatten	
— 2 „ „ „ „	
— 1 „ „ „ „	
— 0,3 „ „ „ „	
— 0 (hellster Punkt im Körperschatten oder Reflexpunkt).	

Würde man bei der Achtteilung stehen bleiben, so würde die Fläche mit vollem Licht erfahrungsgemäss viel zu gross, der Uebergang von + 0 zu + 1 zu hart und die Gesetzmässigkeit der Krümmung der Fläche nahe dem hellsten Punkt durch eine grosse ebene Platte empfindlich gestört erscheinen. Bisher wurde, um diesem Uebelstand abzuweichen, zuweilen ein Parallelkreis + $\frac{1}{2}$ eingeführt; doch bleibt auch hierbei (ursprüngliche Achtteilung des Durchmessers vorausgesetzt) die Fläche hellsten Lichtes noch zu gross; insbesondere aber hat diese Halbierung des äussersten Teils den Mangel, dass der Abstand von + 1 bis + $\frac{1}{2}$ als zu klein und derjenige von + $\frac{1}{2}$ bis + 0 als zu gross die Aufeinanderfolge der Abstände der Lichtstufenlinien unstetig und willkürlich erscheinen lassen, wogegen bei der hier gewählten Einführung von + 0,3 die Fläche hellsten Lichtes auf ein günstiges Mass gebracht und die Aufeinanderfolge der Kreise auf der Kugel in deren Darstellung für die eingebürgerte Lichtrichtung gesetzmässig und gefällig wird, wie Figur 88b beweisen kann. Diese schönere Lage der Lichtstufenlinien kommt nicht nur der Kugel selber zu gut, sondern auch der Darstellung aller andern Körper mit gekrümmter Oberfläche, für deren Schattierung die „Normalkugel“ in später zu erklärender Weise verwertet wird.

Wenn je eine Kugel oder ein nach ihr zu schattierender anderer Körper in so grossem Massstab gezeichnet ist, dass die Streifen zwischen den Lichtstufenlinien mit der Achtteilung zu breit und die Uebergänge zu hart würden, so ist es nicht schwer, durch Schätzung oder genaue Konstruktion noch Zwischenlinien von + 0,6 (nicht 0,65), + 1,5 + 2,5 + 3,5 — 3,5 u. s. f. einzuschalten. Vgl. z. B. Figur 103b.

Bei einer Einteilung des Durchmessers in zwölf Teile anstatt in acht würden anstatt der 13 Lichtstufen der unergänzten Achtteilung deren 19, und anstatt der 16 Lichtstufen der durch + 0,3 ergänzten Achtteilung deren 22 erscheinen; bei Einteilung in zwanzig Teile sogar 31. Für die praktische Verwertung des Verfahrens, das im folgenden zu erklären ist, dürfte es sich empfehlen, die Zahl der durch graphische Konstruktion zu bestimmen Linien möglichst einzuschränken; auch schon bei wenigen solchen ist die Arbeit noch immer gross genug, und bei Bedarf an weiteren im eben berührten Fall reicht deren Einschaltung nach Schätzung auch strengen Anforderungen gegenüber meist vollkommen aus.

Darstellung der Normalkugel mit der eingebürgerten Lichtrichtung.

Die erste Darstellung der Normalkugel (Figur 82), ein Grundriss derselben in einem Grundebenensystem, in welchem der Lichtstrahl als eine horizontale Linie gedacht ist, hat sich so einfach gestaltet, weil die Kugel projiziert wurde auf eine zum Lichtstrahl parallele Ebene. Anders gestaltet sich das Bild der Kugel im ursprünglichen Grundebenensystem, in welchem die beiden Lichtstrahlprojektionen einen Winkel von 45° mit dem Querschnitt bilden; die Projektionen der Parallelkreise werden hier Ellipsen sein, und zwar finden sie sich auf folgendem Weg:

Man denkt sich die Kugel nach den beiden in Fig. 88a gezeichneten Projektionen auf der Horizontalebene liegend und samt ihren Lichtstufenlinien auf die horizontalprojizierende Ebene des Lichtstrahls $p q$ projiziert, dann diese Ebene in die Horizontalebene umgeklappt. Der Lichtstrahl durch den Kugelmittelpunkt projiziert sich auf die Vertikalebene $p q$ als eine Gerade, die mit ihrer Horizontalprojektion den aus Art. 38 bekannten Winkel $\alpha = 35^\circ 15,9'$ einschliesst; in der Umklappung wird also der Durchmesserlichtstrahl diesen Winkel mit der Umklappungsbasis $p q$ einschliessen. Die Lichtstufenkreise der Kugel erscheinen in der Projektion auf der Vertikalebene $p q$ als gerade Linien senkrecht zum Durchmesserlichtstrahl; so erscheinen sie also auch in der Umklappung.

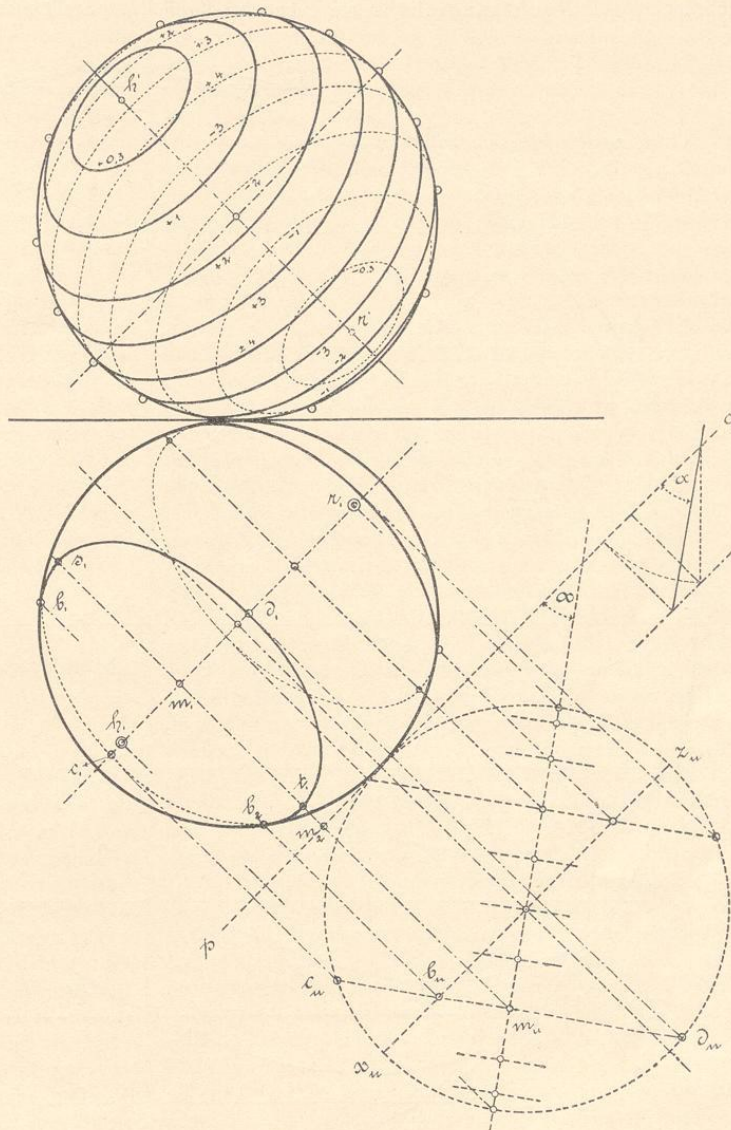
Denkt man sich nun einen der Lichtstufenkreise der Kugel aus Figur 82, z. B. $c d$, auf die horizontale Grundebene projiziert, so wird sich in der umgeklappten Ebene $p q$ dessen Mittelpunkt m_u nach m_2 projizieren, also im Raum der Mittelpunkt m selbst nach m , projizieren, wobei $m_u m$, senkrecht zur Lichtstrahlprojektion gerichtet ist. Der Kreis selbst wird sich als Ellipse projizieren, deren grosse Achse s, t , durch m , geht, senkrecht zur Lichtstrahlprojektion steht und gleich dem Kreisdurchmesser $c d$ oder $c_u d_u$ ist; denn der horizontale Durchmesser des Raumkreises $c d$ ist senkrecht zur Lichtstrahlprojektion gerichtet und projiziert sich auf die Horizontalebene in wahrer Grösse. Der tiefste Punkt c und der höchste Punkt d des Raumkreises $c d$ werden sich nach c , und d , projizieren, wobei $c_u c$, und $d_u d$, senkrecht zur Lichtstrahlprojektion gerichtet sind und c, d , die kleine Achse der Ellipse darstellt.

In derselben Weise werden alle anderen Lichtstufenkreise der Kugel in deren Grundriss übertragen werden können und als Ellipsen erscheinen.

Für die später zu betrachtende Verwertung der Normalkugel zum Schattieren anderer gekrümmter Flächen ist es zweckmässig, sich die Punkte b_1, b_2 u. s. w. zu verschaffen, in welchen die elliptischen Lichtstufenlinien des Kugelbildes dessen Umriss berühren. Der Umrisskreis der Horizontalprojektion der Kugel erscheint in der Umklappung als Linie $x_u z_u$ parallel $p q$, somit die zwei Schnittpunkte des Lichtstufenkreises $c d$ mit dem Umrisskreis in b_u ; das Zurückklappen von b_u auf den Umrisskreis im Grundriss liefert dort die Berührungspunkte b_1 und b_2 .

Das ganze Verfahren hätte sich auch in der Vertikalprojektion der Kugel mit Umklappen um die Vertikalprojektion des Lichtstrahls durchführen lassen und es wäre

dann die Figur samt allen Hilfslinien völlig kongruent der nun erhaltenen geworden, nur mit symmetrischer Lage zur Horizontalrichtung. Die Vertikalprojektion der Normalkugel bietet also in Beziehung zur Vertikalprojektion



Figur 88 a.

des Lichtstrahls genau dasselbe Bild, das im Grundriss der Kugel gegenüber dem Grundriss des Lichtstrahls erschien. Es folgt daraus, dass man nur eine Projektion der Normalkugel zu zeichnen nötig hat und diese bald als Grundriss, bald als Aufriss betrachten kann.

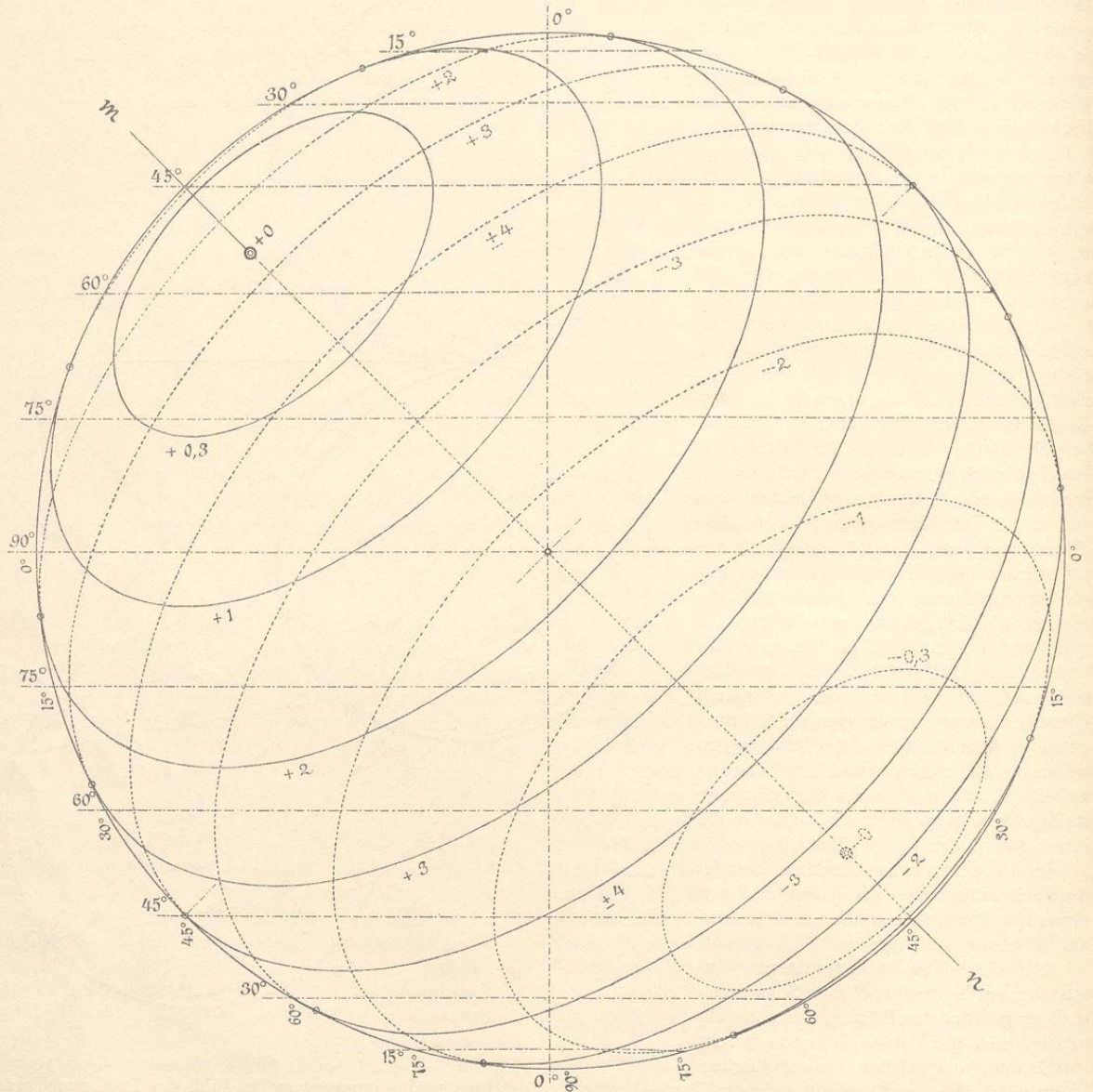
Figur 88a bietet die Normalkugelprojektion im Aufriss in kleinerem, Figur 88b in möglichst grossem Massstab. Für beide Auffassungen ist die Richtung $m n$ oder die Richtung der kleinen Ellipsenachsen als Lichtstrahlprojektion festzuhalten. Soll also die Figur als Grundriss

aufgefasst werden, so ist sie so zu legen, dass der hellste Punkt $+o$ links unten zu liegen kommt; bei Auffassung als Aufriss muss dieser Punkt links oben stehen.

Eine Seitenprojektion der Normalkugel wird selten gebraucht. Als Rechtsansicht ist sie entweder durch

Als Linksansicht erhält man die Seitenprojektion der Normalkugel durch Drehung ihres Aufrissbildes um 90° in der Weise, dass der hellste Punkt $+o$ nach rechts oben rückt; die Vorzeichen bleiben dabei unverändert.

Stellt man sich die Frage, wie sich die hohle Halb-



Figur 88 b.

Vertauschen der ausgezogenen und punktierten Linien des Aufrissbildes oder durch dessen Drehen um 180° erhältlich, so dass der frühere hellste Lichtpunkt rechts unten erscheint; im letzten Fall sind die Vorzeichen der Lichtstufenlinien zu vertauschen. Der neue hellste Punkt $+o$ und die Linie $+0,3$ werden unsichtbar und dafür der hellste Reflexpunkt $-o$ und die Linie $-0,3$ sichtbar.

kugel schattiert, die in die Vertikal- oder Horizontalebene vertieft ist, so ergibt sich die Antwort aus folgender Betrachtung. Jedes überhaupt beleuchtete Element der Hohlkugelfläche ist ebenso beleuchtet wie das ihm diametral entgegengesetzte im Aeussern der Vollkugel, weil die Richtung der tangierenden Ebene für beide Elemente dieselbe ist. Daraus folgt, dass auf der hohlen Halbkugel

der frühere Reflexpunkt r der hellste Punkt sein wird und dass die Parallelkreise gleicher Lichtstärke von diesem aus genau mit derselben Grösse und Entfernung und Lichtstärke auftreten wie früher auf der vollen Kugel vom hellsten Punkt h aus. Weil nun die Licht- und Schattenkreise symmetrisch liegen, so heisst das einfach: „Die Linien gleicher Lichtstärke für die Darstellung der halben Hohlkugel sind die auf der Darstellung der konvexen Normalkugel punktiert gezeichneten Ellipsen und Ellipsenteile unter Umkehrung der Vorzeichen plus und minus in ihrer Benennung.“

Die erste Lichtdrucktafel bietet in der mittleren Figur der oberen Reihe die konvexe Normalkugel mit ihren Lichtstufen als Aufrissbild, und zwar unter der Voraussetzung, dass ein Schlagschatten auf die Kugel falle, der ebenfalls alle sichtbaren Lichtstufenkreise umfasst. Es sind somit in dieser Darstellung alle Lichtstufen vereinigt mit Ausnahme von -0 , dessen Fläche in Vorder- und Oberansichten nie sichtbar wird, indem immer nur ein sehr schmaler Streifen von $-0,7$ das Endglied der Lichtstufenreihe im Reflex bilden kann. Nur Seitenprojektionen als Rechtsansichten und Grundrisse als Unteransichten können diese Lichtstufe mit sich bringen.

Die hohle Halbkugel ist schattiert auf der zweiten Lichtdrucktafel, und zwar erscheint sie unter dem gescheffelten Gesims als Ausfüllung der Friesfläche.

XII. Verwertung der Normalkugel zum Schattieren anderer Körper.

89. Die Normalkugel als Lichtstufenmassstab.

Wenn im früheren gesagt wurde, die Normalkugel sei ein „Lichtstufenmassstab“, so soll das nicht nur ausdrücken, dass alle Lichtstufen auf ihr verwirklicht sind, sondern auch, dass mit ihrer Hilfe die Lichtstufen anderer Körper gemessen werden können. Wie beim Anhalten des Längenmassstabes an eine Strecke ein Längenmass, so kann beim Anhalten der Normalkugel an einen Flächenpunkt die Lichtstufe dieses Punktes abgelesen werden. Wenn etwa an eine Seitenfläche eines regelmässigen Dodekaeders oder an das Innere einer ellipsoidischen Schale eine als Raumform ausgeführte Kugel mit Lichtstufenkreisen angelegt wird, so giebt der Berührungspunkt beider Körper die Lichtstufe der Seitenfläche oder des Punktes für eine Lichtrichtung, welche durch den Durchmesser der Kugel von $+0$ nach -0 ausgedrückt ist. Es ist nur das Vorzeichen der Lichtstufe umzukehren, weil eigentlich die Hohlkugel angehalten wird.

Die Verwertung dieser Thatsache für das Schattieren gezeichneter Körper mit Hilfe der gezeichneten Normalkugel geht von ihrer Begründung aus. Raumkugelpunkt und Raumflächenpunkt sind gleich hell, weil die Berührungsebenen der Kugel und der andern Fläche in diesem Punkt parallel sind. Ein durch die Zeichnung gegebener Flächenpunkt wird mit einem durch die Zeichnung gegebenen Normalkugelpunkt gleich hell sein, wenn die Berührungs-

ebenen in beiden Punkten gleich gerichtet sind. Dies ist der Grundgedanke der Verwertung der Normalkugel zum Schattieren anderer Körper.

Wenn die Frage gestellt ist: „Welche Lichtstufe hat ein gegebener Punkt einer Fläche?“ so ist in diesem Punkt eine Berührungsebene an die Fläche und an die Normalkugel eine parallele Berührungsebene zu legen; der Berührungspunkt dieser letzten hat dieselbe Lichtstufe wie der gegebene Punkt.

Damit ist nun das Beleuchtungsproblem wohl für einen ebenbegrenzten Körper, bei welchem ein Punkt für die Beleuchtung seiner ganzen Ebene massgebend ist, noch nicht aber für gekrümmte Flächen gelöst. Was wäre erreicht, wenn auf einer solchen Fläche noch so viele Punkte mit allerlei durch unganze Zahlen ausgedrückten Lichtstufen, z. B. $+3,25 + 0,62 - 2,85$ u. s. w., gefunden wären? Offenbar könnte damit die Fläche noch nicht mit zusammenhängenden und sich abstufigen Maltönen oder Strichlagen schattiert werden. Es bedarf vielmehr auf allen andern gekrümmten Flächen ähnlicher Lichtstufenlinien für die Punkte mit ganzen Zahlen, wie sie auf der Kugel durch die 9 Parallelkreise dargestellt sind; erst mit der Bestimmung dieser Lichtstufenlinien ist das Beleuchtungsproblem für eine Fläche gelöst, und mit Hilfe jener zufälligen Punkte wären die Linien nur durch eine unsichere Schätzung zu erhalten. Es wird also für jede Flächengattung eines bestimmten Verfahrens bedürfen, auf geeigneten Linien der Fläche die Punkte mit ganzzahligen Beleuchtungsstufen aufzufinden. Wenn hienach eine Gruppe zusammengehöriger ganzzahliger Lichtstufenpunkte, z. B. $+3$, auf der Fläche vorhanden ist und diese Punkte durch eine stetige Kurve zusammengefasst werden, so bildet diese eine „Linie gleicher Helle“ oder „Lichtstufenlinie“ $+3$, wie sie auf der Kugel durch den Parallelkreis $+3$ dargeboten ist, und nach Beschaffung aller solcher Kurven wird die Fläche in ähnlicher Weise durch sie gegliedert wie die Normalkugel durch die 9 Parallelkreise. Bei den andern Flächen erscheinen jedoch diese Linien meist nicht mehr so einfach, sondern zuweilen mit barocken Windungen und sogar plötzlichen Richtungsänderungen auch bei stetigen Umrissen der Körper. Man nennt diese Linien anderwärts auch „Hellenlinien“ oder mit gelehrterem Ausdruck „Isophoten“; hier soll der Ausdruck „Lichtstufenlinien“ ausschliesslich gebraucht werden.

Im folgenden ist zunächst die Verwertung der Normalkugel für eben begrenzte Körper, dann die Bestimmung der Lichtstufenlinien auf allen der praktischen Verwendung näherliegenden gekrümmten Flächen gezeigt und zum Schluss das Beleuchtungsproblem allgemein, für alle Arten von Flächen behandelt. Doch bedarf es zuvor noch einer nicht unwichtigen Betrachtung.

Lichtstufen am Aeussern und im Innern hohl-90. gedachter Körper.

Zu der Berührungsebene in einem bestimmten Punkt einer gekrümmten Fläche lassen sich immer zwei parallele Berührungsebenen an die Normalkugel legen. Man

erhält also eigentlich zwei Lichtstufen für den Punkt, die auf demselben Durchmesser der Normalkugel liegen, also durch gleiche Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen ausgedrückt sind. In der That hat jeder Flächenpunkt zwei Lichtstufen, wenn die Fläche als papierdünne Schale gedacht wird, eine für die dem Licht zugewandte Seite und eine für die Rückseite. So ist im Innern eines regelmässigen Dodekaeders eine Fläche -3 , wenn sie aussen $+3$ ist, und umgekehrt; nur ist sie als $+3$ im Innern Schlagschatten, nicht Licht. Nimmt man als Beispiel einer gekrümmten Fläche etwa den Mantel eines elliptischen einmanteligen Hyperboloids, wie es in Figur 103b dargestellt ist, so muss zuvor ausgesprochen werden, ob die Lichtstufen für das Aeussere des Mantels oder für das Innere anzugeben sind. Die Lichtstufenlinien sind zwar durchaus dieselben für innen und aussen, aber im Innern ist -3 , was im Aeussern $+3$, und umgekehrt; auch kann im Innern ein Schlagschatten neben dem Licht vorhanden sein, wo am Aeussern eine Körperschattenfläche ununterbrochen sich ausdehnt, also die Schlagschattengrenze keine Bedeutung hat, und umgekehrt. In manchen Fällen bedarf es wohl der Aufmerksamkeit und Ueberlegung, ob die Berührungsebene an der Lichtseite der Kugel oder diejenige an der Schattenseite für die Lichtstufe eines Flächenpunktes massgebend ist; aber im allgemeinen ist die Entscheidung nicht schwer und unmittelbar mit Hilfe der Anschauung zu treffen. Ein Hilfsmittel in zweifelhaften Fällen ist das Schneiden der Ebene oder gekrümmten Fläche oder des Körpers durch die vertikale Ebene eines beliebigen Lichtstrahls; die entstehende Schnittlinie zeigt sofort, welche Seite der Ebene oder welche Flächenteile dem Lichte zugewendet sind und welche nicht.

91. Körper mit ebenen Grenzflächen.

Die dem Schattieren ebenbegrenzter Körper zu Grunde liegende Aufgabe ist die Bestimmung der Lichtstufe einer durch ihre beiden Projektionen gegebenen ebenen Figur.

Das in Figur 91a durch seine beiden Projektionen dargestellte Fünfeck $ABCDE$ sei eine Seitenfläche irgend eines Polyeders. Es ist die Lichtstufe seiner Ebene zu bestimmen, das heisst, es ist derjenige Punkt der Normalkugel zu suchen, der dieselbe Lichtstufe darbietet, indem eine in diesem Punkt an die Normalkugel gelegte Berührungsebene mit der Ebene der gegebenen Figur gleichgerichtet ist.

Die Neigung einer solchen Berührungsebene ist dieselbe wie die der Tangente am vertikalstehenden Meridian durch den Berührungspunkt, und denkt man sich die Ebene mit gleichbleibender Neigung auf der Normalkugel gedreht, so beschreibt der Berührungspunkt einen horizontalen Kreis, dessen Höhenlage sich bestimmt aus dem Berührungspunkt einer Tangente am Umriss des Kugelaufrißbildes, welche dieselbe Neigung hat wie die Ebene der gegebenen Figur. Die Gefällslinien aller Lagen der gedrehten Ebene bilden eine Kegelfläche, welche die Kugel längs des Kreises berührt und deren Spitze in der vertikalen Kugelachse liegt. Diejenige Mantellinie dieser Kegel-

fläche, welche der Gefällslinie der gegebenen Ebene parallel ist, geht durch den gesuchten Kugelpunkt. Es ist also diese Gefällslinie nach Neigung und Richtung aufzusuchen.

Man zieht in der Vertikalprojektion der gegebenen Figur eine beliebige Horizontale $x'y'$, lotet die Punkte $x'y'$ in den Grundriss nach x und y , fällt aus d eine Senkrechte auf xy und lotet deren Fusspunkt z wieder hinauf in den Aufriss; DZ ist eine Gefällslinie oder Linie der grössten Neigung in der Ebene der gegebenen Figur. Von d fällt man noch das Lot $d'v'$ auf $x'y'$. Im Dreieck spq , das die Umklappung des Dreiecks DVZ darstellt, ist pq horizontal und $= dz$, sp vertikal und $= d'v'$; sq ist also die Umklappung der Gefällslinie in die Vertikalebene. Man zieht an den Aufriss der Normalkugel (Figur 91b rechts) eine Tangente $f'g'$ parallel zu sq , zeichnet den Horizontalkreis $k'g'$ durch den Berührungspunkt g' und zieht aus f' eine Parallele $f'l'$ zu $d'z'$. Wo diese Parallele den Horizontalkreis $k'g'$ schneidet, liegt der gesuchte Kugelpunkt l' , der mit der Ebene der gegebenen Figur gleiche Lichtstufe hat.

Im Grundplan der Normalkugel (Figur 91b links) würde der Lichtstufenpunkt unabhängig von jener Kegelfläche durch folgende Betrachtung gefunden. Man zeichnet als ersten geometrischen Ort des Punktes den Parallelkreis $k'g'$ im Grundriss als konzentrischen Kreis mit dem Radius $kg = k'g'$. Eine Horizontallinie durch den Berührungspunkt von Kugel und Ebene auf dieser letzten gezogen gedacht, ist Tangente an diesem Kreis. Für weitere Berührungsebenen mit gleicher Horizontalrichtung, aber anderen Neigungen, würden andere Parallelkreise erscheinen; doch wären die Richtungen der Tangenten an diesen Kreisen dieselben; die Berührungspunkte würden im Grundriss alle auf demselben Radius kn und im Raum auf einem vertikalen Grosskreis liegen, der sich in diesen Radius projiziert. Hienach ist für alle Ebenen gleicher Horizontalrichtung der geometrische Ort der Lichtstufenpunkte auf der Normalkugel ein vertikaler Grosskreis, dessen Ebene senkrecht steht auf der Horizontalrichtung der Ebenen und der sich im Grundriss der Normalkugel als ein Radius senkrecht zu dieser Horizontalrichtung projiziert.

Die Horizontalrichtung der gegebenen Ebene ist in der Linie xy schon vorhanden. Man hat also, um den Lichtstufenpunkt im Grundriss der Normalkugel zu erhalten, nur den Radius kn senkrecht zu xy oder parallel zu dz zu ziehen und auf diesem Radius $kl = k'g'$ aufzutragen; l ist der Lichtstufenpunkt im Grundriss. Um keinen Aufriss der Normalkugel beiziehen zu müssen, kann man sich den Radius $k'g'$ verschaffen, indem man für das Ziehen der Tangente $f'g'$ den Grundriss zeitweilig als Aufriss auffasst.

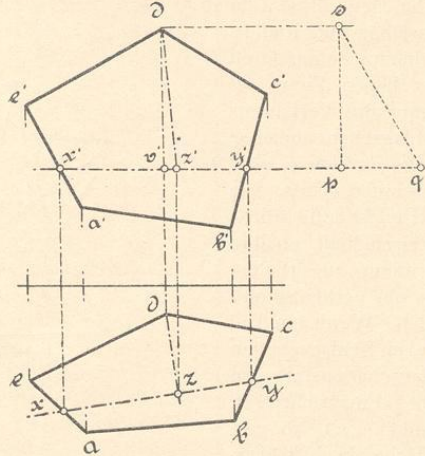
Fällt im Aufriss der Schnittpunkt f' von Tangente und Kugelachse über das Blatt hinaus, so benützt man die im Grundriss gezeigte Konstruktion, indem man den Horizontalkreis $k'g'$ in die Vertikalebene umklappt und in der Umklappung $k'i'$ parallel zu dz oder senkrecht zu xy zieht. Das Zurückklappen des Punktes i' durch $i'l'$ senkrecht zu $k'g'$ liefert dann den Punkt l' unabhängig von f' .

Die Thatfachen, durch deren Betrachtung der Punkt L sich gefunden hat, sind als wichtig für spätere Probleme

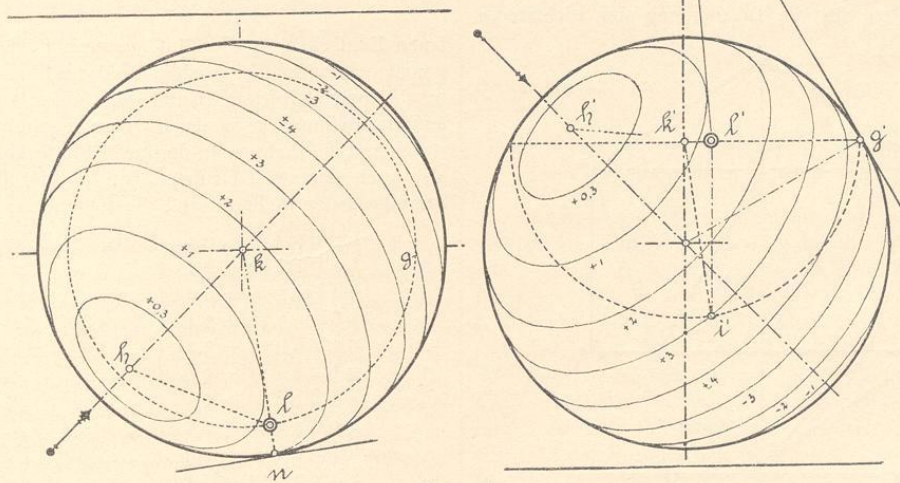
hervorzuheben und zusammenzufassen. Jede Ebene, die nicht ganz horizontal ist, hat eine Horizontalrichtung, die als Richtung der Schnittlinie mit einer beliebigen horizontalen Ebene erhalten wird, und eine dazu senkrechte Richtung der Gefällslinie oder grössten Neigung, die im Grundriss senkrecht zu jener Richtungslinie erscheint (Art. 8e). Die Horizontalrichtung bestimmt als ersten geometrischen Ort des Lichtstufenpunktes auf der Normalkugel einen Grosskreis, dessen vertikale Ebene senkrecht zu ihr gerichtet ist; sie bestimmt — um die Ortsbezeichnung auf der Erdkugel zu gebrauchen — die geographische Länge des Lichtstufenpunktes der Ebene. Die Gefällslinie bestimmt durch ihre Neigung als zweiten geometrischen Ort einen horizontalen Parallelkreis, an welchem jeder vertikale Grosskreis oder Meridian dieselbe Neigung hat wie die Ge-

Ist eine Ebene durch ihre Spuren gegeben, so giebt die Horizontalspur die Horizontalrichtung unmittelbar; die Gefällslinie erscheint im Grundriss senkrecht zur Horizontalspur.

Ist eine Ebene durch ihre Horizontalrichtung H und eine beliebige ihr zugehörige unter dem Winkel β geneigte Gerade N gegeben, so kann der Lichtstufenpunkt auch ohne Aufsuchen der Gefällslinie gefunden werden. Der geometrische Ort der Berührungspunkte aller Tangenten, welche parallel zu der geneigten Geraden N an die Normalkugel gezogen werden können, ist ein Grosskreis, dessen Ebene normal zu N steht; er projiziert sich im Grundriss der Normalkugel als eine Ellipse, deren grosse Achse senkrecht zur Horizontalprojektion von N gerichtet und deren kleine Achse gleich ist dem Normalkugeldurchmesser mal $\sin \beta$.



Figur 91 a.



Figur 91 b.

fällslinie; sie bestimmt hienach die geographische Breite oder den Polabstand des Lichtstufenpunktes.

Ist eine Ebene durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade gegeben, so bestimmt man die Horizontalrichtung ebenfalls als Verbindungslinie der Schnittpunkte der Geraden mit einer beliebigen horizontalen Schnittebene, und die Gefällslinie durch ihre im Grundriss zur Richtungslinie senkrechte Horizontalprojektion. Die Horizontalneigung der Gefällslinie findet sich wieder durch Umklappen oder getrenntes Herausragen ihrer horizontalprojizierenden Ebene.

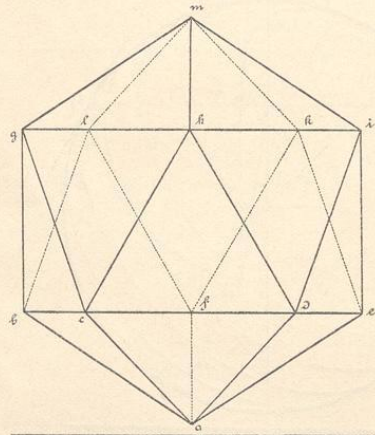
Der Schnittpunkt dieser Ellipse mit dem aus der Horizontalrichtung H erhaltenen Radius ist der Lichtstufenpunkt für die gegebene Ebene.

Die Zahlenbenennung des für eine Ebene gefundenen Berührungspunktes L auf der Normalkugel findet sich meist schon durch Schätzung für das praktische Schattieren genügend, indem man sich die Lichtstufenellipse durch den Punkt gezogen denkt und ihre Abstände von den Nachbar-ellipsen abwägt. Zu einer genauen Benennung führt jedoch diese Schätzung nicht; sie kann um so stärker irren, je näher der Berührungspunkt den Punkten $+o$

und $-o$ gelegen ist. Schärfere Bestimmung ist dadurch erreichbar, dass man die Verbindungslinie des Lichtstufenspunktes mit dem hellsten Punkt in beiden Projektionen zeichnet und durch Umklappung einer projizierenden Ebene dieser Linie deren wahre Grösse bestimmt. Diese wahre Grösse in ein nach Figur 82 gezeichnetes Normalkugelbild vom hellsten Punkt aus als Sehne eingetragen und auf den Lichtstrahldurchmesser projiziert, liefert in ihrem inneren Endpunkt die genaue Lichtstufenzahl. Denn diese Zahl verhält sich zu vier, wie die Projektionslänge zum Radius.

Die Anwendung der Lichtstufenbestimmung einer durch ihre beiden Projektionen gegebenen ebenen Figur auf ganze Körper ist nur die Wiederholung des Verfahrens für jede einzelne Grenzebene. Die Schlagschattenumrisse auf denjenigen Grenzebenen, die solche darbieten, sind unabhängig hievon in bekannter Weise aufzusuchen. Die Körperschattengrenze zu bestimmen, ist meist entbehrlich; für die meisten Grenzebenen ist nicht zweifelhaft, ob ihre Lichtstufe das Vorzeichen plus oder minus zu erhalten hat; wo Zweifel bestehen können, muss ein Vertikalschnitt mit einer Lichtstrahlenebene entscheiden. Wenn ein Teil einer Grenzebene im Licht, der andere im Schlagschatten ist, so ist nach dem früheren die Schlagschattenstufe von gleicher Benennung wie die Lichtstufe. Entspricht z. B. einer Grenzfläche ein Normalkugelpunkt $+2,2$, so entspricht der Schlagschatten auf dieser Fläche einem Schlagschattenpunkt $+2,2$ der Normalkugel.

Das regelmässige Ikosaeder, Figur 91 c, ist ein nahe-
liegendes Problem für die Bestimmung der Lichtstufen.



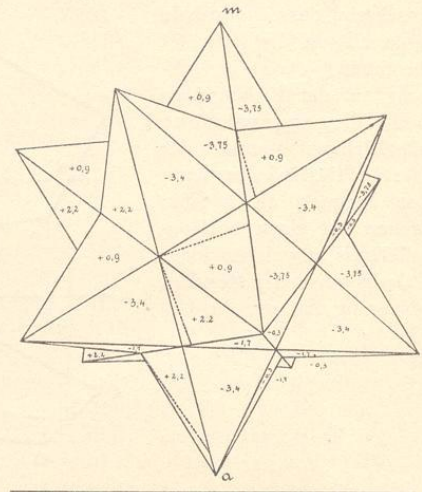
Figur 91 c.

Vier horizontale Parallelkreise der Normalkugel entsprechen den hier auftretenden Neigungswinkeln der Grenzebenen, und zehn Tangenten oder Radien im Grundriss der Normalkugel deren Horizontalrichtungen. Die Lichtstufen wurden für die angegebene Stellung etwa bestimmt wie folgt:

$acd = -3,5$	$cdh = +2,2$	$kfl = -2,2$	$ghm = +2,5$
$ade = -1,2$	$dhi = +3,1$	$flb = -3,1$	$him = +1,85$
$aef = -0,25$	$die = -2,1$	$lbg = +2,1$	$ikm = +4$
$afb = -1,85$	$eik = -1,65$	$bgc = +1,65$	$klm = +3,5$
$abc = +4$	$ekf = -0,5$	$gch = +0,5$	$lgm = +1,2$

Die Parallelrichtung der Flächenpaare ist aus der Gleichheit je zweier Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen zu erkennen.

Je fünf der dreiseitigen Grenzflächen des Ikosaeders bilden eine Pyramide. Betrachtet man die Diagonalen der zwölf fünfseitigen Grundflächen dieser Pyramiden als Kanten eines neuen Körpers, so entsteht das in Figur 91 d perspektivisch dargestellte Sternikosaeder, in welchem von



Figur 91 d.

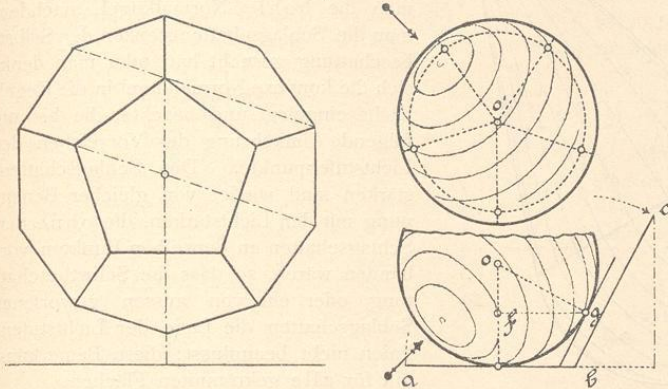
jenen Fünfecken je die fünf äusseren Dreiecke des Diagonalenpentagramms erhalten sind und das eine Selbstbeschattung darbietet. Unter der Voraussetzung unveränderter Stellung des neuen Körpers gegenüber dem Lichtstrahl sind die Lichtstufen der zwölf Fünfecke in Figur 91 c, also auch der zwölf Gruppen von je fünf Dreiecken am Sternikosaeder in Figur 91 d die folgenden:

$bchml = +0,3$	(Basis zur Spitze g)
$feiml = -2,2$	(" " " k)
$cdimg = +0,9$	(" " " h)
$bfgmk = +3,4$	(" " " l)
$deknh = -3,75$	(" " " i)
$ghikl = +1,7$	(" " " m)
$kida f = -0,3$	(" " " e)
$ghdab = +2,2$	(" " " c)
$klbae = -0,9$	(" " " f)
$ihcae = -3,4$	(" " " d)
$glfac = +3,75$	(" " " b)
$bcd ef = -1,7$	(" " " a)

Auf der ersten Lichtdrucktafel ist das Sternikosaeder mit durchgeführten Lichtstufen dargestellt, ebenso ein Gussstück (Fuss einer quadratischen Eisensäule mit Vertikalrippen), das vertikale und geneigte Flächen verschiedener Richtungen darbietet.

In bestimmten Fällen liegt es näher, anstatt der Horizontalrichtung der gegebenen Ebene ihre zur Vertikalebene parallele Richtungsline zu benützen, ebenso anstatt der Horizontalneigung den mit der Vertikalebene gebildeten Winkel. In Figur 91 e ist ein regelmässiges Zwölf-

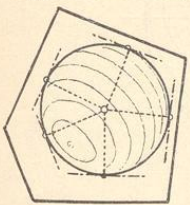
flach, das mit der Vorderfläche parallel zur Vertikalebene gerichtet ist, in dieser Weise behandelt, und es führt diese Lösung schneller zum Ziel, weil die fünf Nebenseiten gleiche Winkel mit der Vorderfläche, also auch mit der Vertikalebene bilden, so dass sie ihre Lichtstufenpunkte auf demselben mit



Figur 91 e.

der Vertikalebene gleichgerichteten Parallelkreis der Kugel finden. Aus der Verkürzung der Höhenlote der Nebenseiten ist der Winkel zwischen Vorderseite und Nebenseite abc abgeleitet, aus diesem der Berührungspunkt g einer vertikal gedachten Nebenseite mit der Normalkugel in deren Grundriss. Im Aufriss der Normalkugel ist mit einem Radius gleich fg ein konzentrischer Kreis beschrieben; die Schnittpunkte dieses Kreises mit Radien, die senkrecht zu den Seiten der Vorderfläche des Körpers gezogen wurden, sind die Lichtstufenpunkte der fünf Nebenseiten. Die Vorderfläche entspricht dem Mittelpunkt im Aufriss der Normalkugel, also der Lichtstufe $+1,7$; die fünf Nebenseiten haben etwa die Lichtstufen $+0,15 + 2,4 - 2,4 - 3 + 1,6$. Auf dem ersten Lichtdruckblatt ist der Körper schattiert.

Die Konstruktion des Lichtstufenpunktes einer Ebene in dieser oder der ursprünglichen Gestalt vereinfacht sich wesentlich bei Ebenen, die senkrecht zu einer Grundebene stehen und im Zusammenhang damit die Lichtstufenbestimmung bei prismatisch gestalteten Körpern dieser Richtung. Figur 91 f deutet an, wie z. B. für ein vertikalstehendes Prisma die Lichtstufenpunkte für die Seitenflächen aus dem Grundriss der Normalkugel als Berührungspunkte von Tangenten parallel den Seiten der Grundfläche erhalten werden. In gleicher Weise wäre der Aufriss der Normalkugel für ein zur Vertikalebene senkrechtes Prisma zu benützen.



Figur 91 f.

Die Grundebenen selbst und alle gleichgerichteten Ebenen haben ihre Lichtstufenpunkte in den Endpunkten von drei Durchmessern der Normalkugel, die senkrecht zu den drei Grundebenen stehen. Die Zahlenbenennung dieser Punkte ist fast genau $+1,7$. Die genaue Zahl ist $4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1,6908$.

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

Schiefgerichtete, aber einer Grundebene parallele Prismen verwerten die Thatsache, dass in Beziehung auf diese Grundebene die Richtungslinien ihrer Seitenflächen dieselben sind, also die Lichtstufenpunkte dieser Seitenflächen denselben Grosskreis als ersten geometrischen Ort haben. Für ein zur Vertikalebene paralleles Prisma liegen die Lichtstufenpunkte auf einem Grosskreis, der im Aufriss der Normalkugel als Durchmesser senkrecht zu den Kanten des Prismas erscheint. Die Ebene dieses Kreises ist samt seinen Lichtstufenpunkten und dem Normalschnitt des Prismas in die Vertikalebene umzuklappen. In der Umklappung wird wieder eine Tangente parallel zu jeder Seite des Normalschnittpolygons an den Kreis gezogen; der Berührungspunkt dieser Tangente ist der Lichtstufenpunkt für die zu der Polygonseite gehörige Grenzfläche des Prismas.

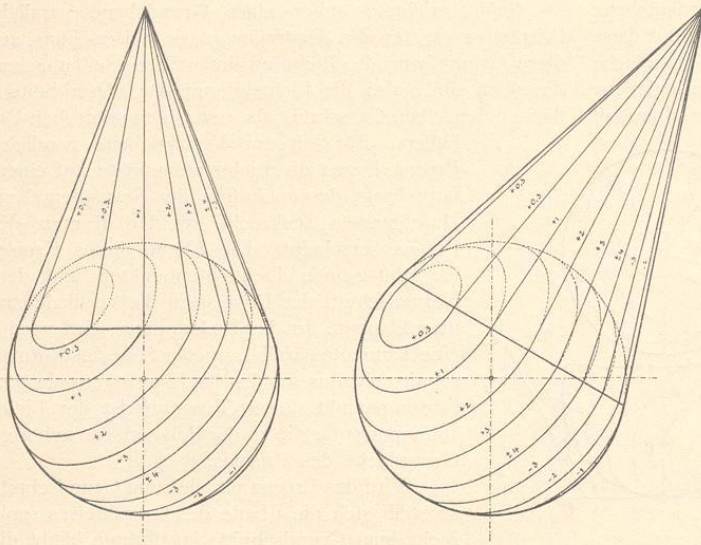
Wird das Prisma parallel zum Grundschnitt, so stellt sich die Ebene des Grosskreises senkrecht zum Grundschnitt; im übrigen bleibt die Konstruktion unverändert.

Die Anwendung der Konstruktion auf horizontale Prismen bedarf keiner Erklärung.

Auch für beliebig schief gerichtete Prismen von vielen Seiten ergibt sich oft noch eine Abkürzung der Arbeit gegenüber dem für beliebige eben begrenzte Körper gezeigten Verfahren, wenn der Grosskreis der Normalkugel aufgesucht wird, dessen Ebene senkrecht zu den Prismenkanten gerichtet ist. Die Bestimmung dieses Grosskreises geschieht wie bei den beliebig schief gerichteten Cylinderflächen in Art. 100.

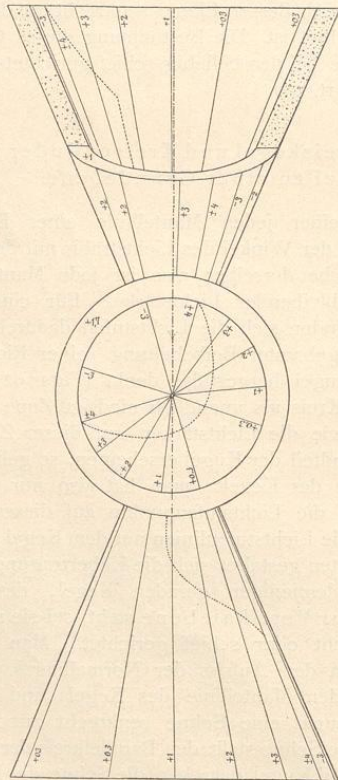
Gerade Kreiskegel und Kreiscylinder mit Achse 92. parallel zu einer Grundebene.

Längs einer jeden Mantellinie eines Kegels oder Cylinders ist der Winkel des Lichtstrahls mit der Normalen auf der Fläche derselbe; also ist jede Mantellinie eine Linie gleichbleibender Lichtstärke. Für einen geraden Kreiskegel finden sich die Lichtstufen dadurch, dass man sich den Kegel unter Beibehaltung seiner Richtung über die Normalkugel hergestülpt denkt (Figur 92 a). Er hat dann einen Kreis als unendlich niedrige Zone mit ihr gemein, und wie die Lichtstärken auf dieser Zone als auf einem Bestandteil der Kugel erscheinen, so gelten sie auch für die Zone des Kegels; man hat also nur die Mantellinien durch die Lichtstufenpunkte auf diesem Kreis zu ziehen, um die Lichtstufenlinien auf dem Kegel zu erhalten. Am einfachsten gestaltet sich die Uebertragung der Lichtstufen bei demjenigen geraden Kegel, dessen Achse parallel zur Vertikalebene steht, sei sie nun lotrecht oder wagrecht oder schief gerichtet. Man zieht eine Tangente an den Aufriss der Normalkugel parallel zur umrissbildenden Mantellinie des Kegels und durch den Berührungspunkt eine Sehne senkrecht zur Achse des Kegels; diese Sehne stellt den Parallelkreis der Berührung von Kegel und Kugel dar. Wo die Sehne die Lichtstufenlinien der Kugel schneidet, da liegen die Lichtstufenpunkte



Figur 92 a.

für den gleich grossen Parallelkreis des Kegels und dürfen auf diesem nur noch mit der Spitze verbunden werden. Das Verfahren liefert in den Mantellinien + 4 gleichzeitig die Körperschattengrenzen auf dem Kegel, so dass diese nicht vorher besonders konstruiert werden müssen. Am



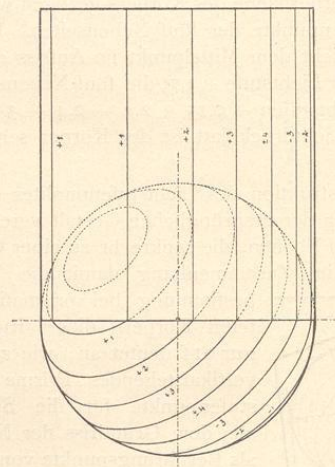
Figur 92 b.

häufigsten wird der gerade Kreiskegel mit lotrechter Achse auftreten; es wird dann jener Parallelkreis von Kegel und Kugel horizontal.

Für die hohle Kegelfläche benützt man die hohle Normalkugel, nachdem man die Schlagschattengrenzen der Selbstbeschattung gesucht hat, oder man denkt sich die konvexe Normalkugel in die Kegelfläche eingelegt und beachtet die hieraus folgende Umkehrung der Vorzeichen der Lichtstufenpunkte. Die Schlagschattenstärken sind wieder von gleicher Benennung mit den Lichtstärken, die ohne den Schlagschatten an denselben Punkten vorhanden wären, so dass die Selbstbeschattung oder ein von aussen geworfener Schlagschatten die Lage der Lichtstufenlinien nicht beeinflusst; diese Bemerkung gilt für alle gekrümmten Flächen.

Wie der Aufriss der Normalkugel für die geraden Kreiskegelflächen mit Achse parallel zur Vertikalebene, so dient der

Grundriss der Normalkugel für dieselbe Art von Kegelflächen parallel zur Horizontalebene, wenn sie als Grundrisse auftreten. In Figur 92 b erscheint in Verbindung mit vertikalen konvexen und hohlen Kreiskegeln ein horizontaler Kreiskegel mit Achse senkrecht zur Vertikalebene als Aufriss gezeichnet. Für diesen Fall bestimmen sich die Lichtstufenlinien zwar wieder dadurch, dass man

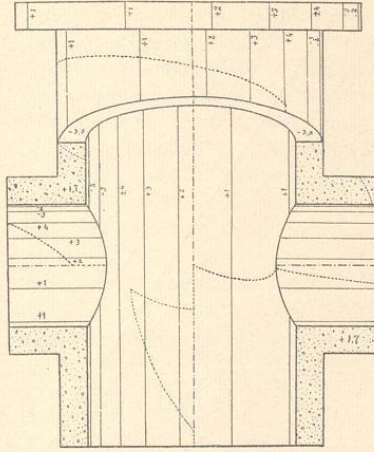


Figur 92 c.

sich den Kegel unter Beibehaltung seiner Richtung über die Normalkugel hergeschoben denkt; doch ist der Berührungskreis, nachdem sein Radius aus dem Grundriss von Kegel und Kugel bestimmt ist, im Aufriss der Normalkugel als ein mit dem Umriss konzentrischer Kreis zu zeichnen, und die Lichtstufenlinien des Kegelbildes sind die Radien dieses Kreises nach seinen Schnittpunkten mit den punktierten Lichtstufenlinien des Kugelbildes. Die

erste Lichtdrucktafel enthält die in Figur 92 b dargestellten Kegelflächen mit Durchführung der Lichtstufen.

Für Cylinderflächen, voll oder hohl, von kreisförmigem Querschnitt und mit Achse parallel zu einer



Figur 92 d.

Grundebene bedarf es keiner weiteren Vorschrift; der Cylinder wird als Kegel mit unendlich ferner Spitze behandelt; der Kreis der Berührung von Cylinder und Kugel wird ein Grosskreis, der sich im Aufriss, beziehungsweise Grundriss der Kugel geradlinig und senkrecht zur Cylinderachse projiziert (Figur 92 c). Freilich setzt dies zunächst voraus, dass eine Normalkugel gezeichnet sei, deren Durchmesser gleich dem des Cylinders ist. Aber es lässt sich

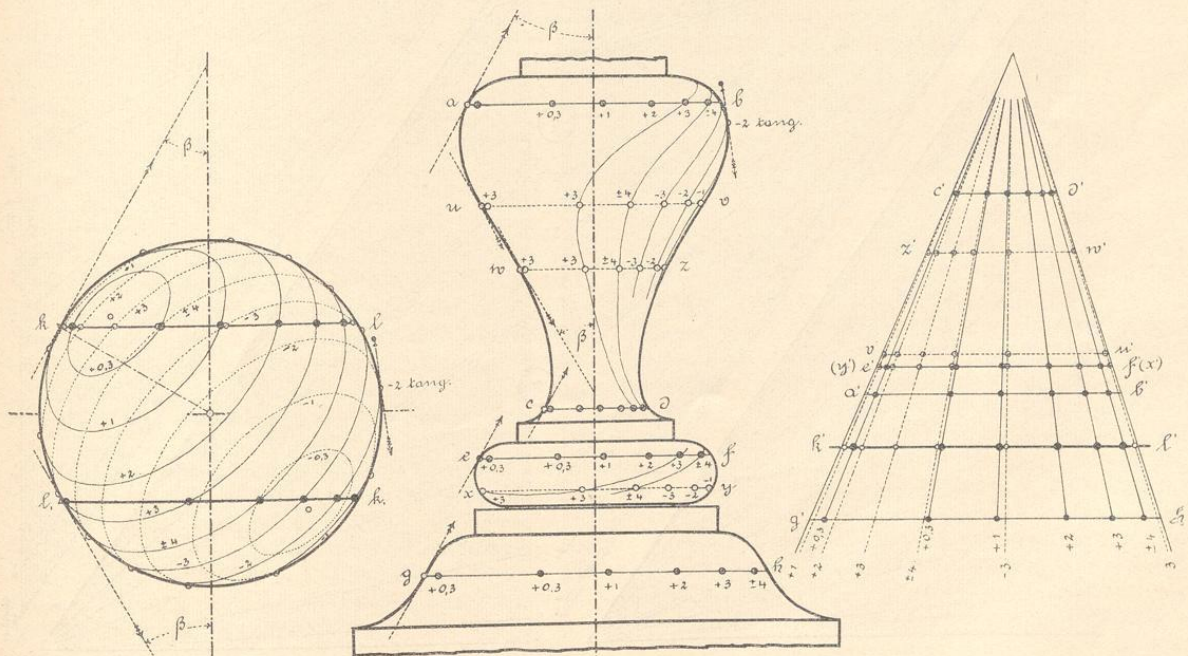
jede andere Normalkugel ebenfalls verwerten, indem man die auf dem Grosskreis der Kugel erscheinende Lichtstufeneinteilung proportional vergrößert oder verkleinert. Figur 92 d bietet horizontale und vertikale volle und hohle Cylinderflächen mit ihren Lichtstufenlinien und ihrer Selbstbeschattung; auf der ersten Lichtdrucktafel ist die Schattierung durchgeführt.

Die Drehungsfläche mit vertikaler Achse.

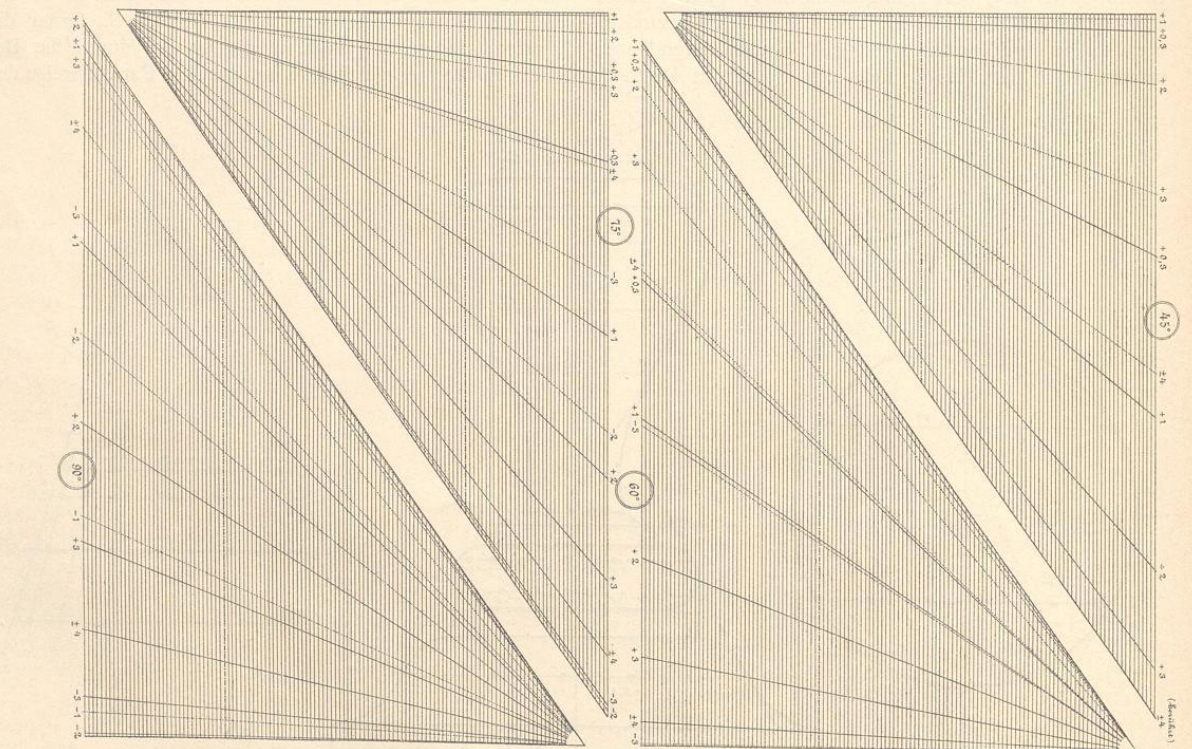
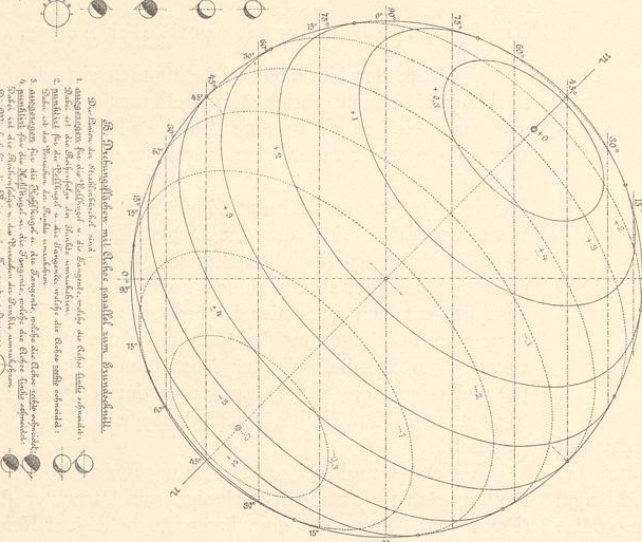
93.

Mit Hilfe der Normalkugel bestimmen sich die Lichtstärken auf beliebig gerichteten Drehungsflächen dadurch, dass man sich diese in eine Aufeinanderstellung vieler sehr niedriger gerader Kreiskegel- und Kreiscylinderflächen aufgelöst denkt, die alle dieselbe Achse haben. Für jede solche kreisförmige Zone lässt sich nach dem Vorhergehenden die Lage der Lichtstufenpunkte bestimmen. Man hat dabei nicht nötig, den Kegel, dessen Element eine bestimmte Zone bildet, ganz zu zeichnen, sondern bedient sich auch hier der proportionalen Vergrößerung oder Verkleinerung der Einteilung, die man auf dem zugehörigen Parallelkreis der Normalkugel erhält. Alle Parallelkreise eines Kegels werden ja durch ein beliebiges System von Mantellinien nach denselben Verhältnissen eingeteilt.

Als erster und weitaus am häufigsten vorkommender Drehungskörper erscheint derjenige mit lotrechter Achse (Figur 93 a). Man zieht eine Tangente beliebiger Neigung an den Umriss des Drehungskörpers und eine gleich gerichtete Tangente an den Umriss der Kugel, ferner die Horizontallinien ab beziehungsweise kl durch die Berührungspunkte, welche die horizontalen Parallelkreise des



Figur 93 a.

[illegible]

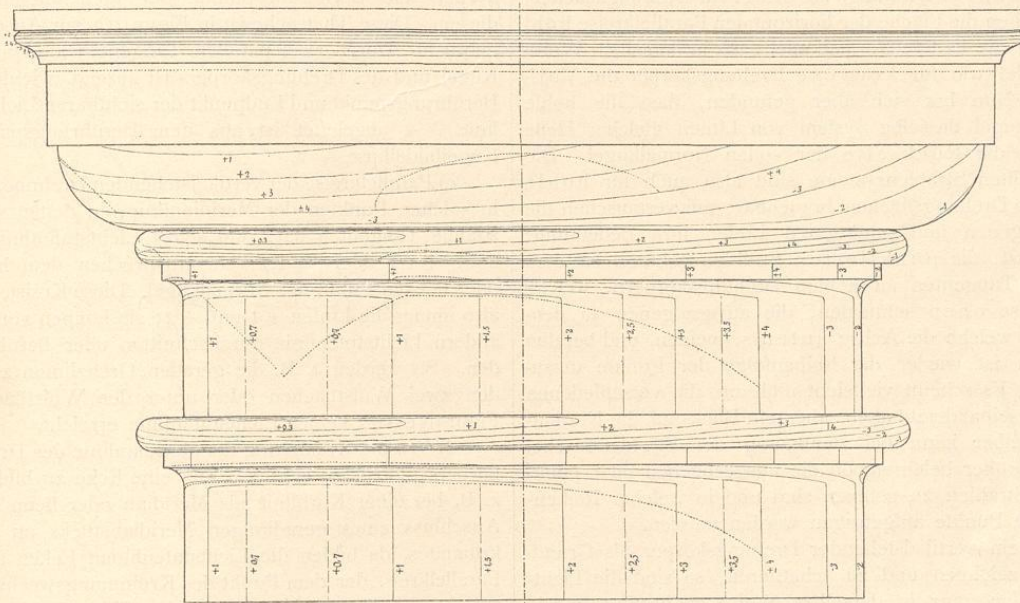
Figur 93 b.

Drehungskörpers und der Kugel darstellen. Auf der Horizontallinie der Kugel entsteht eine Teilung durch die Lichtstufenlinien; diese Teilung überträgt man proportional vergrößert oder verkleinert auf die Horizontallinie des Drehungskörpers und benennt jeden Teilpunkt mit derselben Zahl wie auf der Kugel. Führt man dieses Verfahren für eine genügende Zahl von verschiedenen gerichteten Tangenten durch, so erscheint auf der Drehungsfläche eine Gruppe von Punkten, von denen die gleichbenannten sich leicht zusammenfinden und durch eine stetige Kurve verbinden lassen. Damit sind die Lichtstufenlinien der Drehungsfläche bestimmt; in allen Punkten einer solchen Linie hat die Fläche dieselbe Lichtstärke oder Helle, wie der gleichbenannte Lichtstufenkreis auf der Normalkugel.

Für alle Tangenten gleicher Neigung, die man am

welcher an irgend einem vertikalstehenden Drehungskörper derselben Neigung der Tangente angehört, die Teilung mit einem Papierstreifen abnehmen können. Auf dem Normalkugelblatt (Figur 93 b) ist dieses Verfahren durchgeführt für die Neigungen von 90° , 75° , 60° , 45° , 30° und 15° , wovon man die meisten an den Schiebdreiecken hat und diejenigen von 15° und 75° durch Halbieren des Winkels von 30° rasch erhalten kann. Für 0° oder die horizontale Tangente erscheint natürlich kein Strahlenbüschel; hierfür ist die Lichtstärke immer dieselbe, nämlich nahezu + 1,7.

Zieht man (Figur 93 a links) an den Normalkugelumriss eine Tangente, welche die vertikale Achse unter demselben Winkel β unten schneidet, den die früher gezogene Tangente nach oben bildet, so findet sich, dass der untere horizontale Parallelkreis l, k , durch die sicht-



Figur 93 c.

Umriss vertikalstehender Drehungskörper ziehen kann, wie z. B. in den Punkten $ac eg$ der Figur 93 a, ist derselbe Horizontalkreis der Normalkugel massgebend, wonach die Strecken $ab cd ef gh$ in gleichem Verhältnis einzuteilen sind wie die Strecke kl . Hiefür dient in bekannter Weise ein Strahlenbüschel, das von einem beliebigen Pol aus nach den Teilpunkten der getrennt herausgetragenen Linie $k'l' = kl$ gezogen wird (Figur 93 a rechts). Die parallel zu $k'l'$ eingepassten Strecken $a'b' = ab$, $c'd' = cd$, $e'f' = ef$, $g'h' = gh$ werden durch die Strahlen in denselben Verhältnissen eingeteilt wie die Strecke kl . Wenn man also ein- für allemal zu einer bestimmten Neigung der Tangente die Teilung der horizontalen Sehne des Kugelbildes heraus trägt, ein Strahlenbüschel nach den Teilpunkten zieht und die Strahlen durch eine grosse Zahl von weiteren parallelen Linien durchschneidet, so wird man an diesem Liniensystem für jeden Horizontalkreis,

baren ausgezogenen Lichtstufenlinien ganz ebenso eingeteilt wird, wie der gleich grosse obere Parallelkreis kl durch die punktierten, für die Kugelmückseite gültigen Ellipsenteile, nur mit Umkehrung der Reihenfolge und der Vorzeichen der Punkte. Wenn man also in die Strahlenbüschel der oberen Parallelkreise als punktierte Strahlen auch diejenigen aufnimmt, welche für die Lichtstufenpunkte der Kugelmückseite gelten würden, so können diese Strahlenbüschel zugleich für diejenigen Parallelkreise auf der Vorderseite des Drehungskörpers dienen, deren Tangenten die Achsen unter denselben Winkeln unten schneiden.

In den Punkten uw und x sind solche Tangenten gezogen; die Strecken $uv wz$ und xy sind mit $u'v' w'z'$ und $x'z'$ in das für den Winkel β gültige Strahlenbüschel parallel eingepasst; die Abstände der dort auf den punktierten Strahlen erhaltenen Punkte waren von w nach z mit derjenigen Reihenfolge einzutragen, wie sie im Strahlen-

büschel von w' nach z' auftreten, ebenso für $uv = u'v'$ und für $xy = x'y'$; ausserdem waren die Vorzeichen der Lichtstufenpunkte umzukehren, z. B. anstatt $+3$ zu setzen -3 .

Die in Figur 93b gezeichneten sechs Strahlenbüschel enthalten ebenfalls die punktierten Strahlen; sie gelten auch für diejenigen Tangenten ihrer Winkel, welche die Achsen der Drehungskörper unten schneiden. Andernfalls wären zwölf Strahlenbüschel notwendig geworden.

Ein durchgeführtes Beispiel für die Lichtstufenlinien auf einem vertikalstehenden Drehungskörper ist Fig. 93c; das dargestellte Kapitäl ist schattiert auf der vierten Lichtdrucktafel, die auch die Hälfte der Säulenbasis als zweiten solchen Körper darbietet. Stärker bewegte Umrisslinien erscheinen an den Balustern der zweiten Lichtdrucktafel.

Für die hohlen Drehungsflächen mit lotrechter Achse und konkaver Drehung, das heisst für Drehungsflächen, bei welchen die Fläche der horizontalen Parallelkreise hohl ist, wird die hohle Normalkugel ganz in derselben Weise verwendet wie für konvexe Drehungskörper die Vollkugel. Nun hat sich aber gefunden, dass die hohle Normalkugel dasselbe System von Linien gleicher Helle hat wie die Rückseite der vollen Normalkugel. Die aufgestellten Strahlensysteme sind also auch für hohle lotrechte Drehungsflächen brauchbar; nur vertauschen die ausgezogenen und punktierten Linien ihre Bedeutung; das heisst, die punktierten Strahlen gehören zu denjenigen Tangenten an hohlen Drehungskörpern, welche die Achse oben schneiden, die ausgezogenen zu denjenigen, welche die Achse unten schneiden, und bei den letzteren ist wieder die Reihenfolge der Punkte umzukehren. Es scheint vielleicht mühsam, die verschiedenen Fälle auseinanderzuhalten, aber ein Blick auf die Normalkugel selber kann bei Benützung der Strahlenbüschel rasch darüber belehren, ob die ausgezogenen oder punktierten Strahlen zu nehmen sind und in welcher Reihenfolge die Punkte aufgetragen werden müssen.

Ist ein vertikalstehender Drehungskörper als Grundriss zu zeichnen und zu schattieren, so sind die Lichtstufenlinien ganz in derselben Weise zu bestimmen wie nach Art. 95 diejenigen für Drehungsflächen mit Achsen senkrecht zur Vertikalebene, wenn sie als Aufrissbilder auftreten.

94. Sätze über den Verlauf der Lichtstufenlinien auf solchen Flächen.

Die Lichtstufenlinien auf vertikalstehenden, als Aufrisse gezeichneten Drehungskörpern lassen folgende Tatsachen erkennen:

a) Dem höchsten Punkt einer Lichtstufenlinie auf der Drehungsfläche und dem höchsten Punkt der gleichnamigen Ellipse auf der Normalkugel entsprechen zwei Parallelkreise, an welchen die Umrisse des Drehungskörpers und der Kugel gleichgerichtete Tangenten haben. Da auch beide Parallelkreise durch die Lichtstufenpunkte proportional geteilt sind, so lässt sich mit diesem Satz der höchste Punkt jeder Lichtstufenlinie auf dem Drehungskörper, in welchem die Kurve eine horizontale Tangente

hat, scharf bestimmen. Dasselbe gilt für die tiefsten Punkte aller Lichtstufenlinien. Höchste Punkte können in Vorderansichten nur haben die Kurven $+0,3$ und $+1$, tiefste Punkte die Kurven $+0,3 + 1 + 2 + 3 \pm 4 - 3 - 2$.

b) Die Lichtstufenlinien kommen berührend am Umriss der Drehungsfläche an; wenn auch die Berührung eine solche mit sehr starker Krümmung sein kann, die sich von einem Schnitt kaum unterscheidet. In einem jeden Berührungspunkt hat der Umriss der Drehungsfläche dieselbe Richtung der Tangente, wie der Normalkugelumriss am Berührungspunkt der gleichnamigen Lichtstufenellipse. Wenn man also auf dem Normalkugelblatt die Berührungspunkte bezeichnet (wie in Art. 88 gezeigt und in Figur 88a und b geschehen), so liefern die Tangenten am Umriss der Normalkugel in diesen Punkten und gleichgerichtete Tangenten am Umriss des Drehungskörpers die Berührungspunkte der Lichtstufenlinien an diesem. Diese Tatsache ist in Figur 93a zur Anschauung gebracht. Durch zwei parallele Tangenten am Umriss der Kugel und des Drehungskörpers ist gezeigt, wie der obere Berührungspunkt und Endpunkt der sichtbaren Lichtstufenlinie -2 abgeleitet ist aus dem Berührungspunkt der Kugelbildellipse -2 .

c) Parallelkreise der vertikalstehenden Drehungsflächen in solchen Punkten der Meridianlinie, in denen sie horizontale Tangenten hat, sind selbst Lichtstufenlinien, und zwar $+1,7$ oder $-1,7$; sie entsprechen dem höchsten oder tiefsten Punkt der Normalkugel. Diese Kreise trennen also immer die Linien $+1$ und $+2$; sie können von keiner andern Lichtstufenlinie durchschnitten oder berührt werden. So werden z. B. die geraden Grenzlinien zwischen den zwei Wulstflächen oder unter den Wulstflächen in Figur 93c von keiner Lichtstufenlinie erreicht.

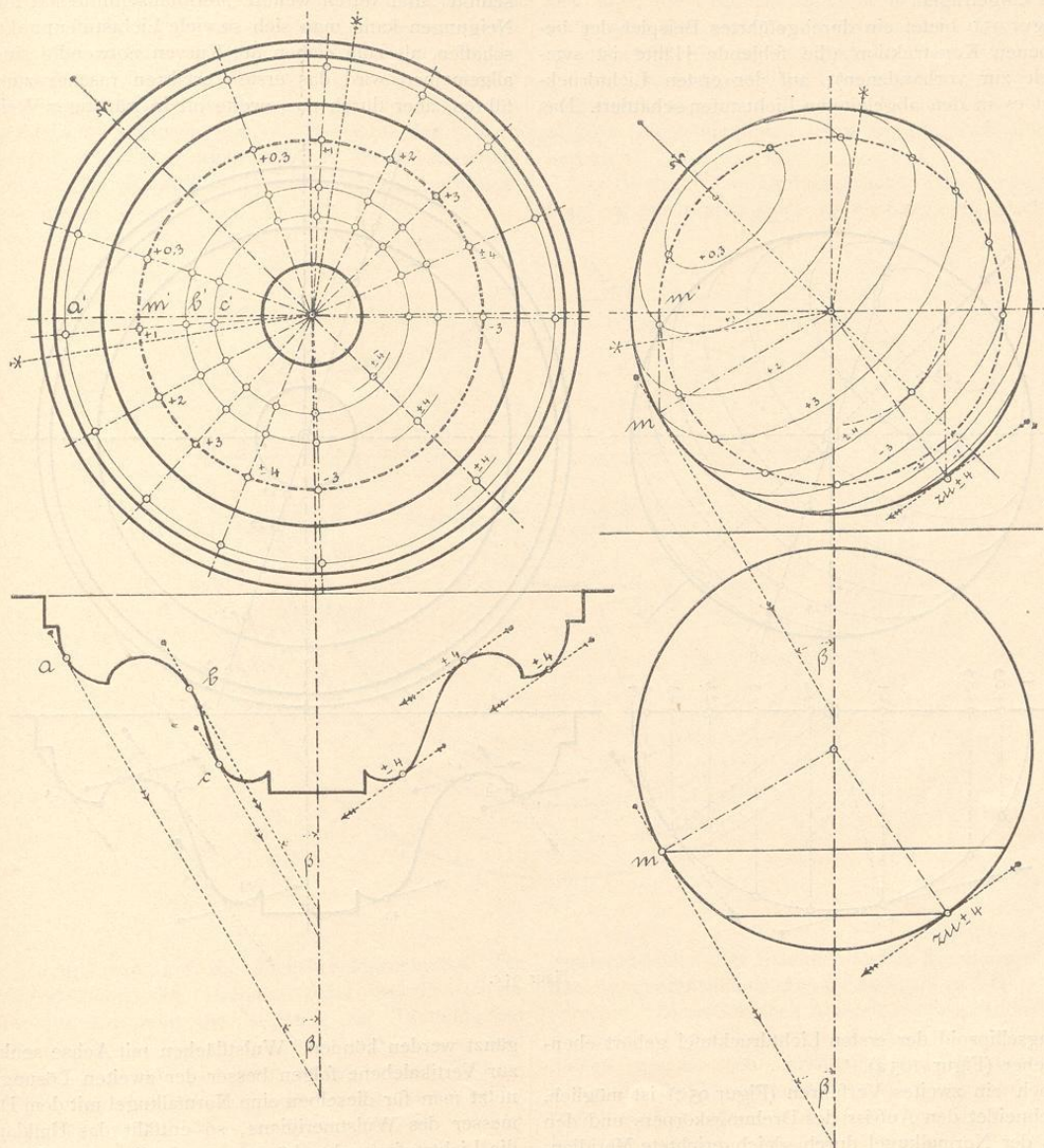
d) Wo die Krümmung der Meridianlinie des Drehungskörpers plötzlich wechselt, ohne eine Ecke zu bilden, wie z. B. bei einer Korblinie als Meridian oder beim stetigen Anschluss eines geradlinigen Meridianstücks an ein gekrümmtes, da bilden die Lichtstufenlinien Ecken auf dem Parallelkreis, der dem Punkt des Krümmungswechsels entspricht, obgleich der Umriss keine Ecke darbietet. Ein Beispiel ist schon in Figur 92c enthalten, wenn man sich das verdeckte Normalkugelstück weggenommen denkt.

Die Drehungsfläche mit Achse senkrecht zur 95. Vertikalebene.

Wenn für eine solche Fläche die Lichtstufenlinien in der Horizontalprojektion gesucht werden sollen, so ist die Lösung ganz entsprechend derjenigen bei vertikalstehenden Drehungskörpern; nur wird der Grundriss der Normalkugel anstatt des Aufrisses benützt, und es sind dann die sechs Strahlenbüschel zur Normalkugel abermals verwertbar. Anders jedoch, wenn die Schattierung nur in der Vertikalprojektion verlangt wird. Als Beispiel hierfür mag eine gedrehte Rosette auf vertikaler Wandfläche dienen. Ein passendes Beispiel für hohle Drehungsflächen dieser Art wäre das mit einer grossen Hohlkehle und Wulsten zurücktretende Rahmengesims eines gotischen Rosenfensters oder Hochfensters.

An den Horizontaldurchschnitt der Rosette (Fig. 95a) zieht man in den Punkten $a b c$ parallele Tangenten unter einem beliebigen Winkel β . Ihnen entsprechen die der Vertikalebene parallelen Kreise $a' b' c'$ im Aufriss. Bestimmt man auf dem horizontalen Grosskreis der Normalkugel den Berührungspunkt m einer Tangente, die den

rung oder Verkleinerung, sind auch die drei Parallelkreise im Aufriss der Rosette einzuteilen, um auf ihnen die Lichtstufenpunkte zu erhalten. Dies geschieht, indem man den Kugelkreis mit seiner Einteilung auch in den Aufriss der Rosette zeichnet und Radien durch seine Teilpunkte zieht; bei reicheren Formen dienen besser eigene Hilfsfiguren



Figur 95a.

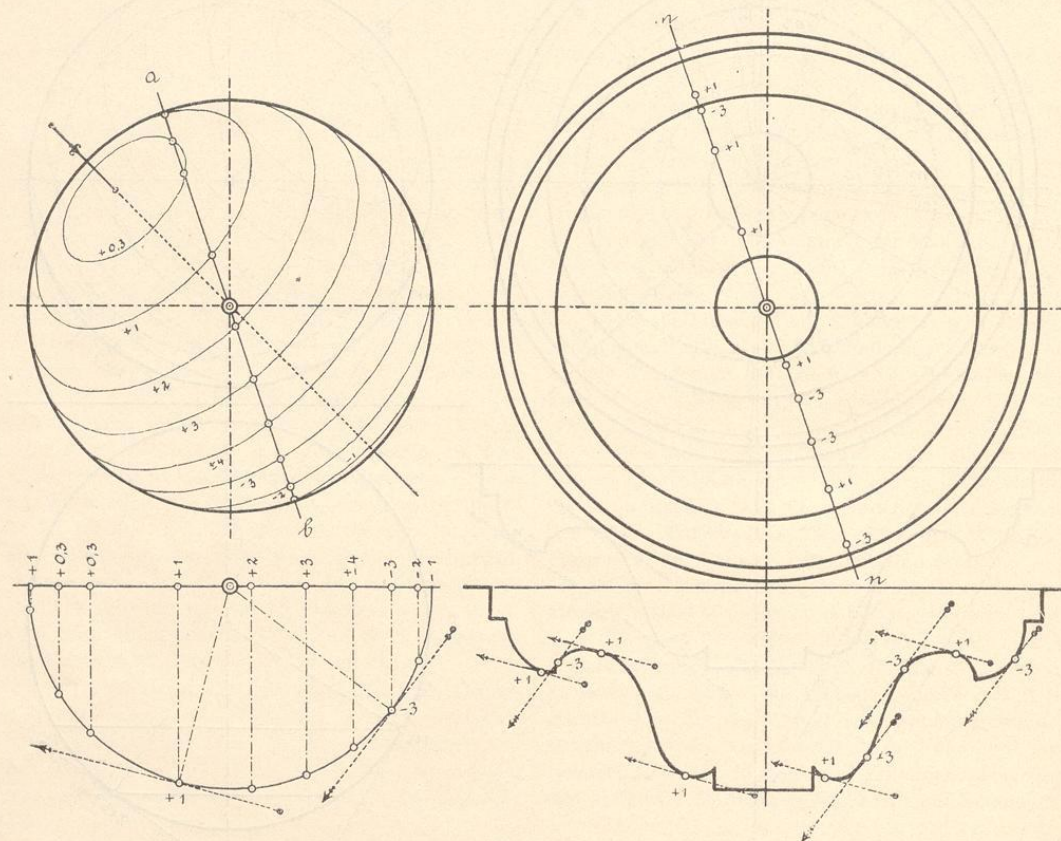
in $a b$ und c gezogenen parallel ist, und legt durch den Berührungspunkt einen Kugelkreis m' parallel zur Vertikalebene, der sich im Aufriss der Normalkugel als konzentrischer Kreis projiziert, so wird dieser Kreis durch die Lichtstufenlinien in einer bestimmten Weise eingeteilt, und in derselben Weise, nur mit proportionaler Vergrösse-

für jeden Kugelkreis. Führt man das beschriebene Verfahren für eine genügende Zahl von Richtungen der Tangenten durch, so lassen sich die Lichtstufenlinien durch die im Aufriss gefundenen Punkte ziehen, ohne dass sie auch im Grundriss gezeichnet werden müssten. Zu Fig. 95a ist noch zu bemerken, dass der Grundriss der Normal-

kugel nur beigefügt ist, um den Gedanken der Lösung deutlicher zu zeigen, dass aber für die praktische Ausführung der Konstruktion alle zur Bestimmung der Radien nötigen Hilfslinien auch an der Aufrissfigur gezogen werden können, deren Umriss hierbei eben zeitweilig als Grundriss aufgefasst wird. Die Hilfslinien sind deshalb auch im Aufriss eingetragen.

Figur 95b bietet ein durchgeführtes Beispiel der beschriebenen Konstruktion (die fehlende Hälfte ist symmetrisch zur vorhandenen); auf der ersten Lichtdrucktafel ist es in den abgeleiteten Lichtstufen schattiert. Das

Punkt + 1 eine Tangente, dann an den umgeklappten Rosettenmeridian parallele Tangenten, so werden die Berührungspunkte der letzteren ebenfalls die Lichtstärke + 1 haben, und sie sind dann nur noch in den Aufriss zurückzuklappen. Durch weitere Tangenten bekommt man auch die Punkte + 2 + 3 + 4 — 3 u. s. w. auf demselben Meridianschnitt, und durch weitere Meridianschnitte mit anderen Neigungen kann man sich so viele Lichtstufenpunkte verschaffen, als zum Ziehen der Kurven notwendig sind. Im allgemeinen wird das erste Verfahren rascher zum Ziel führen, aber durch das zweite oft in günstiger Weise er-



Figur 95 c.

Drehungsellipsoid der ersten Lichtdrucktafel gehört ebenfalls hieher (Figur 103 a).

Noch ein zweites Verfahren (Figur 95c) ist möglich. Man schneidet den Aufriss des Drehungskörpers und den Aufriss der Normalkugel durch gleichgerichtete Meridianebenen mn und ab . Zieht man an den Grosskreis, der den Schnitt der Kugel bildet, eine Tangente, und dann eine gleichgerichtete Tangente an den Meridianschnitt des Drehungskörpers, so werden die beiden Berührungspunkte gleiche Lichtstärke haben. Daher klappt man sowohl den Grosskreis als den Meridian in die Vertikalebene um. Auf der Umklappung des Grosskreises ab erscheinen Teilungspunkte + 1 — 3 u. s. w. Zieht man z. B. in dem

gänzt werden können. Wulstflächen mit Achse senkrecht zur Vertikalebene folgen besser der zweiten Lösung; benutzt man für dieselben eine Normalkugel mit dem Durchmesser des Wulstmeridians, so entfällt das Umklappen; die Lichtstufenpunkte können unmittelbar vom Kugelbilddurchmesser auf den Radius des Wulstbildes übertragen werden und die Aufgabe löst sich in einfachster Weise. Es erscheint hier der Gedanke der Schattenkonstruktion nach Figur 58 auf die Lichtstufenbestimmung ausgedehnt.

Für die Lichtstufenlinien auf Drehungsflächen mit Achsen senkrecht zur Vertikalebene, die als Aufrisse dargestellt sind, ergeben sich folgende Sätze und Bemerkungen.

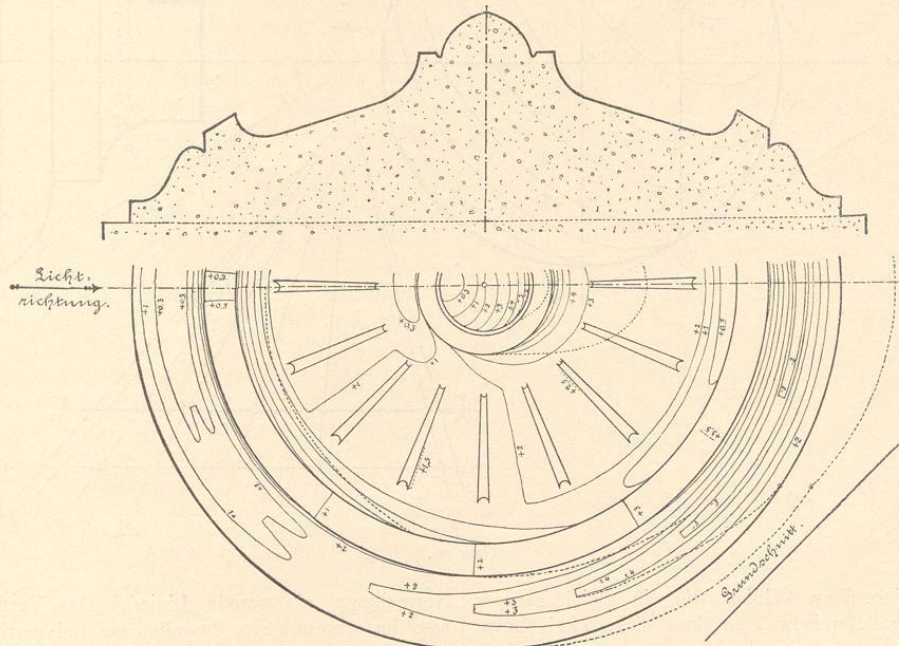
a) Die ganze Lichtstufenliniengruppe hat eine Symmetralachse im Lichtstrahldurchmesser.

b) Wenn an eine Lichtstufenlinie +1 des Normalkugelaufrißbildes (Figur 95a) eine Tangente vom Mittelpunkt aus und im Aufriss der Drehungsfläche ein Radius parallel zu dieser Tangente gezogen wird, so berührt dieser Radius die Lichtstufenlinie +1 der Drehungsfläche, und diese Linie kehrt an diesem Radius in derselben Weise um, wie die Lichtstufenellipse +1 des Kugelbildes an ihrer Tangente. In Figur 95a sind die Radien punktiert eingetragen und mit Kreuzen bezeichnet. Figur 95b zeigt das Umkehren der Kurven +0,3 und +1; bei den andern Lichtstufenlinien ist es nicht möglich, da im Kugelbild tangierende Radien an die andern Lichtstufenellipsen nicht möglich sind.

Lösung mit der sonst in Figur 95a durchgeführten ersten.

d) Werden die in Figur 95a an den Flächenschnitt gezogenen Tangenten parallel zum Grundschnitt, so erscheinen in den Berührungspunkten diejenigen Parallelkreise, nach welchen Ebenen, die der Vertikalebene parallel sind, die Drehungsfläche berühren. Diese Parallelkreise sind also zugleich Lichtstufenlinien +1,7; sie entsprechen dem vordersten Punkt der Normalkugel; als nur gedachte, nicht gezeichnete Linien trennen sie überall die Lichtstufenlinien +1 und +2 der Fläche; keine der ganzzahligen Lichtstufenlinien kann sie durchschneiden oder berühren.

e) Wenn viele Drehungsflächen der angegebenen Lage zu schattieren sind, so zeichnet man geschlossene



Figur 95b.

c) Legt man auf die Lichtstrahldurchmesser des Kugelbildes und der Drehungsfläche Meridianschnittebenen und bestimmt die Richtung der Tangente am Meridianschnitt der Kugel etwa im Punkt +3, so sind die Berührungspunkte paralleler Tangenten am Flächenmeridian Lichtstufenpunkte +3 der Fläche. Damit erhält man die äussersten Punkte der Kurve +3, in welchen diese wie die Ellipse des Kugelbildes den Lichtstrahldurchmesser rechtwinklig schneidet und symmetrisch umkehrt. In Figur 95a sind die Punkte +4 auf dem Lichtstrahl in dieser Weise bestimmt. Die parallelen Tangenten sind an Kugel- und Flächenschnitt je mit zwei Punkten hinter dem Pfeil bezeichnet. Als Umklappung des Kugelmeridians ist der Umriss der Kugel selbst benützt. In dieser Bestimmung äusserster Kurvenpunkte erscheint ein Verbinden der zweiten oben beschriebenen

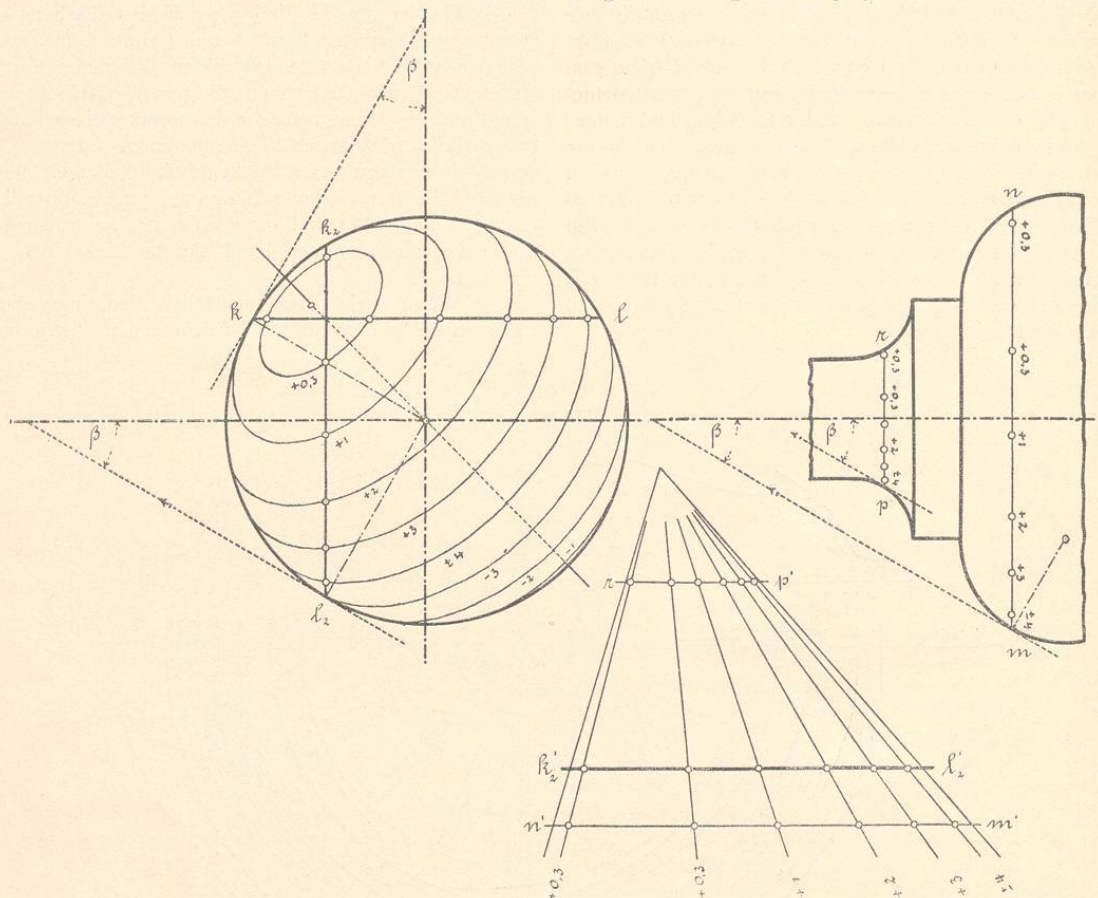
Strahlenbüschel oder Scheiben für die Kugelkreise, welche den Tangentenwinkeln $\beta = 0^\circ 15^\circ 30^\circ 45^\circ 60^\circ 75^\circ$ entsprechen. Diese Scheiben können zur proportionalen Einteilung der Parallelkreise aller Flächen in derselben Weise dienen, wie die sechs Strahlenbüschel der Figur 93b zur Einteilung der horizontalen Strecken; nur wird man anstatt des Papierstreifens zum raschen Uebertragen der Punkte Pauspapier benützen.

Die Drehungsfläche mit Achse parallel zum 96. Grundschnitt.

Für solche Drehungsflächen (Figur 96) hat man, entsprechend der Richtung ihrer Parallelkreise, diejenigen Parallelkreise der Normalkugel zu benützen, die senkrecht zum Grundschnitt stehen, und im übrigen zu verfahren

wie im vorigen Fall. Ein solcher vertikaler, zum Grund-

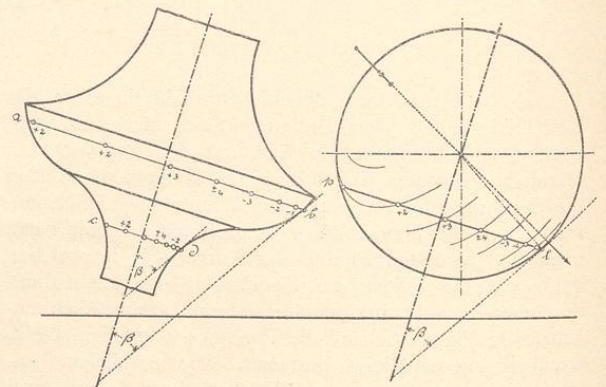
schnitt senkrechter Parallelkreis $k_2 l_2$ bildet mit dem Licht-



Figur 96.

strahl genau denselben Winkel wie ein gleich grosser horizontaler Parallelkreis $k l$, so dass diese zwei Kreise auch zu den Lichtstufenlinien der Normalkugel symmetrisch liegen. Daher werden die Lichtstufenpunkte auf dem vertikalen Kreis mit denselben Abständen auftreten wie auf dem horizontalen, nur mit symmetrischer Umkehrung der Reihenfolge. Hienach sind die sechs Strahlenbüschel der Figur 93b auch brauchbar für das Auftragen der Lichtstufenlinien von horizontalen Drehungsflächen parallel zum Grundschnitt, und zwar sowohl für die konkavgedrehten als die konvexen Flächen dieser Art. Die nötigen Angaben zu ihrer Benützung in dieser neuen Richtung sind der Figur schriftlich beigelegt.

Normalkugel als gerade Linien. Das Verfahren bleibt also im wesentlichen dasselbe wie bei vertikalstehenden



Figur 97.

97. Drehungsflächen mit schiefgerichteten Achsen.

Solche Flächen treten in den technischen Gebilden meist nur so auf, dass die Achse einer Grundebene, gewöhnlich der Vertikalebene, parallel ist. Dieser Fall löst sich ohne neue Hilfsmittel. Die Parallelkreise der Kugel (Figur 97), welche parallel zu denjenigen der Drehungs-

Drehungsflächen. Ist z. B. die Tangente, die man in b an den Drehungskörper ziehen kann, parallel zur Tangente in l am Umriss der Normalkugel, so ist Parallel-

kreis ab nach denselben Verhältnissen zu teilen, in denen der ihm parallele Kugelkreis pl durch die Lichtstufenlinien der Kugel geteilt ist, ebenso jeder andere zu derselben Tangentenrichtung gehörige Parallelkreis cd . Die Normalkugel ist hienach zugleich Hilfsmittel zur raschen Bestimmung der Körperschattengrenzen auf schiefergerichteten, aber der Vertikalebene parallelen Drehungsflächen; denn in der Lichtstufenlinie ± 4 erhält man eben die Körperschattengrenze. Nach dem Früheren (Art. 64) ist diese Schattengrenze nur durch Umsetzung der Grundebenen mit Neubestimmung des Lichtstrahls, also auf weit längerem Weg anderweitig erhältlich.

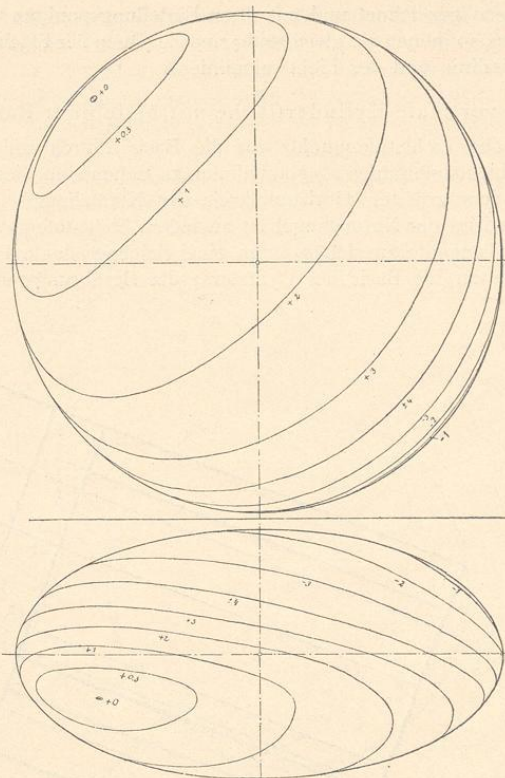
Die Anwendung der vorgeführten Lösung auf horizontale Drehungsflächen mit schiefergerichteter Achse bedarf keiner Erklärung.

Drehungsflächen mit beliebig schiefergerichteter, das heisst keiner Grundebene paralleler Achse bilden zeitraubende Probleme. Eine solche Fläche ist als gegeben zu betrachten durch die beiden Projektionen ihrer Achse und durch ihren Meridian. Ihr Umriss in jeder Projektion, nicht mehr durch Meridiane oder Parallelkreise gebildet, wird erhalten, indem man eine genügende Zahl von Parallelkreisen auswählt und deren elliptische, geometrisch ähnliche Projektionen auf der Grundebene zeichnet; die Umhüllungslinie dieser Ellipsen ist der Umriss der Fläche. Auf jeder solchen Ellipse sind zugleich die Lichtstufenpunkte in unten zu beschreibender Weise zu bestimmen und die gleichzahligen Punkte in Kurven zusammenzufassen.

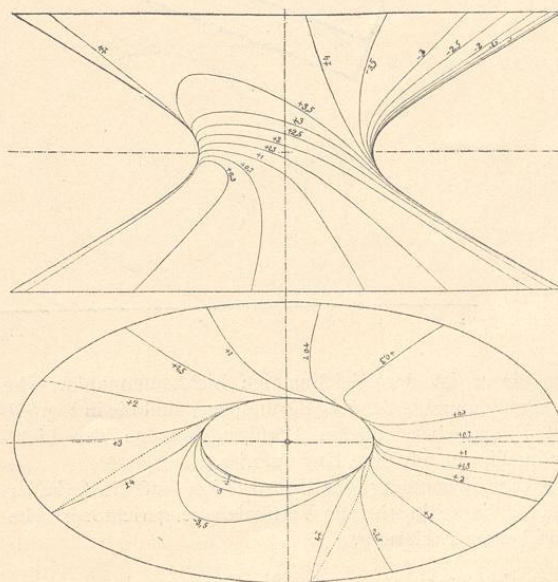
Man zeichnet die beiden Projektionen eines Durchmessers der Normalkugel parallel zur Achse der Drehungsfläche, fasst die Kugel als Drehungsfläche mit diesem Durchmesser als Achse auf und stellt den Flächenmeridianschnitt und den Kugelmeridianschnitt mit vertikalstehenden Achsen nebeneinander. In den für die Parallelkreise der Drehungsfläche ausgewählten Meridianpunkten zieht man Tangenten, dann parallele Tangenten an den Kugelmeridian und durch die Berührungspunkte beider Arten von Tangenten horizontale Sehnen. Diese Sehnen teilen die vertikalen Achsen beider Meridianschnitte nach zwei bestimmten Proportionen ein. In den gleichen Proportionen sind auch die zugehörigen Projektionen beider Achsen einzuteilen.

Für jeden Teilpunkt auf den Projektionen beider Achsen ist nun die elliptische Projektion des zugehörigen Parallelkreises zu zeichnen. Alle diese elliptischen Projektionen sind geometrisch ähnlich und gleich gerichtet; die genaue Bestimmung einer ersten nach Richtung und Achsenverhältnis gilt für alle andern. Die Lösung der Aufgabe, durch einen Punkt einer gegebenen Geraden als Mittelpunkt einen Kreis gegebener Grösse zu legen, dessen Ebene normal zur Geraden steht, ist in Art. 71 beschrieben und mit Figur 71e dargestellt.

Die elliptische Projektion eines Kugelkreises schneidet nun die Lichtstufenlinien der Normalkugel in bestimmten Punkten. Wie die Kugelbildellipse durch diese Punkte eingeteilt ist, so ist auch die geometrisch ähnliche Flächenbildellipse, die derselben Tangentenrichtung entspricht wie die Kugelbildellipse, einzuteilen, das heisst, die Ein-



Figur 103 a.



Figur 103 b.

teilungspunkte beider Ellipsen müssen ebenfalls geometrisch ähnlich liegen. Sind in dieser Weise alle Flächenbild-

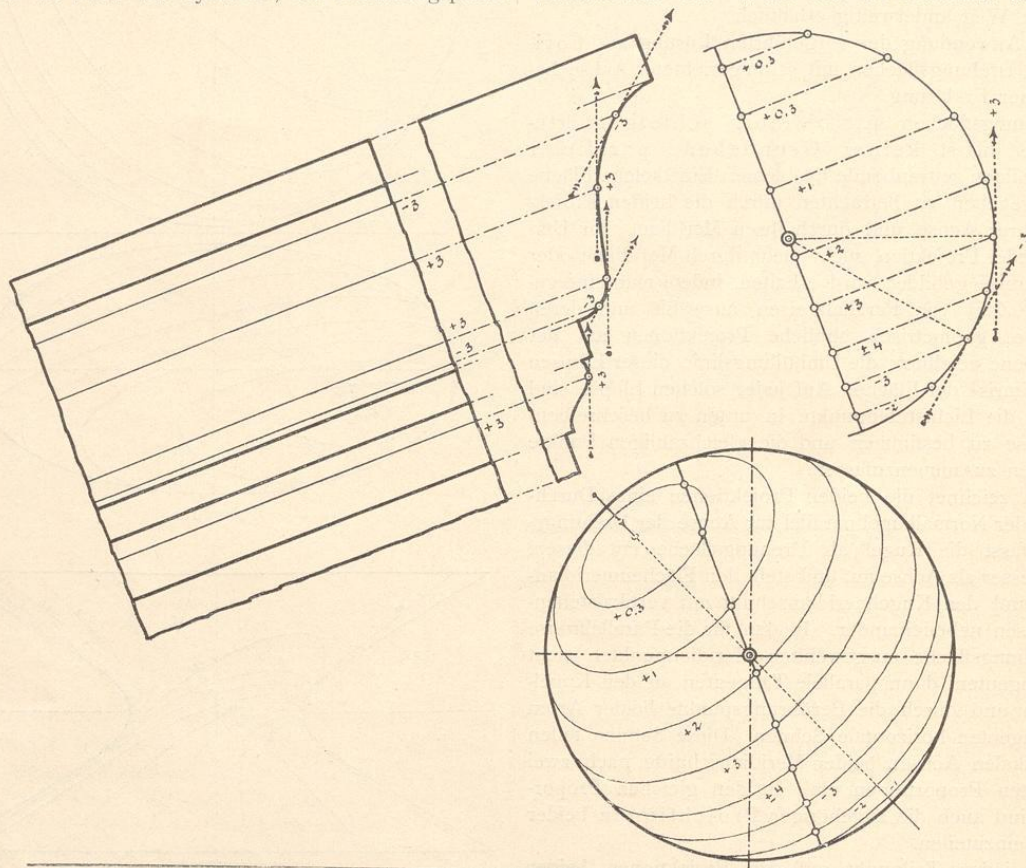
ellipsen gezeichnet und mit ihren Einteilungspunkten versehen, so dienen sie gleichzeitig zum Zeichnen der Flächenumrisslinie und der Lichtstufenlinien.

98. Die vertikale Cylinderfläche mit beliebiger Basis.

Die Lichtstufenpunkte für die Basis, durch welche die Lichtstufenlinien als Mantellinien zu ziehen sind, liegen auf dem grössten Horizontalkreis der Normalkugel. Im Grundriss der Normalkugel ist an jedem Lichtstufenpunkt eine Tangente zu ziehen, dann eine gleichgerichtete Tangente an die Basis des Cylinders; der Berührungspunkt

hier sei als häufig vorkommender Fall das erste vorausgesetzt (Fig. 99).

Der geometrische Ort der Lichtstufenpunkte auf der Normalkugel ist ein Grosskreis, dessen Ebene parallel ist der Normalschnittebene der Cylinderfläche. Im Aufriss der Normalkugel erscheint er als Durchmesser parallel zur Normalschnittlinie der Cylinderfläche in deren Aufriss. Man klappt den Grosskreis samt seinen Lichtstufenpunkten um den Durchmesser, ebenso die Normalschnittebene samt der Profilinie darin um ihre Fusslinie in die Vertikalebene um. Wenn auf der Profilinie der Licht-



Figur 99.

auf dieser ist der gleichnamige Lichtstufenpunkt. Die Lichtstufenpunkte des Kugelgrundplans sind die in Fig. 88b mit Ringen bezeichneten Berührungspunkte der Lichtstufenellipsen mit dem Kugelgrundriss.

Die Anwendung der Konstruktion auf die Cylinderfläche, die senkrecht zur Vertikalebene gerichtet ist, bedarf keiner Erklärung.

99. Die schiefgerichtete oder die horizontale Cylinderfläche parallel zur Vertikalebene mit beliebigem Normalschnitt.

Für diese Fläche kann entweder die Normalschnittlinie oder die Basis in der Horizontalebene gegeben sein;

stufenpunkt + 3 zu bestimmen ist, so zieht man im Punkt + 3 des umgeklappten Grosskreises eine Tangente und an die umgeklappte Profilinie eine parallele Tangente. Der Berührungspunkt dieser letzteren ist der Lichtstufenpunkt + 3 in der Umklappung; er ist noch zurückzuklappen in den Aufriss des Normalschnitts. In Figur 99 ist die Konstruktion für die Lichtstufenlinien + 3 und - 3 zur Anschauung gebracht; die Tangenten zur ersten sind mit einem Querstrich, die zur zweiten mit zwei Querstrichen bezeichnet.

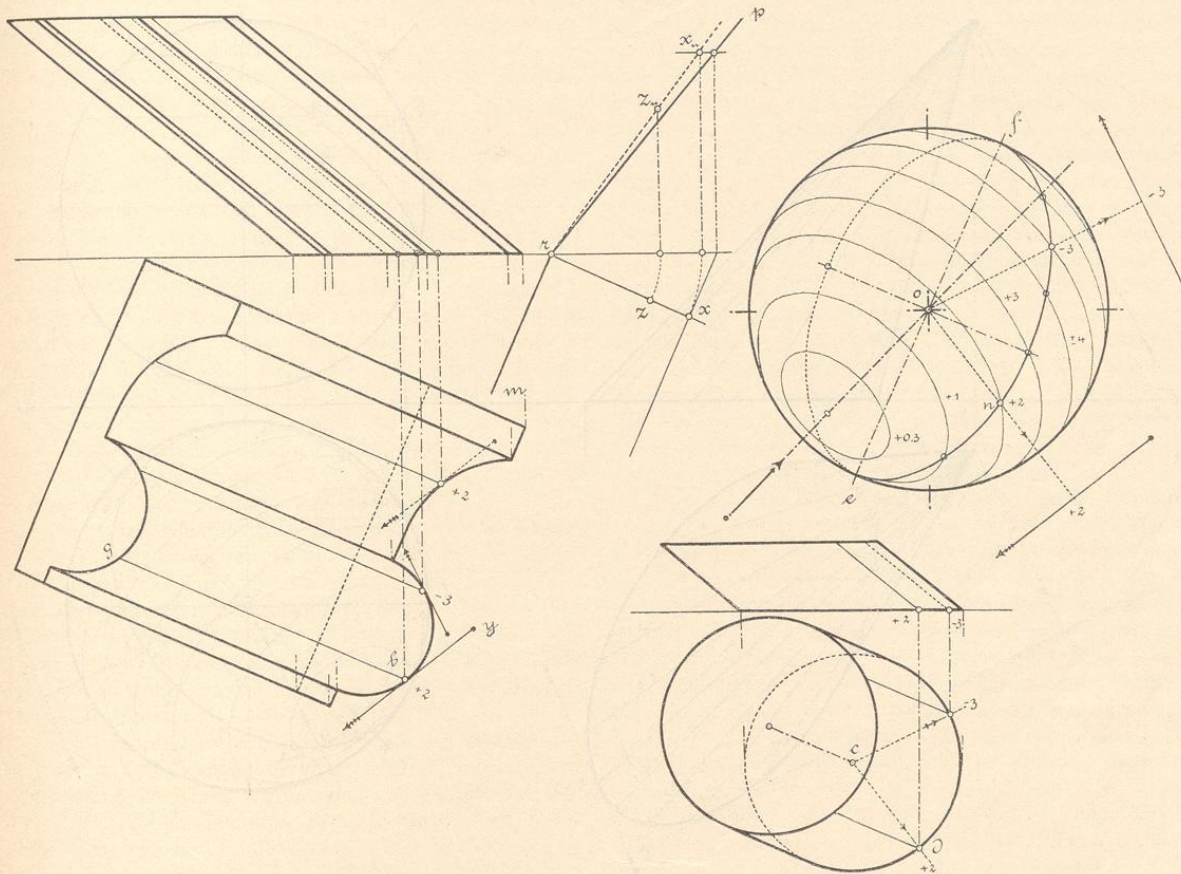
Werden die Mantellinien der Cylinderfläche horizontal, also dem Grundriss parallel, so bringt dies keine Aenderung.

100. Die beliebig schiefgerichtete Cylinderfläche mit beliebig gestalteter horizontaler Basis.

Der geometrische Ort der Lichtstufenpunkte auf der Normalkugel (Figur 100) ist ein Grosskreis, dessen Ebene senkrecht steht auf den Mantellinien der Cylinderfläche. Die Spuren dieser Ebene rm und rp stehen senkrecht zu den gleichnamigen Projektionen der Mantellinien. Den Grosskreis zeichnet man nur im Grundriss der Normalkugel; er erscheint dort als Ellipse, deren grosse Achse

den Berührungspunkt b dieser Tangente ist eine Lichtstufenlinie + 2 der Cylinderfläche.

Dies ist etwa durch folgendes zu beweisen. Wenn man durch irgend einen Punkt des Grosskreises eine Parallele zu den Mantellinien zieht, so ist diese Tangente an der Kugel; also ist auch eine solche durch n gezogene Parallele eine Tangente, und eine Berührungsebene an der Kugel im Punkt n enthält diese Parallele. Die Horizontalrichtung der Ebene ist dargestellt durch eine Senkrechte zum Radius on (vergl. Art. 91). Die Berührungs-



Figur 100.

ef parallel ist der Horizontalspur mr der Ebene, und deren kleine Achse dadurch erhalten wird, dass man mit Hilfe eines beliebigen Vertikalschnitts rx der Ebene normal zu ihrer Horizontalspur ihre Gefälllinie umgeklappt in die Vertikalebene darstellt, auf der Umlappung rx_n den Normalkugelradius rs_n aufträgt und auf die Normalschnittlinie nach rs zurückklappt. Die Linie rs giebt nach Grösse und Richtung die kleine Halbachse der Ellipse. Schneidet nun der Grosskreis z. B. die Lichtstufenlinie + 2 der Normalkugel in einem Punkt n , so zieht man im Grundriss der Normalkugel den Radius nach n und an die Basislinie der Cylinderfläche eine Tangente by senkrecht zu diesem Radius. Die Mantellinie durch

ebene der Cylinderfläche im Punkt b geht durch die Mantellinie gb und die Tangente by ; beide Linien sind parallel den in der Berührungsebene der Kugel enthaltenen, also sind beide Berührungsebenen parallel.

Wird die Basis der Cylinderfläche kreisförmig (Fig. 100 rechts unten), so entfallen jene Tangenten; zu dem im Grundriss der Normalkugel gezogenen Radius on ist nur im Basiskreis des Cylinders ein paralleler Radius cd zu ziehen; dieser giebt in seinem Endpunkt d den Lichtstufenpunkt $+2$.

Der gerade elliptische Kegel mit vertikaler Achse. 101.

Man zeichnet ein Drehungsellipsoid mit Achse senkrecht zur Vertikalebene, dessen Umriss im Grundriss eine

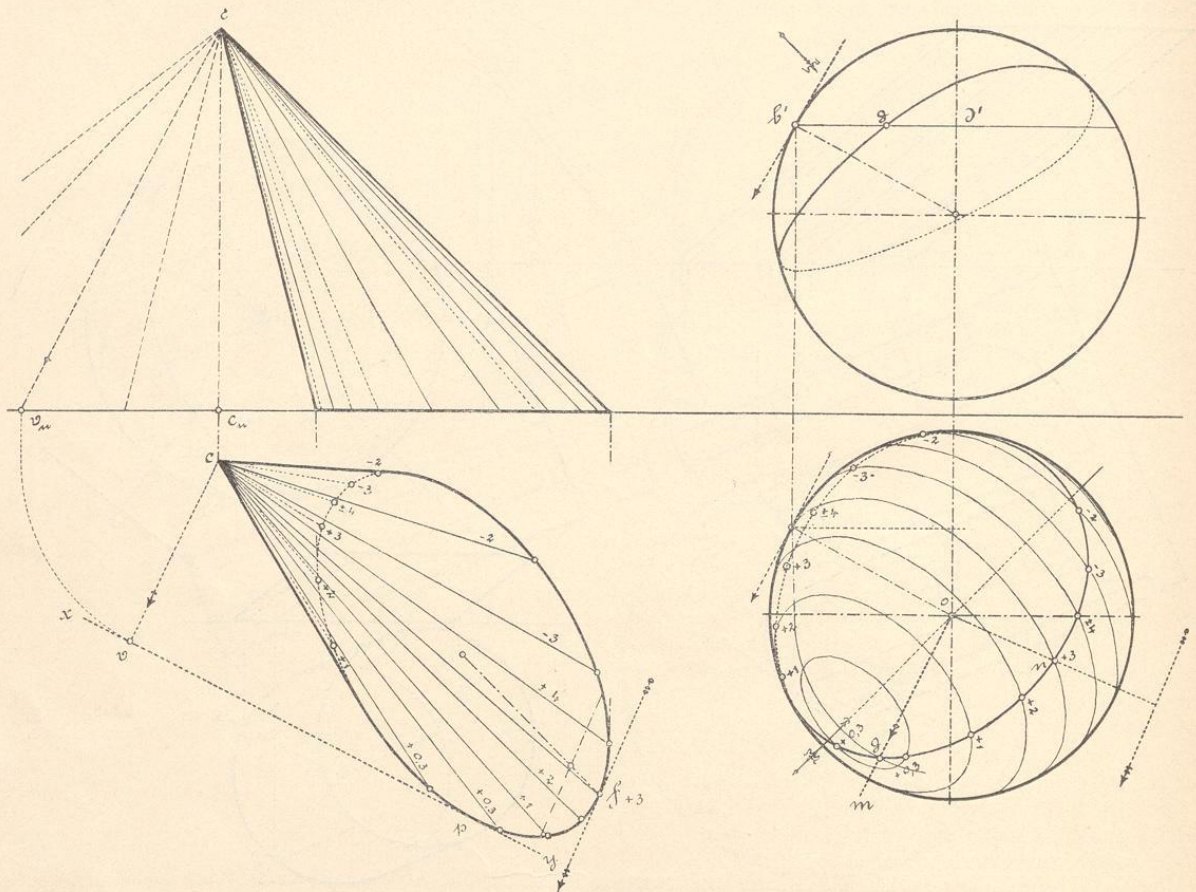
Ellipse mit demselben Achsenverhältnis ist wie die Basis-ebene des Kegels. In diesem Grundriss bestimmt man die Lichtstufenlinien des Ellipsoids nach Art. 96 mit Hilfe der sechs Strahlenbüschel. Auf dieses Ellipsoid denkt man sich den Kegel gestülpt. Die Berührungslinie zwischen beiden Körpern ist eine etwas kleinere horizontale Ellipse vom gleichen Achsenverhältnis wie der Umriss des Ellipsoids. Die grosse Achse dieser Ellipse erhält man, indem man im Aufriss das Aufstülpen des Kegels mit dessen breitem Umrissbild zeichnet; die Strecke zwi-

hier notwendige ist mit dem Achsenverhältnis 1:2 in Figur 103a (Seite 107) dargestellt.

Eine andere Lösung für den elliptischen Kegel ist die allgemeine für Kegelflächen nach Art. 102.

Die Kegelfläche mit beliebig gestalteter horizontaler Basis.

Man sucht zunächst auf der Normalkugel den geometrischen Ort der Berührungspunkte der Ebenen, welche



Figur 102.

schen den Berührungspunkten ist diese grosse Achse. Im Grundriss erscheint die Berührungsellipse konzentrisch zum Umriss des Ellipsoids; wo sie dessen Lichtstufenlinien schneidet, da sind die Lichtstufenpunkte für den gleich grossen Horizontalschnitt des Kegels, die ohne Eingehen auf den Aufriss des Ellipsoids in den Aufriss des Kegels übertragen und dort zum Zeichnen der Mantellinien, welche Lichtstufenlinien sind, verwertet werden können. Die Berührungsellipse wird zur gegebenen Basis des Kegels, wenn man gleich anfangs den Aufriss des Ellipsoids so gross wählt, dass er die äussersten Mantellinien des in der breitesten Ansicht gezeichneten Kegels in deren Fusspunkten berührt. Ein Drehungsellipsoid wie das

den Berührungsebenen an der Kegelfläche parallel sind und zwar in folgender Weise. Während bei fast allen andern hier behandelten Flächen, selbst bei Schraubenflächen, Konoidflächen u. s. w., dieser geometrische Ort für eine bestimmte Linie auf der Fläche als Grosskreis oder Parallelkreis erhalten werden kann, ergibt sich für den allgemeinen Fall der Kegelflächen immer eine doppelt gekrümmte Linie auf der Normalkugel, und es erweist sich hiedurch die Kegelfläche, abgesehen vom geraden Kreiskegel, als ein verhältnismässig schwieriger Gegenstand der Beleuchtungskunde.

Mit beliebiger Richtung und ohne Bestimmung des Berührungspunktes wird an die Kegelbasis (Figur 102)

eine Tangente xy gezogen und von der Spitze des Kegels aus eine Senkrechte im Raum auf diese Tangente gefällt gedacht. Diese Senkrechte, die auch im Grundriss als eine Senkrechte cv auf der Tangente erscheint, ist die Gefällsline der Berührungsebene, die durch den (unbestimmten) Basispunkt p an die Kegelfläche gelegt wird und diese längs der Mantellinie dieses Basispunktes berührt. Die Horizontalneigung dieses Lotes ergibt sich als spitzer Winkel am Fuss eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen horizontale Kathete cu , vu die Senkrechte cv aus dem Grundriss und dessen Höhe gleich der Höhe des Kegels ist. An den Aufriss der Normalkugel zieht man eine Tangente parallel zur Hypotenuse $c'u$ dieses Dreiecks und bestimmt den Horizontalabstand $d'b'$ des Berührungspunktes b' von der vertikalen Achse der Normalkugel. Im Grundriss der Normalkugel wird ein Radius om parallel zu jener Senkrechten cv gezogen und auf diesem Radius vom Mittelpunkt aus jener Horizontalabstand $d'b' = og$ aufgetragen. Der Endpunkt g ist der Berührungspunkt zwischen der Normalkugel und einer Ebene, die der Berührungsebene am Kegel parallel ist; dieser Punkt giebt also an, welche Lichtstufe die Mantellinie des Kegels im ausgewählten Basispunkt p darbietet. Wendet man dieses Verfahren auf weitere Basispunkte p an, so finden sich im Grundriss der Normalkugel weitere Berührungspunkte g , welche in einer Kurve zusammengefasst den anfangs genannten geometrischen Ort ergeben. In Figur 102 ist diese Kurve auch im Aufriss bestimmt, wo sie nicht verwertet wird. Ein Aufriss der Normalkugel ist ganz entbehrlich, wenn die Tangente an den Grundriss gezogen wird.

Die Kurve schneide die Lichtstufenlinie + 3 im Grundriss der Normalkugel in einem Punkt n . An die Kegelbasis zieht man eine Tangente normal zu dem Radius on und erhält im Berührungspunkt f dieser Tangente den Lichtstufenpunkt + 3 auf der Kegelbasis. (Scharfe Bestimmung von f durch eine zur Tangente parallele Sehne und den Halbmesser der Ellipse nach dem Halbierungspunkt der Sehne.)

Die Konstruktion beruht darauf, dass jede Berührungsebene des Kegelmantels in irgend einem Punkt der auf der Kugel gefundenen Kurve eine parallele Berührungsebene der Kugel finden muss, und dass die zu einem Punkt f des Kegels gehörige Berührungsebene der Kugel nur diejenige sein kann, welche die gleiche Horizontalrichtung hat, wie die Berührungsebene des Kegels in f .

103. Das dreiachsige Ellipsoid, das elliptische Paraboloid und das einmantelige elliptische Hyperboloid.

Auch auf diesen Körpern lassen sich die Lichtstufenlinien auf kürzestem Weg mit Hilfe des in Art. 101 beschriebenen Drehungsellipsoids mit Achse senkrecht zur Vertikalebene erhalten, indem man jede horizontale Schnittellipse der Körper als einen sehr niedrigen Kegelmantel auffasst und auf diesem die Lichtstufenpunkte bestimmt wie für den elliptischen Kegel gezeigt worden ist. Uebrigens verlohnt es sich hier mehr, auch den Aufriss des Drehungsellipsoids mit den Lichtstufenlinien zu zeichnen und dann

zu benützen wie den Aufriss der Normalkugel bei Drehungsflächen mit vertikaler Achse nach Art. 93. Die Figur 103 a (Seite 107) zeigt das benützte Drehungsellipsoid, 103 b das elliptische Hyperboloid; die Schattierung beider Körper ist durchgeführt auf der ersten Lichtdrucktafel.

Das windschiefe Viereck oder hyperbolische Paraboloid.

Das hyperbolische Paraboloid ist als Gegenstand der Schattenkonstruktion in Art. 69e behandelt, und zwar ist es dort als Rückungsfläche aufgefasst, entstanden durch die Parallelbewegung einer horizontal liegenden Parabel längs einer andern vertikalstehenden mit entgegengesetzter Achsenrichtung. Auch für die Bestimmung der Lichtstufenlinien ist diese Auffassung die nächstliegende und einfachste. Wie nach Art. 69e für die Körperschattenbestimmung, so ist auch für das neue Problem jeder Horizontalschnitt der Fläche zu erklären als eine niedrige Zone eines schiefen Cylinders, dessen Basis die bewegliche Parabel ist und dessen Mantellinienrichtung durch die Tangente an der festen Parabel im Punkte des Horizontalschnitts dargestellt wird. Wo die Lichtstufen auf der horizontalen Parabel als auf der Basis des Cylinders liegen, da liegen sie auch für das Paraboloid. Die Bestimmung der Lichtstufenpunkte auf dem Cylinder ist in Art. 100 erklärt, vereinfacht sich aber dem dort behandelten allgemeinen Fall gegenüber dadurch, dass die Mantellinien parallel zur Vertikalebene liegen.

Hier sei die Lichtstufenbestimmung auch für eine zweite Auffassung der Fläche, für diejenige als Regelfläche betrachtet, nach welcher sie, abgegrenzt durch vier gerade Linien, auch das „windschiefe Viereck“ genannt wird. Ein solches erzeugt sich, indem eine Gerade gleitet an zwei andern, räumlich getrennten, nicht parallelen Geraden und dabei immer einer bestimmten Ebene, der „Richtebene“ parallel bleibt. Neben dieser ersten Gruppe von Erzeugenden, welche die verschiedenen Lagen der beweglichen Geraden bilden, giebt es noch eine zweite Gruppe gerader Mantellinien auf der Fläche, dadurch bestimmt, dass die zwei ursprünglichen Leitlinien selber auf zwei beliebigen Erzeugenden der ersten Gruppe derart gleiten, dass sie immer einer zweiten Richtebene parallel bleiben, nämlich derjenigen, welcher jene beiden Leitlinien gemeinschaftlich parallel sind.

Die Fläche findet in der Technik höchst selten Verwertung, in der Baukunst etwa als windschiefe Dachfläche zwischen zwei gleich hohen, aber verschieden breiten Giebeln eines Hauses, wobei die erste Gruppe von Erzeugenden dargestellt ist durch die geneigten Dachsparren, die zweite durch die horizontalen Pfetten und Dachlatten, so dass ein solches Dach, obgleich eine gekrümmte Fläche, doch durchaus aus geraden Hölzern hergestellt werden kann. Hierin erscheint der besondere Fall, dass die beiden Richtebenen senkrecht zu einander stehen. Anlehnend an dieses Beispiel sei hier eine Fläche gewählt, deren Richtebenen die horizontale Grundebene und die Seitenprojektionsebene bilden, die also im Aufriss als ein rechtwinkliges Netz von Horizontalen und Vertikalen sich dar-

stellt. Im Grundriss und Seitenriss erscheint die Projektion je als Strahlenbüschel mit Scheitelbüschel, durchschnitten von vertikalen, beziehungsweise horizontalen Linien.

Die Berührungsebene an der Fläche in einem ihrer Punkte ist bestimmt durch die beiden Erzeugenden H (die horizontale) und G (die geneigte), die durch den Punkt gehen. Denkt man sich den Punkt der Normalkugel, in dem sie von einer gleichgerichteten Ebene berührt wird, so findet sich, dass der horizontale Parallelkreis der Normalkugel in diesem Punkt eine Tangente parallel zur Linie H hat, und der senkrecht zum Grundriss stehende Parallelkreis in diesem Punkt eine Tangente parallel zur Linie G hat. Verschiedenen Punkten der Linie H entsprechen verschiedene horizontale, im Grundriss konzentrische Parallelkreise mit parallelen Tangenten, deren Berührungspunkte im Grundriss der Normalkugel auf einem zur Linie H senkrecht stehenden Radius erscheinen müssen, also im Raum auf einem vertikalen Meridian der Normalkugel liegen. Hieraus folgt: „Alle Lichtstufenpunkte für eine horizontale Erzeugende der windschiefen Fläche sind auf einem Meridian der Normalkugel zu suchen, dessen Vertikalebene senkrecht zu dieser Erzeugenden steht.“ In derselben Weise lässt sich ableiten, indem man sich die oben genannten vertikalen Parallelkreise in der Seitenansicht der Normalkugel gezeichnet denkt: „Alle Lichtstufenpunkte für eine geneigte Erzeugende der windschiefen Fläche liegen auf einem Grosskreis der Normalkugel, dessen Ebene normal steht zu der Erzeugenden.“ Man kann den einen oder andern Satz zur Konstruktion verwerten, im folgenden ist der erste gewählt.

Ein vertikalstehender Meridian, der in der vorherbeschriebenen Weise einer zu seiner Ebene senkrechten horizontalen Erzeugenden H der Fläche entspricht, schneidet die Lichtstufenlinien der Normalkugel in bestimmten Punkten. Durch jeden dieser Punkte ist ein vertikaler Parallelkreis der Kugel senkrecht zum Grundriss zu zeichnen; für jeden dieser Punkte ist ferner zu bestimmen, welche Neigung gegen die Horizontalebene die Tangente an diesem Parallelkreis in ihm darbietet. Sucht man die geneigte Mantellinie der windschiefen Fläche auf, welche mit dieser Tangente gleiche Neigung hat, so schneidet diese Mantellinie die ausgewählte horizontale Erzeugende H in einem Lichtstufenpunkt, der gleichnamig ist mit dem Punkt der Normalkugel, durch welchen der vertikale Parallelkreis gelegt worden ist.

Zur graphischen Durchführung der Konstruktion zeichnet man sich Aufriss und Seitenriss der Fläche mit vielen dichtstehenden geneigten Mantellinien bei wenigen horizontalen Erzeugenden, und fügt in der Seitenansicht zu jeder der ersteren eine Senkrechte, indem man diese Senkrechten gut getrennt hält und wie die Geneigten in der Vorderansicht numeriert. Die Meridiane zeichnet man nur im Grundriss der Normalkugel, wo sie als Radien erscheinen; die vertikalen Parallelkreise zeichnet man im Grundriss und in der Seitenansicht samt dem Lichtstufenpunkt, der auf jedem erscheint, indem man jedem Parallelkreis den Buchstaben der horizontalen Erzeugenden und die Nummer der Lichtstufe beifügt, zu welcher er gehört.

Dann sieht man zu, welche von jenen Senkrechten im Seitenriss der Fläche einem Radius nach einem Lichtstufenpunkt in einem Parallelkreis ganz oder annähernd parallel ist. Die zu der Senkrechten gehörige geneigte Erzeugende schneidet die zu dem Parallelkreis gehörige horizontale Erzeugende in einem Lichtstufenpunkt, der mit demjenigen auf dem Parallelkreis gleichnamig ist. Findet sich keine genau parallele Senkrechte für einen der Parallelkreisradien, so gestattet das Verfahren ein Einschätzen der Lichtstufenpunkte zwischen zweien der geneigten Mantellinien mit genügender Genauigkeit. Andernfalls hat man senkrecht zu diesem Radius eine Mantellinie der Fläche in deren Seitenriss zu ziehen und die Projektion dieser Mantellinie im Aufriss zu bestimmen.

Für die beschriebene Erzeugung der Fläche wird die Kurve $+4$ im Aufriss eine zum Lichtstrahl normale Gerade, im Grundriss eine Parabel, also im Raum eine Parabel, wie bei der andern Erzeugungsweise nach Art. 69e. Nach einem oberflächlichen Versuch scheint auch die Linie $+1,7$ im Aufriss eine Parabel zu werden, deren Scheitel gegen jene Gerade gerichtet ist; die Linien zwischen $+1,7$ und $+4$ scheinen im Aufriss Hyperbeln zu sein, zwischen beiden zuvorgenannten Linien gelegen, mit Scheitel gegen die Gerade und um so flacher werdend, je mehr sie sich ihr nähern. Zwischen dem hellsten Punkt und $+1,7$ dürften sich Ellipsen bilden, mit der grossen Achse senkrecht zur Geraden $+4$, und jenseits dieser Geraden für $-3,5 - 3$ und $-2,5$ u. s. f. wieder Hyperbeln mit Scheiteln gegen die Gerade; doch fällt die Linie $-1,7$ schon ganz ins Unendliche. Das ganze Lichtstufensystem hat im Aufriss eine Symmetralachse senkrecht zu $+4$, also in der Richtung der Lichtstrahlprojektion.

Der allgemeine Fall der windschiefen Fläche, bei welchem die zweite Richtebene nicht senkrecht zur Horizontalebene als der ersten Richtebene steht, wenn sie auch noch normal zur Vertikalebene bleibt, erfordert anstatt der Seitenprojektion der Fläche und der Parallelkreise eine Projektion beider auf die Richtebene, auf welcher sich die Parallelkreise wieder als Kreise darstellen; im übrigen ändert sich der Gang der Lösung nicht.

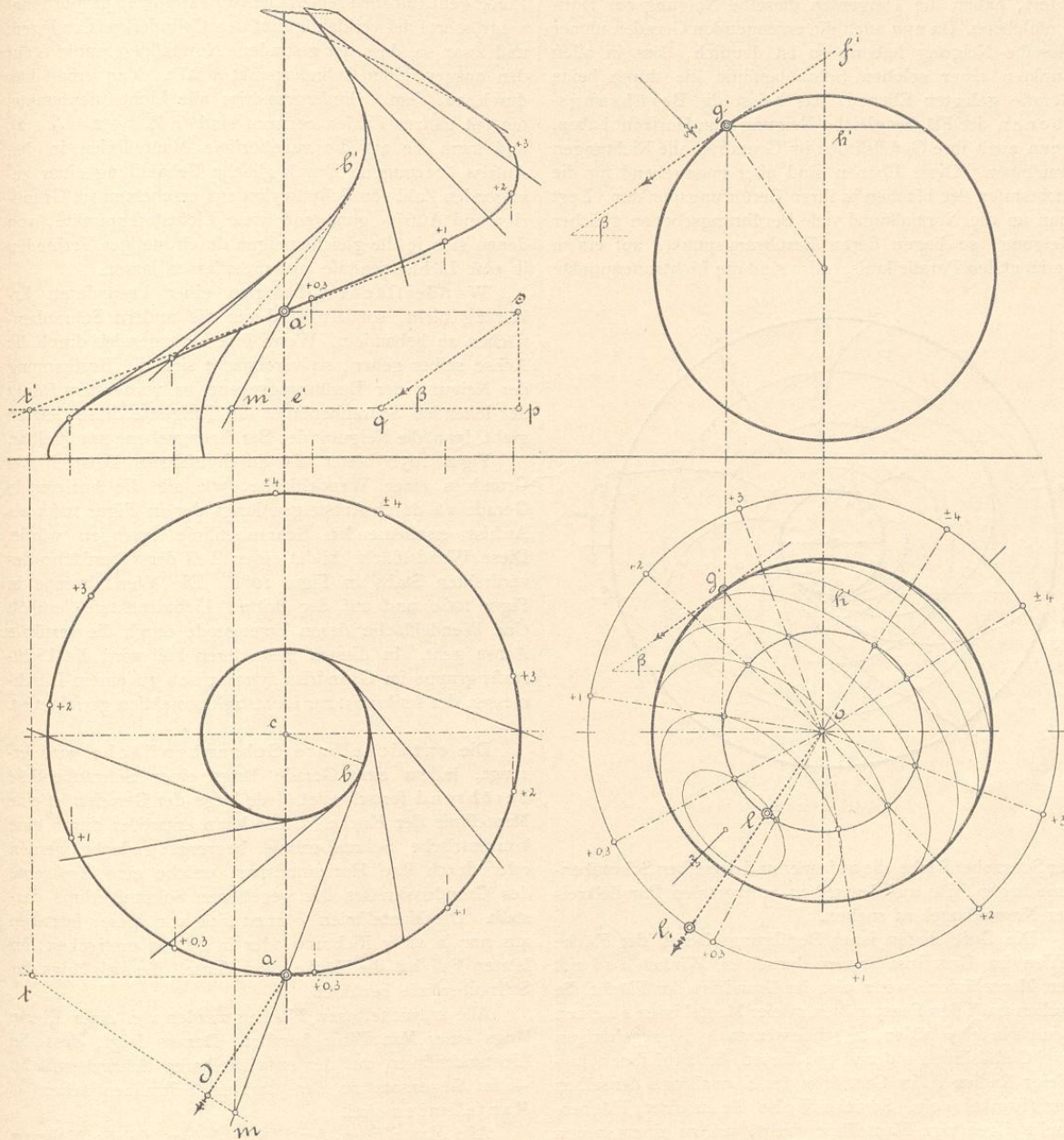
Schraubenflächen, Wendelflächen.

105.

Schrauben- und Wendelflächen sind in Art. 70 nach ihrer Entstehungsweise erklärt und als Gegenstände der Schattenkonstruktion behandelt. Zum Zweck enger Begrenzung der Anschauung mögen auch hier die Achsen der leitenden Schraubenlinien und also der Flächen selber vertikal gedacht werden (Figur 105a). Alle Arten von Schraubenflächen haben das Gemeinsame, dass sie von konzentrischen Kreiscylindern, deren Achsen mit denen der gegebenen Schraubenlinien zusammenfallen, nach Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe, aber verschiedenen Neigungen geschnitten werden. In einem beliebigen Punkt aa einer solchen Fläche ist die Berührungsebene bestimmt einerseits durch die erzeugende Gerade $aba'b'$, die durch den Punkt geht, andererseits durch die Tangente $ata't'$ an der Schraubenlinie, welche der durch den Punkt gelegte konzentrische Kreiscylinder als Schnitt mit der Fläche liefert.

Es ist also, sobald für einen beliebigen Punkt der Fläche die Projektionen dieser beiden Geraden bekannt sind, nur noch das Problem zu lösen: „Die Lichtstufe einer Ebene zu bestimmen, die durch die Projektionen

zonale Richtungslinie der Berührungsebene und die dazu Senkrechte ad der Grundriss der Gefällslinie. Im Dreieck spq ist $qp = ad$, $sp = a'e'$, also β der Neigungswinkel der Gefällslinie oder Berührungsebene. An den



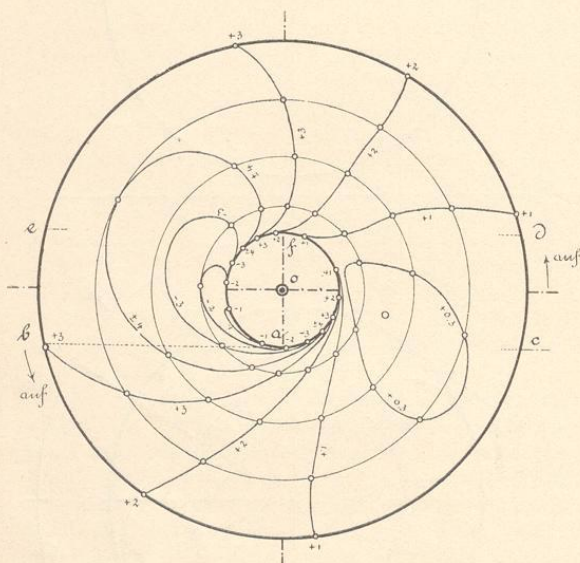
Figur 105a.

zwei sich schneidender Geraden gegeben ist.“ Diese Aufgabe ist in Art. 91 behandelt. Wenn in der Vertikalprojektion die beiden Geraden durch eine beliebige Horizontallinie $m'l'$ geschnitten und die Punkte $m'l'$ in den Grundriss nach mt gelotet werden, so ist mt die hori-

Aufriss der Normalkugel (oder an den zeitweilig als Aufriss aufgefassten Grundriss) ist eine Tangente $f'g'$ parallel zu sq zu ziehen, woraus der Radius $h'g'$ für den horizontalen Parallelkreis des Lichtstufenpunktes erhalten wird. Der im Grundriss in diesem Kreis parallel zu ad gezogene

Radius ol liefert den Lichtstufenpunkt l , der dem Flächenpunkt a entspricht.

In allen Punkten einer Schraubenlinie, die ein bestimmter Schnittcylinder der obengenannten Stellung liefert, haben die Tangenten dieselbe Neigung zur Horizontalebene. Da nun auch die erzeugenden Geraden immer dieselbe Neigung haben, so ist deutlich, dass in allen Punkten einer solchen Schraubenlinie die durch beide Gerade gelegten Ebenen, das heisst die Berührungsebenen der Fläche gleiche Neigung zum Horizont haben, wenn auch ihre Gefällslinien im Grundriss alle Richtungen annehmen. Diese Ebenen sind aber massgebend für die Lichtstufen der Flächen in ihren Berührungspunkten. Legt man an die Normalkugel viele Berührungsebenen gleicher Neigung, so liegen deren Berührungspunkte auf einem horizontalen Parallelkreis. Also sind die Lichtstufenpunkte



Figur 105 b.

der Schraubenfläche, die auf einer und derselben Schraubenlinie liegen, alle auf demselben horizontalen Parallelkreis der Normalkugel zu suchen.

Die Gefällslinien jener Berührungsebenen der Fläche bilden im Grundriss immer denselben Winkel dab mit den Mantellinien; wenn also im Grundriss der Fläche die Radien nach den Fusspunkten zweier Mantellinien ca einen Centriwinkel γ bilden, so schliessen auch die zugehörigen zwei Gefällslinien ad und mit diesen die zwei ihnen parallelen Radien ol im Grundriss der Normalkugel denselben Centriwinkel γ ein. Soviel sich also die zu einem Flächenpunkt a gehörige Mantellinie dreht, um zu einem neuen Flächenpunkt zu gelangen, soviel dreht sich auch im Grundriss der Normalkugel der Radius nach dem zu a gehörigen Lichtstufenpunkt, um zum Lichtstufenpunkt des neuen Flächenpunktes zu gelangen.

Aus beiden Betrachtungen ergibt sich der Grundgedanke der Konstruktion wie folgt: Wenn einer der obengenannten Schnittcylinder im Grundriss gezeichnet

und für einen Punkt aa' des Cylinders nach der zuvor gegebenen Vorschrift der gleichhelle Punkt l der Normalkugel in deren Grundriss bestimmt ist, so hat man nur den horizontalen Normalkugelparallelkreis, der durch diesen Punkt geht, mit allen seinen Lichtstufenpunkten proportional vergrössert oder verkleinert auf den Cylinderkreis zu legen, und zwar so, dass der gefundene Normalkugelpunkt l_1 auf den ausgewählten Cylinderpunkt a fällt. Man erhält hiedurch auf dem Cylindergrundriss alle Lichtstufenpunkte, die mit ganzen Zahlen benannt sind (z. B. $a + 2 = l_1 + 2$), und kann sie auf die zugehörigen Mantellinien in den Aufriss übertragen. Durch gleiche Behandlung einer genügenden Zahl von Schnittcylindern erscheinen im Grundriss und Aufriss genügend viele Lichtstufenpunkte, von denen sich je die gleichnamigen durch stetiges Verbinden in eine Lichtstufenlinie zusammenfassen lassen.

Wendelflächen bedürfen einer besonderen Erklärung nicht, sondern sind wie die andern Schraubenflächen zu behandeln. Wenn ihre Erzeugenden durch die Achse selber gehen, so vereinfacht sich die Bestimmung der Neigung der Berührungsebene im vordersten Punkt der leitenden Schraubenlinie; die Tangente dieser letzten giebt dann die Neigung der Berührungsebene unmittelbar.

Figur 105b bietet als durchgeführtes Beispiel den Grundriss einer Wendelfläche, wie sie die horizontale Gerade ab durch Aufsteigen längs der in Figur 106a als Aufriss erscheinenden Schraubenlinie erzeugen würde. Diese Wendelfläche bildet einen Teil der Oberfläche des verdrehten Stabs in Figur 106a. Die Wendeltreppe in Figur 106c und auf der dritten Lichtdrucktafel enthält eine Wendelfläche, deren Erzeugende durch die vertikale Achse geht. In diesem besonderen Fall wird die Lichtstufengruppe im Grundriss symmetrisch zu einem Durchmesser, der senkrecht zur Lichtstrahlprojektion gerichtet ist.

Die entwickelbare Schraubenfläche wird erzeugt, indem eine Gerade längs einer Schraubenlinie berührend fortschreitet. Jede Lage der Geraden ist eine Mantellinie der Fläche. Diese kann entweder durch eine konzentrische Schraubenlinie begrenzt gedacht werden oder durch ihre Horizontalspur, welche eine Evolvente des Grundrisskreises der gegebenen Schraubenlinie darstellt. Die Mantellinien können sich von dieser letzteren aus nur in einer Richtung oder in beiden erstrecken; im letzteren Fall hat die Fläche zwei Mäntel, die sich längs der Schraubenlinie berühren.

Alle entwickelbaren Flächen werden von einer Ebene längs einer Mantellinie berührt. Daraus folgt, dass die Lichtstufenlinien auf der entwickelbaren Schraubenfläche — im Gegensatz zu den übrigen Schraubenflächen — Mantellinien sind.

Alle Mantellinien der Fläche haben gleiche Neigung gegen die Horizontalebene und stehen im Grundriss normal zu der Evolvente, welche die Horizontalspur der Fläche darstellt. Daraus folgt, dass sich jede Mantellinie als ein sehr schmaler Ausschnitt des Mantels eines geraden vertikalen Kreiskegels auffassen lässt, dessen Mantellinien gleiche Neigung haben wie diejenigen der Schraubenfläche, und wie sich eine solche Mantellinie schattiert als

Bestandteil ihres Kegels, so schattiert sie sich auch als Bestandteil der Schraubenfläche.

Die Neigung der Mantellinien erscheint unmittelbar in den äussersten Mantellinien der Fläche im Aufriss; aus dieser Neigung ergibt sich der horizontale Parallelkreis der Normalkugel, auf welchem die Lichtstufenpunkte zu suchen sind. Zeichnet man den geraden vertikalen Kreiskegel, der die Normalkugel längs dieses Parallelkreises berührt, samt den Mantellinien dieses Kegels nach den Lichtstufenpunkten des Parallelkreises, so hat man nur im Aufriss der Schraubenfläche die gleichgerichteten Mantellinien zu ziehen, um in ihnen die gleichnamigen Lichtstufenlinien der Fläche zu erhalten. Will man sie zuerst oder nur im Grundriss haben, so zieht man im Grundriss der Normalkugel die Radien des Parallelkreises nach dessen Lichtstufenpunkten und dann die dazu parallelen Mantellinien der Fläche in deren Grundriss. Bei der Fläche mit zwei Mänteln ist eine Lichtstufenlinie des unteren nicht auch eine gleichnamige Linie des oberen, weil bei jenem die Spitze des Hilfskegels nach oben, bei diesem nach unten gerichtet ist.

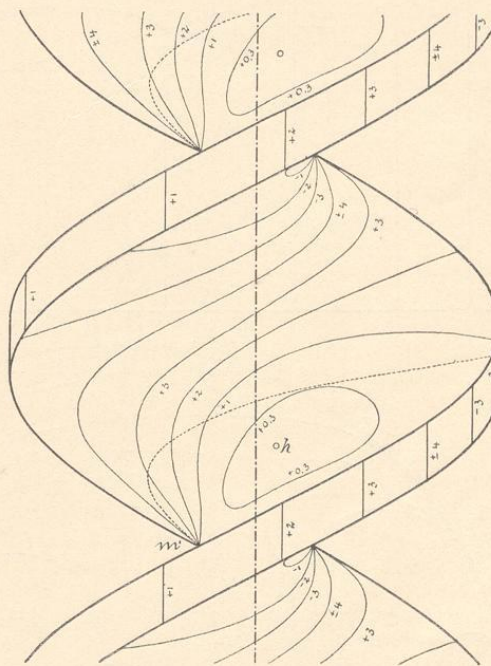
106. Stabformen mit drehend fortschreitendem Querschnitt oder Achsenschnitt. Ringförmig steigendes Tonnengewölbe.

Ein (wagrecht gedachtes) regelmässiges oder unregelmässiges Vieleck, oder ein Rechteck, oder ein Vieleck, dessen gerade Seiten durch bogenförmige konkave oder konvexe Linien ersetzt sind, rückt auf einer senkrecht zu seiner Ebene stehenden Achse derart parallel fort, dass seine Ecken Schraubenlinien beschreiben. Derartige Gebilde sind in der spätgotischen und späromanischen Architektur, ferner in den Arbeiten des Drehers und Kunstschlossers, endlich im Maschinenbau verwirklicht. Für konkave schraubend fortschreitende Linien können etwa Säulen mit gewundener Kannellierung als Beispiele dienen.

Sind die Seiten der beweglichen Figur gerade, so beschreiben sie Wendelflächen, und die Lichtstufenlinien lassen sich dann konstruieren wie oben in Art. 105 beschrieben, sobald eine genügende Zahl von Punkten (worunter der Halbierungspunkt) auf der Polygonseite angenommen und die Neigungen der von diesen Punkten beschriebenen Schraubenlinien bestimmt worden sind. Für die Halbierungspunkte werden die Berührungsebenen vertikal, und die Lichtstufenpunkte finden sich auf dem horizontalen Grosskreis der Normalkugel ganz wie für einen Cylinder vom gleichen Durchmesser wie die von den Halbierungspunkten beschriebene Schraubenlinie.

In Figur 106a erscheinen die Lichtstufenlinien einer Stabform, welche entsteht, wenn das in Figur 105b dargestellte Rechteck $b c d e$ mit zwei geraden und zwei bogenförmigen Seiten sich schraubend um die vertikale Achse o dreht. Die geraden Seiten beschreiben Wendelflächen, die bogenförmigen eine Cylinderfläche mit vertikalen Lichtstufenlinien. Da der Grundriss Figur 105b nur die vom Arm $a b$ beschriebene Wendelfläche darstellt, so gilt dieser Grundriss nur für diejenige Hälfte der im Aufriss

sichtbaren Wendelfläche, die links von der durch den Punkt a beschriebenen Schraubenlinie liegt und im Aufriss als Unterfläche auftritt. Die vom Arm $a c$ beschriebene, von oben sichtbare Hälfte der im Aufriss erscheinenden Wendelfläche folgt einem zweiten Grundriss, der aus Figur 105b durch deren Umlegen um einen zur Lichtstrahlprojektion senkrechten Durchmesser abgeleitet werden kann. Der von oben sichtbare Teil der von $a b$ beschriebenen Fläche ist im Aufriss immer durch die von $a c$ erzeugte Fläche verdeckt, ebenso der von unten sichtbare Teil der von $a c$ beschriebenen Fläche durch die von $a b$ erzeugte. Auf der zweiten Lichtdrucktafel erscheint das Gebilde mit Lichtstufen schattiert.



Figur 106a.

Für diejenigen Stabformen, deren Horizontalschnitte bogenförmig konkave oder konvexe Seiten haben, kann folgende Betrachtung den Weg weisen. Zieht man durch einen Punkt eines (etwa konkav gedachten) Bogens in irgend einem Horizontalschnitt eine Tangente, so ist die Berührungsebene der schraubenförmigen Hohlkehlenfläche in diesem Punkt einerseits bestimmt durch diese horizontale Tangente, andererseits durch die geneigte Tangente an der Schraubenlinie, die der ausgewählte Punkt beschreibt. Bei der Bewegung des Punktes erzeugt die horizontale Tangente eine Wendelfläche. Wie nun auf der Schraubenlinie die Lichtstufenpunkte erscheinen als auf einem Bestandteil dieser Wendelfläche, so erscheinen sie auch, wenn die Schraubenlinie als Bestandteil der schraubenförmigen Hohlkehle aufgefasst wird.

Die Lichtstufenpunkte auf einer solchen Schraubenlinie sind also wie bei den früher betrachteten Schraubenflächen alle auf demselben horizontalen Parallelkreis der

noch flacher, die Tangenten aber wieder steiler. Zuerst überwiegt die Wirkung jener; die Neigungen der Berührungsebenen nehmen auch ein Stück weit vom Scheitel nach auswärts noch ab, erreichen aber schon nahe dem Scheitel ein Minimum; von diesem Punkt an überwiegen die steiler werdenden Tangenten und die Neigungswinkel der Ebenen nehmen wieder zu. Der Einfluss der Minimalneigung auf die Lichtstufenlinien ergibt sich aus folgender Betrachtung. Wird die Neigung der Berührungsebene ein Minimum, so wird in Figur 105 a der Radius $g'h'$ oder $o'l$ ein Minimum. Denkt man sich den Grundriss in Figur 105 a

rechts unten für diesen Fall gezeichnet, so berührt der Parallelkreis eine Lichtstufenlinie von aussen und eine andere von innen (und zwar erweist sich jene im vorliegenden Beispiel als $+0,6$, diese als $-3,15$); bei allen früheren und allen späteren Grössen des Kreises ρl erscheinen mit den Lichtstufenellipsen $+0,6$ und $-3,15$ zwei Schnittpunkte, wonach auf allen Schraubenlinien innerhalb und ausserhalb derjenigen mit der Minimalneigung der Berührungsebene zwei Lichtstufenpunkte mit $+0,6$ und zwei solche mit $-3,15$ erscheinen müssen, auf dieser letzten Schraubenlinie aber nur ein Punkt $+0,6$ und $-3,15$ auftreten kann. Damit sind die zwei Kreuzungspunkte begründet.

Die Uebertragung der im Grundriss gefundenen Lichtstufenlinien in die Aufrisse geschah mit Hilfe des von den

Schraubenlinien und Radialschnittlinien gebildeten Netzes, das im Grundriss in konzentrischen Kreisen und deren Radien erscheint und auch zur Schlagschattenkonstruktion dient. Die Vertikalfächen der Stufen sind Beispiele für die Lichtstufenbestimmung verschieden gerichteter vertikaler Ebenen; die Wendelfläche zwischen Spindel und Stufen ist schon in Art. 105 erwähnt; im übrigen erscheinen nur noch vertikale Cylinderflächen.

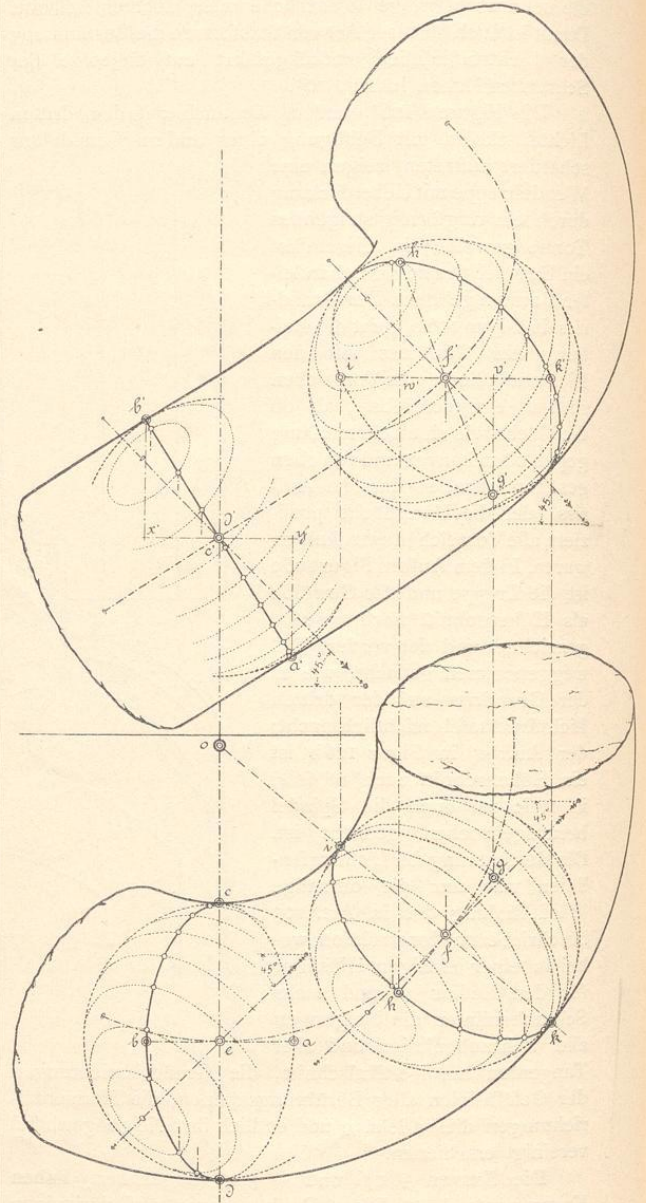
Die Schlagschattengrenzen auf beiden Arten von schraubend verdrehten Stabformen lassen sich in erster Linie durch das allgemeine Verfahren für gekrümmte Flächen bestimmen. Sobald für die ausgewählten Punkte der horizontalen, beziehungsweise vertikalstehenden erzeugenden geraden oder gekrümmten Linien in Grundriss und Aufriss die Schraubenlinien gezeichnet sind, welche diese Punkte bei Erzeugung der Fläche beschreiben, so lassen sich entweder im Grundriss vertikalstehende Schnittebenen oder im Aufriss vertikalprojizierende Schnittebenen parallel zur Lichtrichtung annehmen und deren Schnittpunkte mit den Schraubenlinien aus einer Projektion in die andere übertragen. Wo die hiedurch erhaltenen Schnittkurven stark schiefwinklige Schnitte ergeben, geht man von den horizontalprojizierenden Schnittebenen zu vertikalprojizierenden über oder umgekehrt. Die Schlagschattengrenzen des ringförmig steigenden Gewölbes sind ausschliesslich mit Vertikalschnitten bestimmt; ein anderes Verfahren ist hier kaum möglich. Für den verdrehten Stab in Figur 106a wurden oben vertikalprojizierende Schnittebenen, unten vertikalstehende verwendet. Die selbständige Bestimmung der Körperschattengrenzen aus diesen Schnittkurven, die als Problem der Schattenkonstruktion verlangt sein kann, ohne dass die übrigen Lichtstufenlinien mitzukonstruieren sind, leidet an der grossen Unsicherheit in der Bestimmung der Berührungspunkte.

Wo die Stabform durch die Bewegung gerader Linien erzeugt wird, also Wendel- und Schraubenflächen entstehen, lässt sich die Schlagschattengrenze oft rascher dadurch erhalten, dass man auf einer Horizontalebene (oder der vertikalen Grundebene) sowohl den Schlagschatten der schattenwerfenden Randkurve als diejenigen einer Anzahl von Erzeugenden zeichnet, auf welchen die Schlagschattengrenze zu vermuten ist. Wo der Schlagschatten der Randkurve den Schlagschatten einer Erzeugenden schneidet, da ist der gemeinschaftliche Schlagschattenpunkt derjenigen Punkte beider Raumlinien, die einander in Schatten setzen, und ein durch diesen Schlagschattenpunkt rückwärts bis zur Erzeugenden gezogener Lichtstrahl liefert auf dieser einen Punkt der Schlagschattengrenze auf der Fläche. Für den unteren Teil der Schlagschattengrenze in Figur 106a, der anderweitig unsicher zu bestimmen ist, wurden zur Probe die Schlagschatten der Randkurve und einiger Erzeugenden auf der Horizontalebene des Punktes m' zu Hilfe genommen.

107. Die schraubenförmige Röhre oder Wulstfläche und andere Röhrenflächen mit kreisförmigem Normalschnitt.

Diese Fläche wird nach Art. 71 erzeugt als Umhüllungsfläche aller Lagen einer unveränderlichen Kugel,

deren Mittelpunkt auf einer Schraubenlinie fortschreitet. In den Figuren 107abc ist die Achse dieser Schraubenlinie vertikal. Jede Lage der Kugel berührt die Fläche nach einem Kreis, der zugleich ein Grosskreis der Kugel und ein Normalschnitt der Röhrenfläche ist, das heisst,



Figur 107 a.

dessen Ebene normal steht zu einer Tangente, die im Mittelpunkt des Kreises an die leitende Schraubenlinie gezogen wird. Da die Neigung der Tangente an einer vertikalstehenden Schraubenlinie überall dieselbe ist, so ist auch die Neigung der Ebenen solcher Berührungs- oder Schnittkreise überall dieselbe.

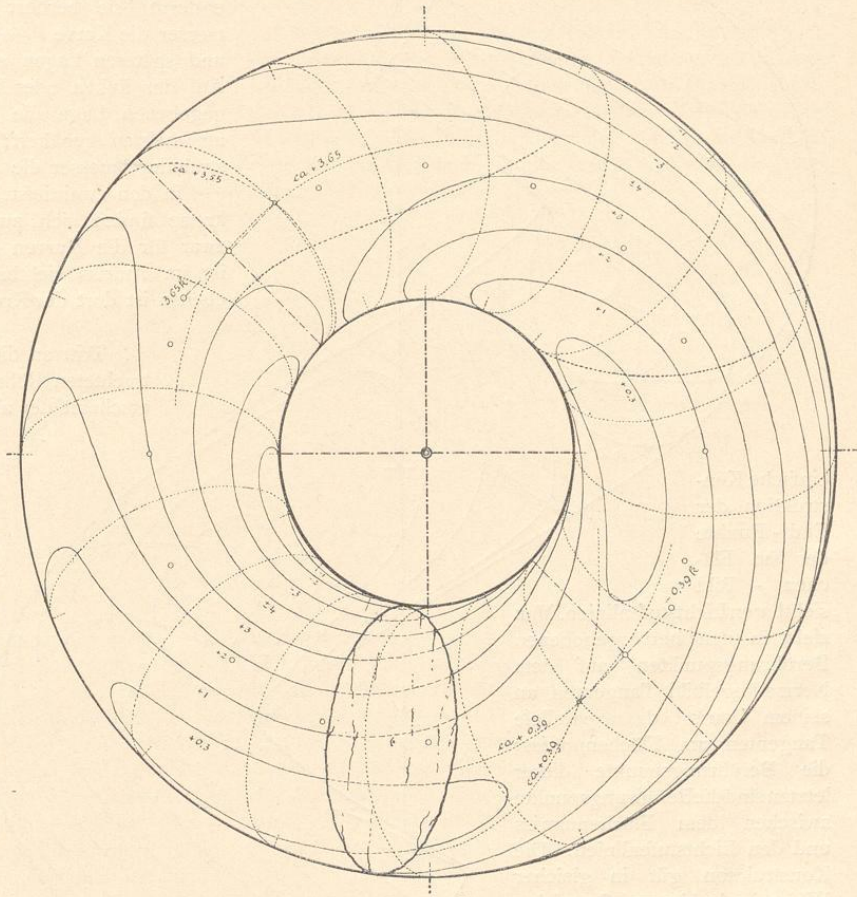
Hieraus folgt zunächst, dass die elliptischen Grundrisse $acbd$ (Figur 107a) aller solchen Schnittkreise kongruent und zwar mit der grossen Achse gegen den Mittelpunkt gerichtet sein müssen. Das Achsenverhältnis dieser Ellipsen ergibt sich, indem man den ersten Normalschnitt der Röhre so durchführt, dass er sich im Aufriss als gerade Linie $a'b'$ projiziert, das heisst an einem Punkt, in welchem die schraubenlinienförmige Röhrenachse eine Tangente parallel zur Vertikalebene hat. Teilt man nun den Grundrisskreis in eine bestimmte Zahl gleicher Teile und zeichnet für jeden Teilungspunkt f den zugehörigen Aufrisspunkt f' und die Grundrissellipse $gihk$ kongruent $acbd$, so lassen sich die zugehörigen Aufrissellipsen in folgender Weise rasch erhalten. Man zieht für jede Ellipse die Projektionslote durch die Punkte $gihk$. Die Endpunkte des horizontalen Durchmessers i' und k' liegen im Aufriss ebenso hoch wie f' ; für die Endpunkte des Durchmessers grösster Neigung $h'k'$ ist $w'h' = v'g' = x'b' = y'a'$ aufzutragen, weil infolge der gleichen Neigung aller Normalschnittkreise deren höchste und tiefste Punkte immer gleichviel über und unter ihrem Mittelpunkt liegen. $i'k'$ und $h'g'$ sind konjugierte Durchmesser der Aufrissellipse, aus welcher diese nach Art. 68d abgeleitet werden kann.

Sind in dieser Weise alle Normalschnittkreise in Grundriss und Aufriss gezeichnet, so gelangt folgender Grundgedanke für die Bestimmung der Lichtstufenpunkte zur Verwertung: „Wo auf dem Berührungskreis zwischen einer Lage der erzeugenden Kugel und der Röhrenfläche die Lichtstufenpunkte für die Kugel gelegen sind, da liegen sie auch für die Röhrenfläche.“ Zeichnet man die Umhüllungskugel selbst als Normalkugelgrundriss und -Aufriss mit allen Lichtstufenlinien auf Pauspapier, so lässt sich jedes solche Kugelbild im Grundriss, beziehungsweise Aufriss derart auf die Ellipse eines jeden Schnittkreises legen, dass die Lichtstufenpunkte unmittelbar auf die durchscheinende Ellipse als deren Schnitte mit den Kugellichtstufenlinien durchgestochen werden können. Hiezu gehört nur, dass der Mittelpunkt des Normalkugelbildes immer auf den Mittelpunkt der Ellipse fällt und dass in Grundriss und Aufriss der ursprünglich der Lichtrichtung entsprechende Kugelbilddurchmesser in jeder neuen Lage genau gleichgerichtet bleibt (wie es in Figur 107a durch die Durchmesser mit Pfeilen angedeutet ist).

Ohne die arbeitsparende Benützung des Pausblattes

wäre für jeden Normalschnitt der Fläche die elliptische Projektion des Grosskreises der Normalkugel aufzusuchen, welche nach Achsenverhältnis und Richtung der grossen Achse mit dem Normalschnitt übereinstimmt. Von dieser Projektion wären die Schnittpunkte mit den Lichtstufenlinien durch proportionale Vergrösserung oder Verkleinerung aller Masse auf den Normalschnitt zu übertragen.

In den Figuren 107b und c sind die Lichtstufenlinien der Fläche samt den Normalschnittlinien und Schlag-schattengrenzen in Grundriss und Aufriss gezeichnet und



Figur 107b.

zwar für eine Röhre, welche derjenigen in Figur 71a bis d kongruent oder ähnlich ist. Die Schlag-schattengrenzen, deren Konstruktion in Art. 71 besprochen ist, sind aus diesen Figuren herübergenommen. Auf dem zweiten und dritten Lichtdruckblatt erscheint dieselbe schraubenförmige Röhre mit den Lichtstufen schattiert.

Das Kugelbild erreicht in seiner Bewegung im Grundriss und Aufriss bestimmte Lagen, in welchen es den Umriss der Fläche mit einem der in Figur 88b durch Ringe hervorgehobenen Berührungspunkte zwischen seinen Lichtstufenellipsen und seinem eigenen Umriss berührt. In einem solchen Punkt haben also Kugelumsriss und Flächenumsriss eine gemeinschaftliche Tangente; zugleich

ist der Punkt ein Lichtstufenpunkt der Fläche, weil er der Endpunkt der grossen Achse der Projektion des Berührungskreises zwischen Fläche und Kugel sein muss, also im Raum auf diesem Kreis selber liegt. Hieraus folgt eine

+ 3,65; sie sind in Figur 107 b punktiert eingetragen. Hier finden sich jedoch diese Punkte einfacher; sie sind die höchsten Punkte derjenigen Normalschnittkreise, deren horizontaler Durchmesser im Grundriss senkrecht zur Lichtstrahlprojektion stehen. Dies folgt aus der Betrachtung der Lagen, welche im Grundriss der beweglichen Normalkugel die Schnittellipse gegenüber den Lichtstufenlinien annehmen kann. Auf der rechten oder vorderen Hälfte der Röhrenfläche hat sich in der angegebenen Lage die Schnittellipse am meisten vom hellsten Punkt entfernt; sie berührt hierbei auf dem Lichtstrahldurchmesser die Kurve $ca + 0,39$ von aussen; in allen früheren und späteren Lagen schneidet sie diese Kurve zweimal. Auf der linken oder hinteren Hälfte hat sich in der angegebenen Lage die Schnittellipse dem hellsten Punkt am meisten genähert; sie berührt dann auf dem Lichtstrahldurchmesser die Kurve $ca + 3,65$ von innen.

In den zwei tiefsten Punkten derselben Normalschnittkreise finden sich zwei weitere Kreuzungspunkte, und zwar für die Kurven $ca - 0,39$ und $- 3,65$. Der letzte ist im Aufriss sichtbar und mit $- 3,65 k'$ bezeichnet; ebenso ist dort der Kreuzungspunkt $+ 0,39 k'$ eingetragen.

Tritt an die Stelle der Schraubenlinie der betrachteten Röhre eine beliebige andere Kurve, so erscheint der allgemeine Fall der Röhre mit kreisförmigem Normalschnitt.

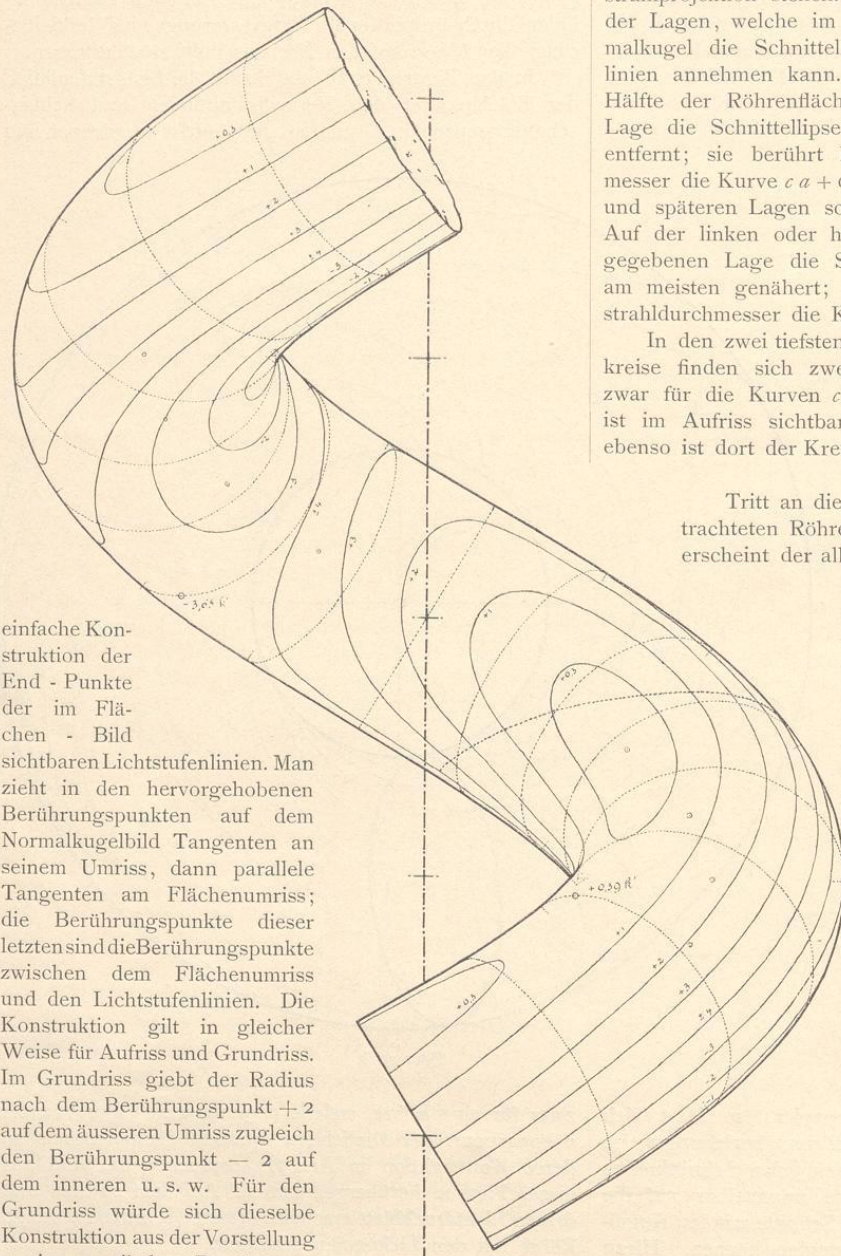
Auch dieser Fall kann immer als Umhüllungsfläche aller Lagen einer beweglichen unveränderlichen Kugel aufgefasst werden, deren Mittelpunkt auf der Kurve fortschreitet. Als Beispiel mit gewundener Kurve des Fortschreitens ausser der Schraubenlinie wurde schon in Art. 71 der Rundstab eines Bogengesimses auf cylindrischer Wandfläche genannt; weit häufiger ist die Verwirklichung der Fläche mit ebenen Kurven als Röhrenachsen.

Zur Bestimmung der Lichtstufenlinien führt am raschesten die oben bei der Schraubenröhre durchgeführte Betrachtung des Normalschnittkreises als der Berührungslinie der rückenden Kugel und die Bestimmung der Lichtstufenpunkte auf diesem Kreis der Kugel. An die beliebig gekrümmte Achse der Röhre sei in einem bestimmten Punkt pp' eine Tangente $ab a' b'$ gezogen worden. Man hat dann

auf der Umhüllungskugel in pp' den Kreis zu zeichnen, dessen Ebene normal zu dieser Tangente steht. Diese Aufgabe ist in Art. 71 gelöst; auch kann für den vorliegenden Fall die dort gezeichnete Figur 71e unverändert

einfache Konstruktion der End - Punkte der im Flächen - Bild sichtbaren Lichtstufenlinien. Man zieht in den hervorgehobenen Berührungspunkten auf dem Normalkugelbild Tangenten an seinem Umriss, dann parallele Tangenten am Flächenumriss; die Berührungspunkte dieser letzten sind die Berührungspunkte zwischen dem Flächenumriss und den Lichtstufenlinien. Die Konstruktion gilt in gleicher Weise für Aufriss und Grundriss. Im Grundriss giebt der Radius nach dem Berührungspunkt $+ 2$ auf dem äusseren Umriss zugleich den Berührungspunkt $- 2$ auf dem inneren u. s. w. Für den Grundriss würde sich dieselbe Konstruktion aus der Vorstellung zweier vertikaler Berührungscylinder der Fläche ableiten lassen.

Wie bei dem ringförmig steigenden Tonnengewölbe in Figur 106b und in derselben Thatsache begründet wie dort erscheinen im Grundriss der Röhrenfläche zwei Lichtstufenlinien mit Kreuzungspunkten, nämlich $ca + 0,39$ und



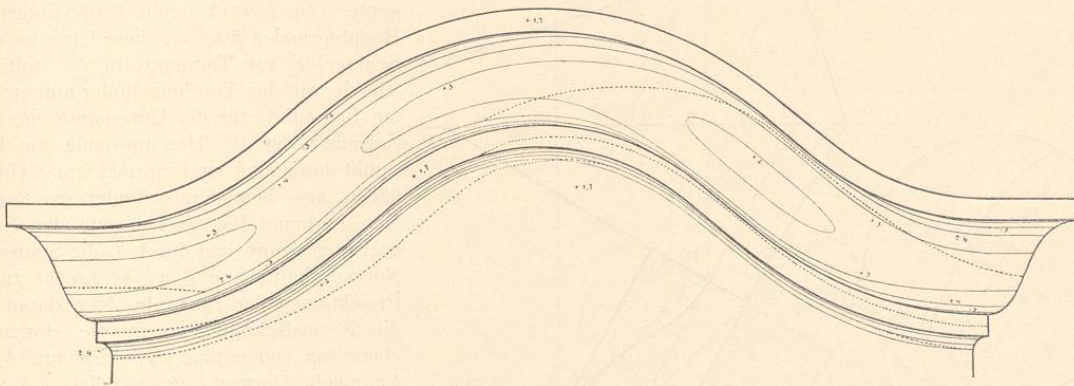
Figur 107c.

gelten. Die Ellipsen, deren grosse Achsen senkrecht zu den Tangentenprojektionen ab und $a'b'$ stehen, sind die Projektionen des Normalschnittkreises der Röhre im Punkt p . Die Ellipsen benützt man wie bei der schraubenförmigen Röhre. Legt man auf die Aufrissellipse den Aufriss einer Normalkugel, deren Durchmesser gleich dem der Röhre ist, und auf die Grundrissellipse den Grundriss derselben Normalkugel auf Pauspapier gezeichnet, so lassen sich wieder die Lichtstufenpunkte auf die durchscheinenden Ellipsen als deren Schnittpunkte mit den Kugellinien durchstechen. Hiezu gehört wieder, dass der Mittelpunkt des Normalkugelbildes auf den Mittelpunkt der Ellipse fällt, und dass in Grundriss und Aufriss der ursprünglich der Lichtstrahlprojektion entsprechende Kugelbilddurchmesser genau gleich gerichtet bleibt. Wenn in den beiden Kugelbildern der Figur 71 e zu den schon vorhandenen Schatten Grenzen oder Kurven ± 4 die andern Lichtstufenlinien hin-

Eine mit anderer Grösse gegebene Normalkugel kann man in derselben Weise unmittelbar benützen, indem man die auf ihren Durchmessern erhaltenen Einteilungen durch proportionales Verkleinern oder Vergrössern den Normalschnitten der Fläche anpasst.

Die Röhrenfläche mit beliebigem Normalschnitt; 108.
geschweifte Gesimse auf ebener und gekrümmter Wand. Die Röhrenfläche mit veränderlichem Normalschnitt.

Dieser allgemeine Fall der Röhrenfläche entsteht nach der früher (in Art. 71) gegebenen Erklärung, wenn eine beliebige unveränderliche gekrümmte oder zusammengesetzte ebene Linie auf einer beliebigen Leitlinie derart fortschreitet, dass ihre Ebene immer normal zur Leitlinie steht und ein bestimmter Punkt in ihr immer auf der Leit-



Figur 108a.

zugesucht werden, so bringt sie auch diesen zweiten Teil der Konstruktion vollständig zur Anschauung.

Die Konstruktion vereinfacht sich wesentlich, wenn die Röhrenmittellinie eine ebene Kurve parallel zu einer Grundebene, etwa zur Vertikalebene wird, weil dann in der Projektion auf diese Grundebene alle Normalschnitte geradlinig werden. Die Lichtstufenpunkte ergeben sich in diesem Fall, ähnlich wie nach Figur 58 die Körperschattenpunkte des Wulstes, äusserst einfach und ohne Benützung eines Grundplans, indem der Aufriss der Normalkugel mit dem Durchmesser der Röhre einmal gezeichnet und mit Durchmessern parallel zu den ausgewählten Normalschnitten versehen wird. Jede Normalschnittlinie im Aufriss der Fläche ist dann ebenso einzuteilen, wie der ihr parallele Durchmesser durch die Lichtstufenlinien der Kugel eingeteilt ist. Figur 58 kann auch diese Konstruktion vollständig zur Anschauung bringen, wenn an die Stelle der nur mit Körperschatten versehenen Kugel die Normalkugel und an die Stelle der kreisförmigen Mittellinie des Wulstes eine Ellipse oder beliebige andere ebene Kurve gesetzt wird. Die Bestimmung der Lichtstufenlinien eines kreisförmigen oder elliptischen oder sonst wie eben gekrümmten Wulstes ist hienach eine der einfachsten Aufgaben der Beleuchtungskunde.

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

linie bleibt. Dabei darf sich die bewegliche Linie auch nicht in ihrer eigenen Ebene verdrehen, das heisst, es muss bei einer eben gekrümmten Leitlinie immer dieselbe Sehne der beweglichen Linie in der Ebene der Leitlinie bleiben, und bei einer doppelt gekrümmten Leitlinie immer dieselbe Sehne der beweglichen Linie in die Schmiegungeebene der Leitlinie fallen; mit andern Worten, die bewegliche Linie muss immer dieselbe Lage gegenüber der „Hauptnormalen“ der Leitlinie beibehalten.

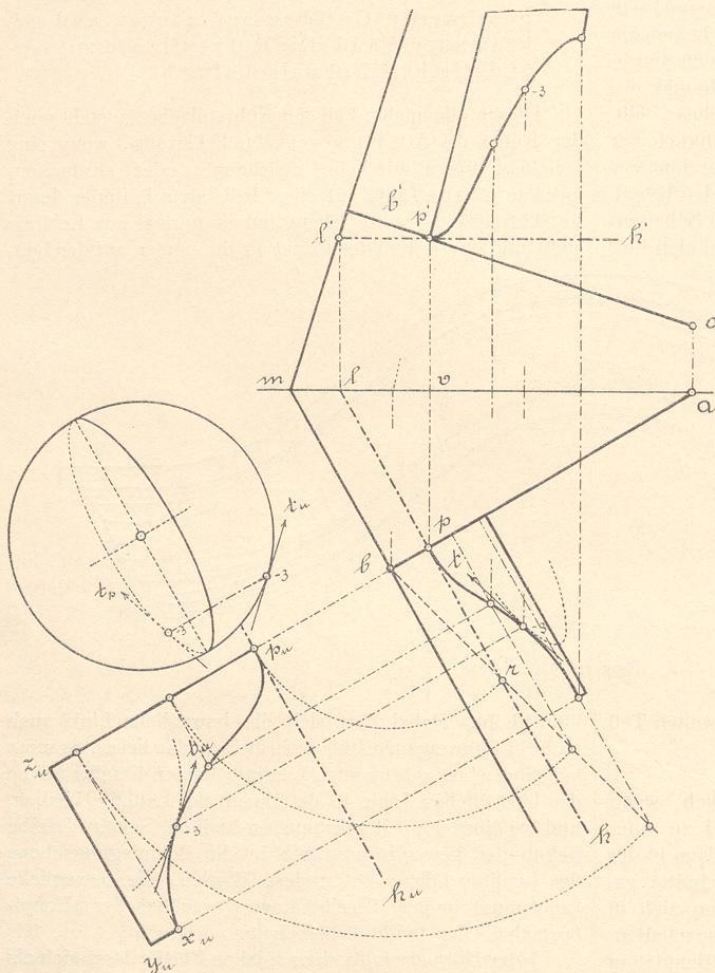
Jeder Normalschnitt einer solchen Fläche lässt sich als eine niedrige Zone eines Cylinders vom selben Normalschnitt auffassen, dessen Mantellinien parallel sind der Tangente an der Kurve des Fortschreitens in dem Punkte des Normalschnitts. Auf diesem Cylinder bestimmen sich die Lichtstufenpunkte nach Art. 99.

Als Beispiel mit einer eben gekrümmten Leitlinie ist auch hier (Figur 108a) eine Röhrenfläche parallel zur Vertikalebene, und zwar das geschweifte Gesims auf vertikaler Wand aus Figur 72a gewählt, dessen Normalschnitte sich im Aufriss als gerade Linien projizieren. Zu einem solchen Normalschnitt zieht man im Aufriss der Normalkugel einen parallelen Durchmesser und klappt sowohl den mit seinen Lichtstufenpunkten versehenen Grosskreis, den dieser Durchmesser darstellt, als die Profilinie der Röhrenfläche, welche durch den Normalschnitt dargestellt

ist, in die Vertikalebene um. Ist nun auf der umgeklappten Normalschnittprofilinie der Lichtstufenpunkt + 3 zu suchen, so zieht man an den umgeklappten Grosskreis eine Tangente im Lichtstufenpunkt + 3, dann an die Profilinie eine parallele Tangente. Der Berührungspunkt dieser letzten ist der gesuchte Lichtstufenpunkt; er ist noch auf den Normalschnitt im Aufriss zurückzuklappen. Auf Grund

dieser Grosskreis ganz ebenso bestimmt werden, wie für den Normalschnitt der doppeltgekrümmten kreisrunden Röhre in Art. 71 und 107 angegeben (Figur 71 e), indem man sich wie dort die Normalkugel in den Punkt pp' versetzt vorstellt.

Der zweite Teil der Lösung hat für den ausgewählten Punkt pp' der Leitlinie (Figur 108 b) mit Hilfe der beiden



Figur 108 b.

der gefundenen Lichtstufengruppe ist das Gesims auf der zweiten Lichtdrucktafel schattiert.

Ist die Leitlinie eine doppeltgekrümmte, wie etwa bei dem Glockenleiten als Bestandteil eines Bogengesimses auf cylindrischer Wandfläche, so wird die Bestimmung der Lichtstufenlinien sehr zeitraubend; doch mag sie als theoretisch interessant hier einigen Raum finden. Die Lichtstufen für jeden Normalschnitt sind auch in diesem Fall auf einem Grosskreis der Normalkugel zu suchen, dessen Ebene derjenigen des Normalschnitts parallel ist. Sobald die beiden Projektionen $ab a' b'$ der Tangente an der Leitlinie im ausgewählten Punkte pp' gezeichnet sind, kann

Projektion $ab a' b'$ der Tangente in diesem Punkt die zwei Projektionen der Normalschnittprofilinie zu zeichnen, wobei die Raumgestalt dieser Linie und ihre Lage zur Hauptnormalen der Leitlinie als gegeben voraussetzen sind; diese letzte muss als gerade Linie $p_u h_u$ dem Normalschnittprofil der Röhrenfläche $p_u x_u y_u z_u$ beigezeichnet sein. Für den ausgewählten Punkt pp' der Leitlinie müssen gezeichnet sein beide Projektionen der Tangente $ab a' b'$ und beide Projektionen der Hauptnormalen $ph p' h'$; diese letzte muss als Senkrechte zur Tangente in pp' auftreten. (Bei der auf den Vertikalcyliner aufgewickelten Bogenlinie für die Unterkante eines Gesimsglieds ist die Hauptnormale für jeden Punkt horizontal und normal zur Cylinderfläche, also beim Kreiscylinder ein Radius.) Man bestimmt die Vertikalspur der Hauptnormalen l' und legt durch l' die Spuren der Normalschnittebene $l' m b$ senkrecht zu den Projektionen der Tangente. Nun klappt man die Normalschnittebene in die Horizontalebene um, indem man $pr = vp'$ und $bp_u = br$ macht, ferner $p_u h_u$ parallel mb zieht. $p_u h_u$ ist die Umklappung der Hauptnormalen; an diese Linie wird das Profil der Röhrenfläche so angefügt wie beide Linien gegeben sind. Das Zurückklappen führt in bekannter Weise zu beiden Projektionen der Normalschnittprofilinie.

Der dritte Teil der Lösung, das Bestimmen der Lichtstufen, wird am besten mit Hilfe der Umklappung erhalten. Man legt neben das umgeklappte Profil den samt seinen Lichtstufenpunkten um dieselbe Fusslinie mb in die Horizontalebene umgeklappten Grosskreis aus dem ersten Teil der Lösung. Im Lichtstufenpunkt - 3 des Grosskreises zieht man

eine Tangente t_u , dazu eine parallele Tangente t_n an die Profilinie; der Berührungspunkt dieser letzten ist der Lichtstufenpunkt - 3 in der Umklappung; er ist samt den andern Punkten der Profilinie in die Projektionen zu übertragen. — Auch an den Projektionen des Grosskreises und der Profilinie unmittelbar können die parallelen Tangenten gezogen werden, wofür die Ellipse mit der Tangente tp und am Grundriss der Normalschnittlinie die Tangente t eingezeichnet sind. Doch ist dieser kürzere Weg weniger zuverlässig.

Röhrenflächen mit veränderlichem Normalschnitt, wie sie in Art. 73 erklärt und durch Figur 73 vertreten sind, bilden schwierigere Probleme der Beleuchtungskunde. Das

in der genannten Figur dargestellte Gebilde ist als Gegenstand eines allgemeinen Verfahrens für die Lichtstufenbestimmung auf gekrümmten Flächen in Art. 112 behandelt.

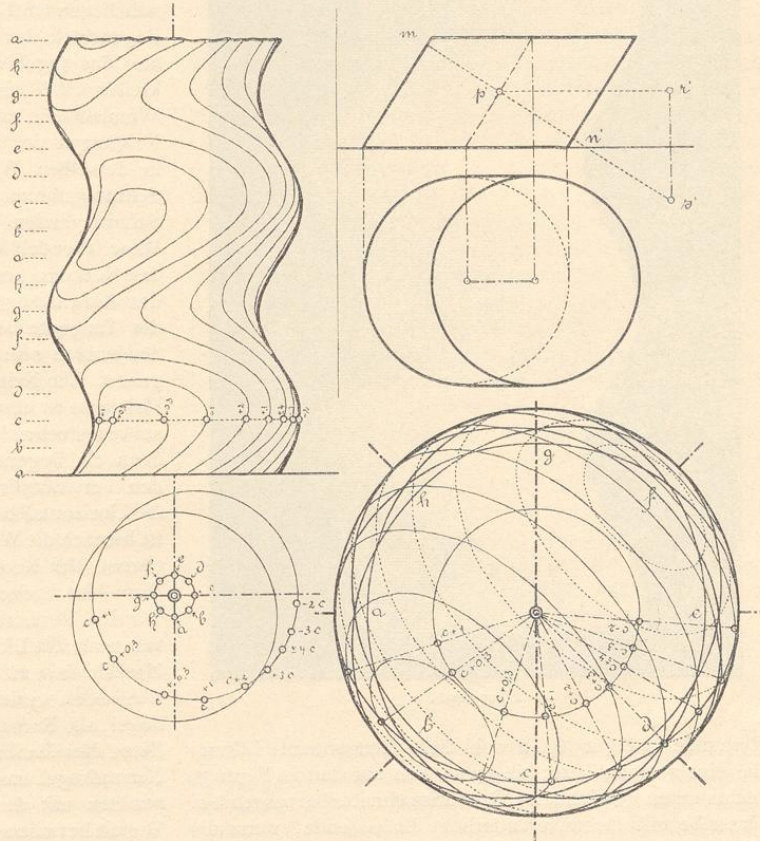
109. Die Rückungsflächen. Die gewundene Säule.

Diese Flächen sind nach ihren Erzeugungsgesetzen erklärt in den Artikeln 74, 75 und 76. Bei den Rückungsflächen mit unveränderlicher, immer gleichgerichteter Erzeugenden, wofür das hyperbolische Paraboloid (Figur 69d) und die Gewölbformen Figur 74a Beispiele sind, betrachtet man wie für die Körperschattenbestimmung jede Lage der Erzeugenden als niedrige Zone einer schiefergerichteten Cylinderfläche und bestimmt auf dieser die Lichtstufenpunkte nach Art. 99 oder 100.

Das interessanteste Beispiel einer solchen Rückungsfläche, der gewundene Säulenschaft des Barockstils, ist in Art. 74 beschrieben und als Gegenstand der Schattenkonstruktion behandelt. Auch für die Bestimmung der Lichtstufenlinien wird im Einklang mit der eben ausgesprochenen allgemeinen Vorschrift ganz wie in Figur 74c jeder der kreisförmigen Horizontalschnitte des Schaftes aufgefasst als schiefer Cylinder mit kreisförmiger Basis, dessen Mantellinien gleichgerichtet sind mit der Tangente an der leitenden Schraubenlinie im Punkte des Horizontalschnitts. Die Konstruktion der Lichtstufenlinien für diesen Fall ist in Art. 100 beschrieben und dort am Schluss der hier vorliegende Fall der kreisförmigen Basis besonders ins Auge gefasst.

Figur 109a enthält die Durchführung der Konstruktion mit acht Horizontalschnitten für jeden Umgang der Schraubenlinie. Die acht grosskreisförmigen Normalkugelschnitte, deren Ebenen senkrecht stehen zu den Mantellinien der acht Cylinder, sind im Grundriss alle kongruent, da alle Tangenten an der leitenden Schraubenlinie gleiche Neigung haben. Die erste solche Schnittellipse wird erhalten mit demjenigen Cylinder, dessen Mantellinien der Vertikalebene parallel sind (Figur rechts oben). An dem im Aufriss gezeichneten geradlinig erscheinenden Normalschnitt $m'n'$ dieses Cylinders lässt sich nach Beifügung einer Horizontal- und Vertikallinie mit $p's'$ gleich dem Normalkugelradius die kleine Halbachse der Kugelellipse als Mass $p'r'$ abnehmen. Die grosse Achse dieser ersten Schnittellipse ist im Normalkugelgrundriss senkrecht zum Grundschnitt gerichtet; die andern sieben Ellipsen ergeben sich durch Drehung der ersten. Zeichnet man nun den beweglichen Kreis, der den Säulenschaft erzeugt, konzentrisch in den Normalkugelgrundriss ein und zieht für eine der Schnittellipsen c die Radien nach ihren Schnittpunkten mit den

Lichtstufenlinien der Kugel, so geben diese Radien die Lichtstufenpunkte auf demjenigen Säulenkreis, der zu der Schnittellipse c gehört, und es können diese Punkte in den Grundriss des Schaftes unmittelbar und durch Abmessen ihrer Abstände vom vertikalen Durchmesser auch in den Aufriss auf den Kreis c übertragen werden. (Der gezeichnete Normalkugelgrundriss giebt die Konstruktion der Punkte nur für einen Kreis c , zeigt aber alle acht Schnittellipsen. Um die vielen Punkte nicht zu verwechseln, wird man die in der Figur begonnene Bezeichnung jedes Punktes mit



Figur 109a.

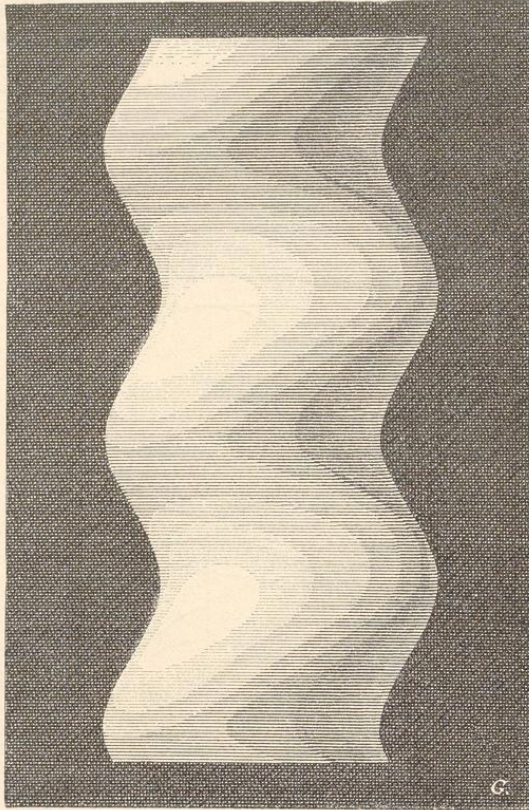
dem Buchstaben seines Horizontalkreises und der Nummer seiner Lichtstufe streng durchführen.)

Der Schaft in Figur 109a zeigt nur die Lichtstufenlinien; die Grenzen einer Selbstbeschattung, die das gezeichnete Beispiel in geringem Umfang aufweist, ergeben sich nach Art. 74. In Figur 109b ist die Schattierung mit den Lichtstufen durchgeführt.

Ist die Erzeugende einer Rückungsfläche veränderlich, wenn auch immer gleichgerichtet, so tritt die in Art. 75 erklärte Auffassung jeder ihrer Lagen als der Zonen einer Kegelfläche in Geltung. Wie auf dieser die Lichtstufenpunkte erscheinen, so gelten sie auch für die Rückungsfläche. Für jeden Vertikalschnitt des in Figur 75 gezeichneten Rundfensters und Kernbogens wäre also die Konstruktion der Lichtstufen des schiefen Kegels nach Art. 102

durchzuführen! Einen kürzeren Weg dürfte hier und in andern Fällen die in Art. 112 beschriebene allgemeine Lösung für gekrümmte Flächen eröffnen.

Für die Rückungsflächen mit drehend fortschreitenden veränderlichen Erzeugenden, also z. B. für die verdrehte



Figur 109 b.

Pyramide in Figur 76, ist wohl diese letztgenannte Lösung die einzig brauchbare; sie liesse sich auf den in Figur 76 rechts unten gezeichneten Grundriss unmittelbar anwenden. Dasselbe gilt für unveränderliche Erzeugende, wenn die Drehung keine gleichmässig fortschreitende, also keine schraubende ist.

110. Konoidische Flächen. Windschiefer Mauerbogen. Kugelkonoid.

Diese Flächen sind in Art. 77 nach ihrem Entstehungsgesetz erklärt und als Gegenstand der Schattenkonstruktion behandelt.

Auf den senkrechten Konoiden, das heisst auf denjenigen, deren Erzeugende rechtwinklig zur geraden Leitlinie stehen, ist die Bestimmung der Lichtstufenlinien nicht schwierig. Als Beispiel sei wieder der in Figur 77 a und b dargestellte „windschiefe Mauerbogen“ gewählt. An einem beliebigen Punkt der Leibungsfläche ist die Berührungsebene, die für die Lichtstufe massgebend ist, durch zwei unschwer erhältliche, durch den Punkt zu ziehende Gerade

bestimmt, nämlich einerseits durch die Erzeugende, andererseits durch die Tangente an der Kurve, die ein konzentrischer Cylinder als Schnitt mit der Fläche liefert. Die Tangente ergibt mit ihrer Horizontalneigung unmittelbar die Neigung der Berührungsebene selbst; sie erscheint im Grundriss als Tangente am Cylinderkreis; alle Tangenten längs einer Erzeugenden sind im Grundriss parallel; für ihre Neigungen zur Horizontalebene ist folgendes zu beachten.

Ein Element der Fläche zwischen zwei einander sehr naheliegenden Erzeugenden kann — indem das zugehörige Bogenstück des eben gedachten Halbkreises als gerade, also das zugehörige Bogenstück des aufgewickelten Halbkreises MN als Schraubenlinie betrachtet wird — als Wendelfläche aufgefasst werden. Hieraus folgt, dass die Neigungen der Tangenten längs einer Erzeugenden sich in derselben Weise verändern wie die Neigungen der Schraubenlinien, welche die konzentrischen vertikalen Schnittcylinder mit der Wendelfläche liefern würden. Diese Wendelfläche ist für jede Lage der Erzeugenden des Konoids einerseits bestimmt durch den Radius MO des Aufwicklungscylinders, andererseits durch die Neigung der Tangente an dem aufgewickelten Halbkreis MN in demjenigen seiner Punkte, welcher der Erzeugenden angehört. Die Neigung der Tangente am aufgewickelten Halbkreis ist aber ganz dieselbe wie diejenige der Tangente am entsprechenden Punkt des verstreckten Halbkreises; denn ein Bogenelement ändert durch das Aufwickeln auf den Vertikalcylinder seine ursprüngliche Neigung gegen die Horizontalebene nicht. Für jede Lage der Erzeugenden ist hienach die Wendelfläche erhältlich. Da alle Berührungsebenen der Konoidfläche längs einer Erzeugenden durch diese hier horizontale Erzeugende selber gehen, also alle dieselbe Horizontalrichtung haben, so sind für jede Erzeugende alle Lichtstufenpunkte auf einer vertikalstehenden Meridianlinie zu suchen, deren Ebene senkrecht zur Erzeugenden gerichtet ist, also im Grundriss der Normalkugel als Radius senkrecht zur Erzeugenden erscheint. Diese Meridianlinie lässt sich hienach im Grundriss der Normalkugel rasch erhalten und samt ihren Lichtstufenpunkten mit den Tangenten in diesen in ihrer wahren Gestalt heraustragen. Wenn dies geschehen ist, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden folgende einfache Konstruktion für die Lichtstufenpunkte auf der ausgewählten Erzeugenden, wobei der Gedanke zu Grunde liegt, dass in irgend einem ganzzahligen Lichtstufenpunkt der Erzeugenden die Neigung der durch den Punkt gehenden Schraubenlinie dieselbe sein muss wie die Neigung der Meridiantangente im gleich hellen Kugelpunkt.

Man zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck, dessen horizontale Kathete der Radius OM des Cylinders ist, auf welchem das Halbkreisbogenfeld aufgewickelt wurde, und dessen Hypotenuse die Neigung der Tangente hat, welche an den ebenen Halbkreis durch denjenigen Punkt gezogen wird, welcher der Lage der ausgewählten Erzeugenden entspricht. Durch die Spitze dieses Dreiecks zieht man eine Parallele zu jeder Tangente, die an dem herausgetragenen Normalkugelmeridian in einem seiner Lichtstufenpunkte gezogen worden ist. Wie diese Parallelen

die liegende Kathete vom rechteckigen Eckpunkt aus einteilen, so ist auch die Erzeugende im Grundriss vom Mittelpunkt aus durch die Lichtstufenpunkte einzuteilen. Die Durchführung des Verfahrens für eine genügende Zahl von Erzeugenden liefert wie in den früheren Lösungen eine genügende Zahl von Punkten für jede Lichtstufenlinie. Hierbei ist Gebrauch gemacht von der Tatsache, dass für jeden beliebigen Höhenabschnitt einer vertikalstehenden Wendelfläche die Grundrissbogenlängen der auf ihr liegenden Schraubenlinien deren Radien proportional sind. Jene geneigten Parallelen samt der zuerst gezeichneten Hypotenuse können unmittelbar als die Abwicklungen der Schraubenlinien der für die ausgewählte Erzeugende vorgestellten Hilswendelfläche aufgefasst werden, ebenso die Horizontalabschnitte als Verstreckungen der zugehörigen Grundrissbogenlängen.

Die Lösung hat sich verhältnismässig einfach gestaltet, weil es möglich war, jede Lage der Erzeugenden als Bestandteil der einfach zu schattierenden senkrecht stehenden Wendelfläche zu betrachten. Beim allgemeinen Fall des Konoids, wofür etwa das Kugelkonoid mit schrägstehender Geraden als Leitlinie und mit Gleiten der Erzeugenden an einer Kugel anstatt des Kreises in Figur 29b ein interessantes Beispiel wäre, fällt diese Erleichterung weg. Auch nicht als Schraubenfläche darf ein Stück der Fläche zwischen zwei einander naheliegenden Erzeugenden betrachtet werden, da die Winkel mit der festen Geraden sich ändern. Die Auffassung als Bestandteil eines windschiefen Vierecks (hyperbolischen Paraboloids) wäre berechtigt, führt aber zu keiner direkten Lösung. Daher dürfte wie bei der schiefen Kegelfläche nur eine Lösung mit punktweise konstruierten geometrischen Orten möglich sein, wie sie im folgenden in den Grundzügen gegeben ist.

Wie im zuerst betrachteten einfachen Fall und wie bei allen Regelflächen überhaupt besteht die Tatsache, dass die Lichtstufenpunkte für jede der Erzeugenden E auf einem Meridian ME der Normalkugel zu suchen sind, dessen Ebene normal steht zur Erzeugenden, also hier vertikal steht. Wenn noch für einen Punkt der Erzeugenden die Neigung der Tangente N an der Schnittlinie der Fläche mit der zur Erzeugenden normalen Ebene bekannt ist, so kann für diesen Punkt der zugehörige Normalkugelpunkt angegeben werden; es ist derjenige Punkt des Meridians ME , in welchem die Meridiantangente dieselbe Neigung hat wie die Tangente N .

Ein beliebiger Vertikalschnitt V der Fläche, der senkrecht zum Grundschnitt gerichtet sein mag, kann für jeden Punkt, in dem er eine Erzeugende E schneidet, diese Neigung liefern. Man zeichnet die Schnittkurve des Vertikalschnitts V und in jedem Punkt, in welchem er eine der ausgewählten Erzeugenden E schneidet, die Tangente S an der Vertikalschnittkurve. Diese Tangente S hat man rechtwinklig auf die zur Erzeugenden E normale Ebene zu projizieren, um in dieser die Normaltangente N zu erhalten.

Hienach lässt sich für jeden Schnittpunkt der Vertikalschnittkurve V mit einer Erzeugenden E der entsprechende Punkt P der Normalkugel bestimmen. Verbindet man auf

der Normalkugel alle zu einem Vertikalschnitt V gehörigen Punkte P durch eine Kurve, so ist diese der geometrische Ort der Lichtstufenpunkte für eine Vertikalschnittkurve V . Diese Raumkurve auf der Kugel schneide z. B. den Lichtstufenkreis $+3$ in einem bestimmten Punkt. Durch diesen Punkt legt man einen Vertikalschnitt der Normalkugel parallel zum Vertikalschnitt V , zieht an den Schnittpunkt eine Tangente im Punkt $+3$ und dazu eine parallele Tangente an die Vertikalschnittkurve V . Der Berührungspunkt auf dieser letzten ist der Lichtstufenpunkt $+3$ auf der Fläche.

Eine zweite Lösung, bei welcher der geometrische Ort nicht auf der Normalkugel, sondern auf der Fläche selber sich bildet, ist die folgende. Der zu einer Erzeugenden E gehörige vertikalstehende Kugelmeridian M schneide die Lichtstufenlinie $+3$ in einem Punkt R . Durch R legt man einen vertikalen Parallelkreis, dessen Ebene denjenigen der Vertikalschnitte $V_1 V_2 V_3 \dots$ der Fläche parallel ist, also nach der für diese getroffenen Wahl auch senkrecht zum Grundschnitt steht. In R zieht man eine Tangente an den Parallelkreis, dann an die getrennt herausgetragenen Schnittkurven $V_1 V_2 V_3 \dots$ parallele Tangenten. Die Berührungspunkte dieser letzten überträgt man in den Grundriss oder Aufriss und verbindet sie durch eine stätige Kurve. Wo diese die Erzeugende E schneidet, da ist der Lichtstufenpunkt $+3$ auf dieser. Selbstverständlich wird man die parallelen Tangenten nur an etwa vier Vertikalschnittkurven V ziehen, bei denen die Berührungspunkte in die Nähe der Schnittpunkte der Kurven mit der Erzeugenden fallen. Da diese Schnittpunkte zum Heraustragen der Kurven V dienen, also von Anfang auf ihnen vorhanden sind, so ist die Auswahl der vier Kurven leicht zu treffen (eine dritte Lösung s. Art. 111 am Schluss).

Lichtstufen auf beliebig gekrümmten Flächen, 111.
erstes Verfahren: mit geometrischen Orten auf der Normalkugel.

Bei allen bisher beschriebenen gekrümmten Flächen ist das Verfahren zur Bestimmung der Lichtstufenlinien einem bestimmten Erzeugungsgesetz angepasst worden. Andere Flächen als die betrachteten dürften zwar selten mit Lichtstufen zu schattieren sein; doch ist vom rein wissenschaftlichen Standpunkt aus die Aufgabe der Beleuchtungskunde mit solcher Einzelkonstruktion noch nicht gelöst. Sie ist es offenbar erst dann, wenn alle Flächen in derselben Weise schattiert werden können wie die bisher betrachteten, das heisst wenn ein allgemein gültiges Verfahren für alle gekrümmten Flächen gefunden ist, ähnlich wie es für die Bestimmung der Schattengrenzen in Art. 28 vorliegt. Den im Früheren betrachteten Lösungen muss ein gemeinschaftlicher Grundgedanke zu eigen sein, dessen Durchführung sich in ihnen verhältnismässig einfach gestaltet hat, weil das Erzeugungsgesetz der Flächen ein einfaches war oder eine günstige Verwandtschaft mit dem der Kugel darbot. Diesen Grundgedanken auszuziehen und seine Verwertung ohne Eingehen auf ein bestimmtes Erzeugungsgesetz zu zeigen, ist im vorliegenden Artikel versucht.

Für jeden Punkt x einer gekrümmten Fläche ergeben sich unmittelbar aus dem Erzeugungsgesetz zwei in der Oberfläche liegende, im allgemeinen gewundene Linien, die durch den Punkt x gehen und in beiden Projektionen gezeichnet werden können. Eine dieser Linien ist eine Lage der erzeugenden Linie oder findet sich aus einer Lage der erzeugenden Fläche, die andere bestimmt sich aus deren Bewegung. Zieht man in dem betrachteten Punkt x die beiden Tangenten, so bestimmt deren Ebene den für x gültigen Lichtstufenpunkt auf der Normalkugel. Auf jeder beliebig gekrümmten Fläche lässt sich somit für jeden Punkt die Lichtstufe angeben. Damit ist aber das Problem der Beleuchtungskunde für die Fläche nicht gelöst, indem die gefundenen Lichtstufen beliebig ausgewählter Flächenpunkte im allgemeinen keine ganzzahligen sind, also das Zusammenfassen in Lichtstufenlinien nicht gestatten oder nur eine unsichere Schätzung über deren Verlauf ermöglichen. An die beiden unmittelbar gegebenen Flächenlinien eines Punktes ist keine allgemeingültige Lösung anzuknüpfen; eine solche erfordert ebene Kurven mit leicht festzuhaltender Lage ihrer Ebenen.

Ein erstes allgemeines Verfahren lässt sich als dasjenige „der geometrischen Orte auf der Normalkugel“ bezeichnen. Man zeichnet auf der gegebenen Fläche die Schnittlinie mit einer horizontalen Ebene, bestimmt für eine Anzahl von Punkten dieser Linie die Lichtstufenpunkte auf der Normalkugel in deren Grundriss und verbindet diese Kugelpunkte durch eine stetige Kurve. Diese ist der geometrische Ort, auf welchem auch alle andern Lichtstufenpunkte jener Schnittlinie zu suchen sind. Die Kugelkurve schneidet die Lichtstufenkreise der Kugel in bestimmten Punkten. Wenn man nun durch den Schnittpunkt der Kurve mit der Linie $+3$ den horizontalen Parallelkreis der Kugel legt und an diesen im Punkt $+3$ eine Tangente zieht, ferner an jene horizontale Schnittkurve auf der Fläche eine parallele Tangente zieht, so ist der Berührungspunkt dieser letzten ein Lichtstufenpunkt $+3$ auf der Fläche. (Anstatt der Tangente am Normalkugelkreis wird man nur den zugehörigen Radius ziehen und die Tangente der Flächenkurve senkrecht zu diesem Radius stellen, wie in Art. 99, 100 und 102, wo ebenfalls immer die Vorstellung paralleler Tangenten zu Grunde lag.)

Weitere Tangenten in weiteren ganzzahligen Punkten der Kugelkurve geben weitere ganzzahlige Lichtstufenpunkte auf der Horizontalkurve der Fläche, und weitere Horizontalschnitte der Fläche liefern weitere geometrische Orte auf der Kugel und damit weitere Gruppen von Lichtstufenpunkten auf der Fläche.

Dieses Verfahren ist schon im früheren bei der schiefen Kegelfläche in Art. 102 zur Anwendung gebracht worden. Dort war jedoch eine der beiden Flächenlinien eine Gerade und dadurch die Bestimmung der Lichtstufenpunkte vereinfacht. Im allgemeinen Fall ist es nötig, ausser den horizontalen Schnittebenen auch noch vertikale beliebiger Richtung einzuführen, die sich im Grundriss als gerade Linien projizieren und deren Schnittkurven am besten getrennt herausgetragen werden. Wenn eine solche vertikale Schnittkurve eine horizontale in einem Punkt x schneidet, so zieht man Tangenten an beide Schnittkurven

im Punkt x . Die Richtung der horizontalen bestimmt einen Grosskreis auf der Kugel, der sich im Grundriss als Radius senkrecht zu dieser Tangente projiziert (die „geographische Länge“ des Lichtstufenpunktes); die geneigte Tangente, rechtwinklig projiziert auf eine Ebene, die senkrecht zur Horizontaltangente steht, erscheint in dieser Projektion als Gefällslinie der Berührungsebene und bestimmt in bekannter Weise einen horizontalen Parallelkreis (als „geographische Breite“) im Grundriss der Normalkugel, dessen Schnitt mit jenem Radius den Lichtstufenpunkt für den Flächenpunkt x darstellt. Dieses Verfahren, für jeden Schnittpunkt x einer Horizontalkurve durchgeführt, liefert die Reihe der Lichtstufenpunkte und damit den geometrischen Ort für die Horizontalkurve.

Als vertikale Schnittebenen wird man in erster Linie solche zu benützen suchen, welche der Lichtrichtung parallel stehen. Die mit ihnen erhaltenen Schnittkurven können nicht nur gleichzeitig zur Bestimmung von Schlagschattengrenzen dienen, sondern auch eine Probe für die Kurve ± 4 liefern; die Berührungspunkte dieser Kurven mit den Lichtstrahlen müssen ja Punkte der Kurve ± 4 sein.

In andern Fällen werden Vertikalschnitte senkrecht zum Grundschnitt, die auch im Aufriss geradlinig erscheinen, die meist geeigneten sein, in wieder anderen Vertikalschnitte verschiedener Grundrissrichtungen, welche sich etwa den verschiedenen Lagen einer Erzeugenden anpassen.

Bei bestimmten Lagen der Flächen treten an die Stelle der in der voranstehenden Lösung als erste Kurvengruppe verlangten Horizontalschnitte solche parallel zur Vertikalebene, und an die Stelle der vertikalen Schnitte solche senkrecht zur Vertikalebene, entweder mit Richtung parallel zum Lichtstrahl oder senkrecht zum Grundschnitt oder irgend einer andern gleichbleibenden oder veränderlichen Aufrissrichtung. Die geometrischen Orte auf der Normalkugel sind dann für die zur Vertikalebene parallelen Schnittkurven aufzusuchen und werden im Aufriss der Normalkugel, anstatt im Grundriss gezeichnet. So können z. B. bei Regelflächen mit horizontalen Erzeugenden keine Tangenten an Horizontalschnittkurven gezogen werden, weil diese letzten zu geraden Linien geworden sind; hier müssen also notwendig andere Parallelschnitte, welche Kurven liefern, eingeführt werden.

In wieder anderen Fällen ist die erste Schnittebenen-Gruppe, für deren Kurven die geometrischen Orte auf der Kugel zu suchen sind, parallel zur Seitenebene zu wählen, wie es für das Kugelkonoid in Art. 110 geschehen ist. Die horizontalen Schnitte waren aus dem eben angegebenen Grund ausgeschlossen; Schnitte parallel zur Vertikalebene wären wegen ihrer viel zu schiefen Winkel mit den Erzeugenden auch nicht zweckmässig gewesen.

Eine letzte Stellung, die für die erste Parallelschnittebenen-Gruppe zweckmässig sein kann, ist diejenige mit schiefem Winkel gegen zwei Grundebenen bei Richtung normal zur dritten; sie kann sich empfehlen, wenn sie dem Entstehungsgesetz und der Lage der Fläche in besonders hohem Mass entspricht und die Ableitung der andern Schnittkurven schwierig wäre. Doch wird hiebei für die Erleichterung in der einen Seite der Lösung weit

grösserer Arbeitsaufwand in der andern eingetauscht. Schiefgerichtete Schnittebenen, die nicht wenigstens senkrecht zu einer Grundebene stehen, dürften ausgeschlossen sein.

Das umständliche Projizieren der in den Vertikalschnittebenen der ursprünglichen Lösung gelegenen geneigten Tangenten auf die zu den Horizontaltangenten normalen Ebenen kann umgangen werden, indem man Gebrauch macht von der in Art. 91 angegebenen Lichtstufenbestimmung für eine Ebene, die gegeben ist durch ihre Horizontalrichtung und irgend eine ihr angehörige geneigte Gerade. Der geometrische Ort der Berührungspunkte aller Tangenten, die an die Normalkugel parallel zu einer der geneigten, in den Vertikalschnittebenen liegenden Flächentangenten N gezogen werden können, ist ein Grosskreis, dessen Ebene senkrecht zur Tangente steht; er projiziert sich im Grundriss als eine Ellipse E , deren grosse Achse senkrecht zum Grundriss der Vertikalschnitte V gerichtet und deren kleine Achse gleich ist dem Normalkugeldurchmesser mal dem Sinus des Neigungswinkels der Tangente. Wo diese Ellipse den Radius R schneidet, der im Grundriss der Normalkugel senkrecht zur zugehörigen Horizontaltangente H steht, da ist der Lichtstufenpunkt L . Bei dieser Abänderung des oben beschriebenen allgemeinen Verfahrens tritt also an die Stelle der Projektion der geneigten Tangente diese selbst und an die Stelle des Horizontalkreises die Grosskreisellipse.

Diese Thatsache lässt sich in folgender Weise zu einem mechanischen Hilfsmittel verwerten. Auf durchsichtigem Papier wird ein Kugelgrundriss ebensogross wie das Normalkugelbild, aber ohne Lichtstufenlinien, mit den elliptischen Projektionen von etwa 16 bis 32 zu einem Horizontaldurchmesser gehörigen Grosskreisen gezeichnet und über diesem vertikal dargestellten Durchmesser die Tangentenneigungen, die senkrecht zu den Ebenen der Grosskreise stehen, so beigefügt, dass durch Verbindungslinien die zu jeder Neigung gehörige Ellipse leicht herausgefunden werden kann. Dieses Blatt wird zuerst auf der Vertikalschnittkurve V mit immer vertikalbleibendem Durchmesser so verschoben, dass die Tangente N an dieser mit einer der Tangenten des Blattes zusammenfällt oder zwischen zwei Tangenten fällt und die zugehörige Ellipse E bezeichnet oder eingeschätzt werden kann. Dann wird das Blatt auf den Normalkugelgrundriss gelegt und dabei die ursprünglich vertikale grosse Ellipsenachse senkrecht zur Grundrissrichtung der Vertikalschnitte V gelegt, worauf der Schnittpunkt der eingeschätzten Ellipse E mit dem Radius R auf diesen durchgestochen werden kann; dieser Punkt ist der gesuchte Lichtstufenpunkt L . Das Hilfsblatt kann für alle Schnittpunkte von Horizontal- und Vertikalkurven in gleicher Weise benützt werden und für alle Arten von Flächen dieselben Dienste leisten, ohne die Genauigkeit des Resultats in ungünstiger Weise zu vermindern.

Noch auf einem andern Weg lassen sich die Parallelkreise der Lichtstufenpunkte mit Umgehung jenes Projizierens schräggeneigter Tangenten erhalten, und es dürfte sogar, wenn keine Schlagschattengrenzen mitzubestimmen sind, dieser letzte Weg für die meisten Flächen der kür-

zeste sein. Man zeichnet im Grundriss der Fläche über deren Horizontalkurvensystem weg und nur nach Schätzung weitere Kurven, welche alle Horizontalkurven rechtwinklig durchschneiden, sogenannte „Trajektorien“ und betrachtet sie als Grundrisse von Linien auf der Fläche. Jede Tangente an einer solchen Flächenkurve im Raum ist zugleich die Gefällslinie der Berührungsebene der Fläche in demselben Berührungspunkt, so dass die im allgemeinen gewundene Kurve eine „Gefällskurve“ der Fläche heissen kann, womit ausgedrückt ist, dass sie in jedem ihrer Punkte nach Horizontalrichtung und Neigung die grösste Horizontalneigung der Fläche verwirklicht. (Ein Punkt auf der Fläche, der nur der Schwerkraft folgen würde, müsste sich auf einer „Gefällskurve“ bewegen.) Durch Verstreckung ihres projizierenden Cylinders herausgetragen, giebt eine solche Linie in jedem Schnittpunkt mit einer der Horizontalen unmittelbar die Neigung der Fläche in diesem Punkt und damit durch ihre Tangente in diesem Punkt den Parallelkreis der „geographischen Breite“ des zugehörigen Lichtstufenpunktes auf der Normalkugel. Es genügt, die „Trajektorien“ ganz oder als beliebig lange Bruchstücke nur nach Schätzung zu zeichnen, da der Neigungswinkel, den sie allein liefern sollen, auch bei ziemlich stark unrichtiger Schätzung noch ebenso genau richtig erhalten wird, als die übrigen Resultate der Konstruktion erhalten werden können. Diese Thatsache beruht darauf, dass eine gerade Strecke, rechtwinklig auf eine andere Gerade sehr wenig verschiedener Richtung projiziert, in der Projektion fast unverändert lang auftritt.

Handelt es sich nur um die Bestimmung der Lichtstufe eines einzelnen Flächenpunktes, so wird man ein Bruchstück der Trajektorie durch den Punkt nur etwa über zwei oder drei Horizontalkurven weg zu beiden Seiten des Punktes zeichnen; sollen die geometrischen Orte für viele Horizontalkurven zugleich gesucht werden, so wird man die meisten Trajektorien so weit als möglich durchführen. Sie vereinigen sich im höchsten Punkt der Fläche.

Bei allen beschriebenen Konstruktionen zur Bestimmung des geometrischen Ortes auf der Normalkugel wird man das oft sich wiederholende Auftragen geradliniger Reihen von Punkten mit einem Papierstreifen vornehmen.

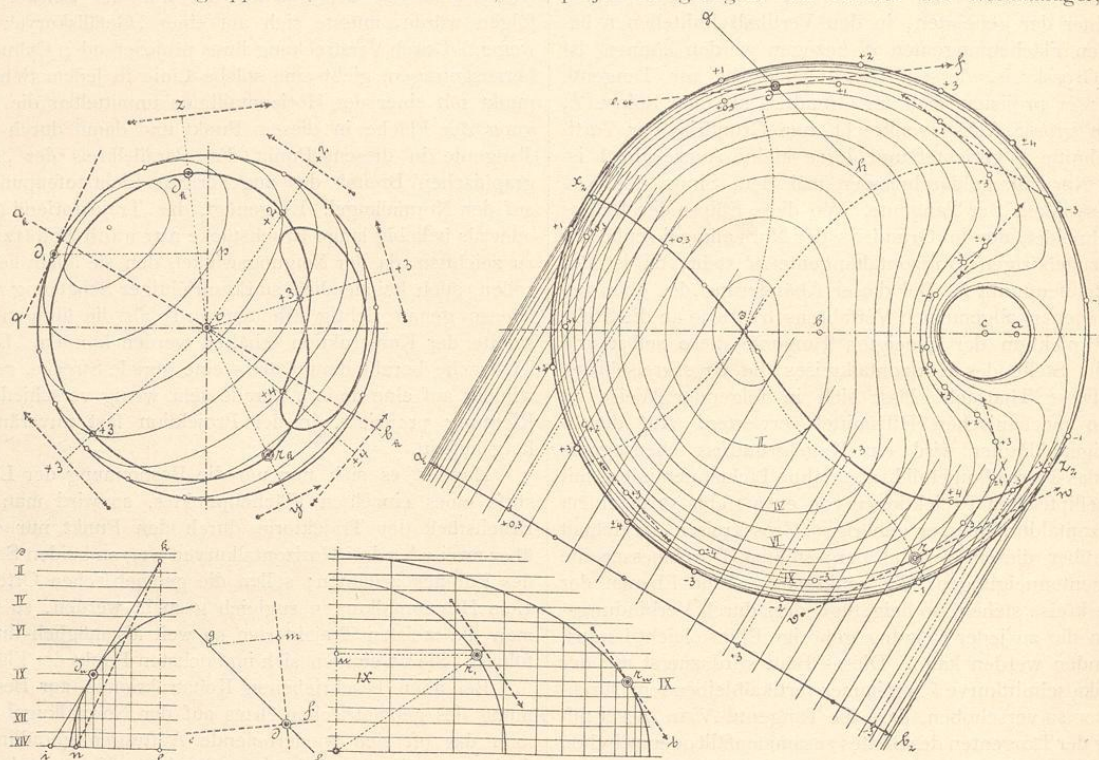
In Figur 111a–c ist ein Beispiel für die beschriebene allgemeine Lösung gezeichnet; Figur 111a rechts zeigt das gewählte Gebilde, das sich als „exzentrische Wulstfläche“ benennen liesse, im Aufriss. In einer zur Vertikalebene parallelen Ebene liegt ein Kreis mit dem Mittelpunkt b , der einen andern, nicht konzentrischen, mit dem Mittelpunkt c einschliesst; die Fläche erzeugt sich durch einen beweglichen veränderlichen Kreis, dessen Ebene immer senkrecht zu derjenigen der festliegenden Kreise steht und dessen Durchmesser die zwischen beiden gelegene Strecke auf dem verlängerten Halbmesser des kleineren Kreises ist. (Richtiger wäre es, den Durchmesser auf einer Sehne durch den in beiden Kreisen geometrisch ähnlich liegenden Punkt a anzunehmen; es wäre dann keiner der beiden festen Kreise bevorzugt. Doch würde sich hiedurch die Fläche nur wenig ändern.)

Hier empfiehlt sich als erste Schnittkurvengruppe

offenbar eine solche parallel zur Vertikalebene; sie ist mit der Hilfsfigur 112a links rasch erhältlich. In dieser Figur sind 14 Lagen des erzeugenden Kreises konzentrisch gezeichnet und durch 15 Horizontallinien, welche die Schnittebenen bedeuten, durchschnitten. Der höchste Punkt jedes Kreises erscheint im Aufriss der Fläche als Halbierungspunkt des Sehnenstücks, in welchem sich der Kreis projiziert; die Abstände der Schnittpunkte des Kreises mit jeder der Horizontallinien vom vertikalen Radius der Hilfsfigur sind dieser zu entnehmen und auf dem Sehnenstück von jenem Halbierungspunkt aus nach rechts und links aufzutragen. (Da die Ebene der festen Kreise und die erste Schnittebenengruppe nicht horizontal sind, so

Tangente in einem gegebenen Punkt genau richtig gezogen werden, an jene andern Schnittkurven nicht. Um dem allgemeinen Fall der gekrümmten Fläche möglichst nahe zu bleiben, ist die Einfachheit der Kreislinie nicht ausgenützt und die zweite zur Vertikalebene senkrechte Schnittebenengruppe parallel zur Lichtrichtung angenommen.

Zur Darstellung der Konstruktion des geometrischen Ortes auf der Kugel und der ganzzahligen Lichtstufpunkte auf der Fläche ist die Schnittkurve IX ausgewählt. In einem beliebigen Punkt d dieser Kurve ist deren Tangente ef und die Schnittlinie gh parallel zur Lichtstrahlprojektion gezogen. Im Aufriss der Normalkugel, Fi-



Figur 111a.

erscheint die Lösung nicht ganz in der ursprünglich beschriebenen Gestalt; doch wäre es leicht, die gegebene Figur mit allen im folgenden darauf erscheinenden Linien als Grundriss aufzufassen, indem man sie um 90° gedreht vorstellt.)

Da eine Selbstbeschattung stattfindet, so liegt ein Grund vor, die zweite, zur Vertikalebene senkrechte Schnittebenengruppe parallel zur Lichtrichtung einzuführen, um die Schnittkurven zugleich zur Schlagschattenbestimmung und zur Probe für die Kurve ± 4 benützen zu können. Aber auch die Benützung der Ebenen des erzeugenden Kreises als der zweiten Schnittebenengruppe hätte einen grossen Vorzug; diese Kreise sind schon in der Hilfsfigur 112a links vorhanden, wogegen jene andern Schnittkurven neu abzuleiten sind, und an einen Kreis kann die

Figur 111a links, erscheint als erster geometrischer Ort des zu d gehörigen Lichtstufpunktes der Radius oz senkrecht zu ef . Die Ebene gh , welche zum Zweck der Schlagschattenkonstruktion und Verwertung bei andern Vertikalschnittkurven durch die ganze Fläche zu führen wäre, liefert die in Figur 111a links unten herausgetragene Schnittkurve durch Auftragen der Abscissen und Ordinaten; ik ist die Tangente dieser Kurve im Punkt d , der in dieser Hilfsfigur den Flächenpunkt d darstellt. Der rechts hievon beigezeichnete Aufriss zeigt in gh und ef die Richtungen gh und ef aus dem Flächenaufriss wiederholt; dm ist senkrecht zu ef , kl eine Vertikale an beliebiger Stelle, $dg = li$, gm senkrecht zu dm , $ln = dm$; kn ist die Projektion der in der Ebene dg liegenden Flächentangente ki auf die Ebene dm , das heisst auf eine

Schnittebene der Fläche, die senkrecht zu ef gerichtet ist, also die Neigungslinie der Berührungsebene der Fläche im Punkt d in Beziehung auf die Vertikalebene. An einem Normalkugelumriss ist die Tangente qd_1 parallel nk gezogen, deren Berührungspunkt d_1 bestimmt und im Aufriss der Normalkugel auf dem zuvor bestimmten Radius $od_k = pd_1$ aufgetragen; d_k ist der Lichtstufenpunkt auf der Kugel für den Flächenpunkt d . Durch Annahme weiterer Punkte d auf der Kurve IX erhält man die im Aufriss der Kugel gezeichnete Kurve als geometrischen Ort der Berührungspunkte aller Tangentialebenen, welche den längs der Kurve IX an die Fläche gelegten Tangentialebenen parallel sind. Wegen der Symmetrie der Fläche und der Kurve IX zu der Ebene sbc wird auch die Kugelkurve symmetrisch zu einer gleichgerichteten Grosskreisebene.

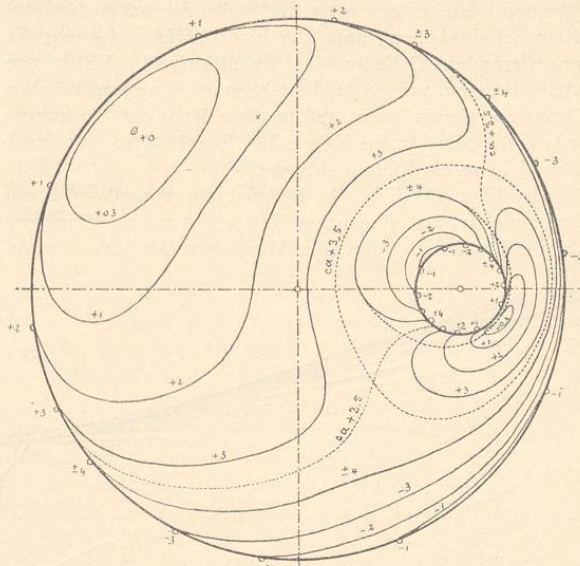
Auf der Flächenkurve IX ist ein zweiter Punkt r ausgewählt, um die oben beschriebene Verwertung der Trajektorien zu zeigen. Die punktierte Kurve sr ist die nur nach Schätzung eingetragene Trajektorie oder, räumlich aufgefasst, „Maximalneigungskurve“ für die Vertikalebene, fortgesetzt bis zum Flächenscheitel s . In Figur III a rechts unten ist die Verstreckung dieser Kurve und ihres projizierenden Cylinders ganz herausgetragen, obwohl zum Ziehen der Tangente tr_u nur ein kleines Stück nötig gewesen wäre. Punkt r_1 am Kugelbild entsteht durch hr_1 senkrecht zu tr_u . Im Aufriss der Normalkugel ist der Radius oy senkrecht zur Tangente vw gezogen und $or_k = ur_1$ aufgetragen; r_k ist der zu r gehörige Lichtstufenpunkt.

Ist in dieser oder der erstbeschriebenen Weise die Kurve des geometrischen Ortes für die Berührungsebenen längs der Flächenlinie IX bestimmt, so zieht man die Radien nach den Schnittpunkten dieser Kurve mit den Lichtstufenellipsen des Kugelbildes. In der Figur sind zur Darstellung dieses Teils der Konstruktion die Schnittpunkte mit den Ellipsen $+2 + 3 + 4$ ausgewählt. Eine Tangente an die Flächenlinie IX senkrecht zu dem nach dem Schnittpunkt $+2$ gezogenen Radius liefert als Berührungspunkt einen Lichtstufenpunkt $+2$ der Fläche. Die drei zu den Kugelpunkten gehörigen Tangenten sind durch Querstriche hinter den Pfeilen unterschieden. (Nicht an jeder Stelle der Flächenlinie, an welcher eine solche Tangente möglich ist, darf sie gezogen werden. Wenn etwa die Kugelkurve eine Lichtstufenellipse $+3$ viermal schneidet, wie im vorliegenden Fall, so ist wohl zu untersuchen, zu welchem Teil der Flächenkurve jeder Schnittpunkt gehört.)

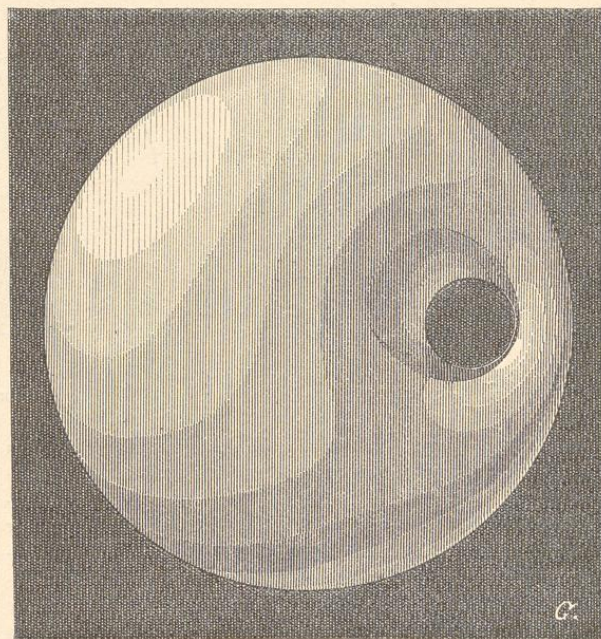
Zur Durchführung des Verfahrens würde man noch etwa die Vertikalschnittkurven II , IV , VI auszuwählen und für jede ein eigenes Kugelbild mit dem geometrischen Ort wie für die Linie IX zu zeichnen haben; weitere zur Konstruktion gehörige Bemerkungen sind in Art. 113 ausgesprochen. Figur III b zeigt die Lichtstufenlinien und Schlagschattengrenzen des betrachteten Gebildes; in Figur III c erscheint es mit durchgeführter Schattierung.

Ausser der schon anfangs erwähnten schiefen Kreiskegelfläche und Kegelfläche mit beliebiger Basis war das Kugelkonoid in Art. 110 ein Beispiel für diese erste allgemeine Lösung. Nur erschien sie dort mit der Umkeh-

rung, dass die zweiten Schnittebenen auf der Kugel, anstatt auf der Fläche und die geometrischen Orte auf der Fläche, anstatt auf der Kugel gesucht wurden. Diese Umkehrung ist bei allen Regelflächen mit Richtebenen für



Figur III b.



Figur III c.

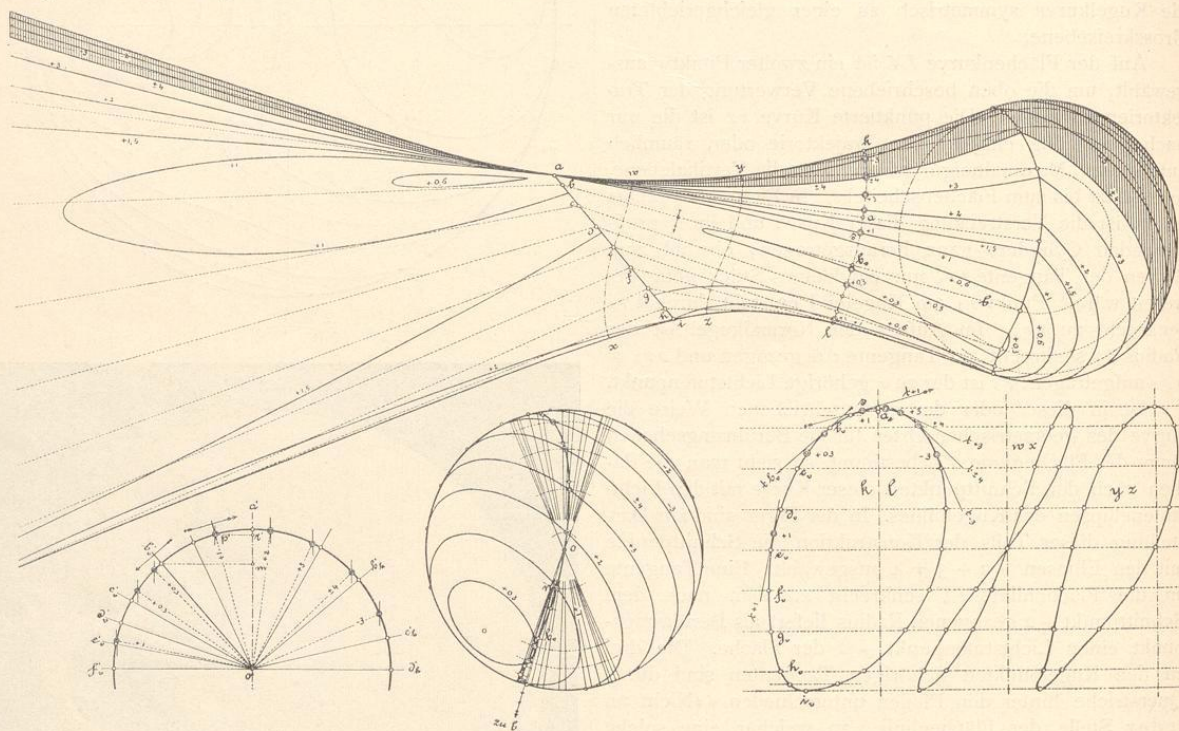
die Erzeugenden möglich, aber auch nur bei diesen Flächen.

Eine letzte Variante der beschriebenen allgemeinen Lösung erscheint, wenn die Trajektorien nicht nur als

Hilfsmittel zum Aufsuchen der geometrischen Orte für andere Schnittkurven dienen, sondern für sich selber, oder vielmehr für die Gefällskurven, deren Projektionen sie darstellen, die geometrischen Orte auf der Kugel bestimmen. Hierbei treten an die Stelle der ersten horizontalen Schnittebenengruppe der ursprünglichen Lösung die projizierenden Cylinder der Gefällskurven. Unter den vielen Formen, welche das Verfahren mit den geometrischen Orten annehmen kann, dürfte diese letzte oft die zweckmässigste sein, insbesondere bei Regelflächen mit einer Grundebene als Richtungsebene.

In Figur III d ist als Beispiel ein Kugelkonoid mit horizontalen Mantellinien gewählt; es ist nur als Grundriss dargestellt und in folgender Weise erzeugt. An der ge-

normal zur Mantellinie gerichtet ist, und der im Grundriss der Normalkugel (zweite Hilfsfigur unten) als Radius erscheint. Hieraus ergeben sich die zwei Strahlenbüschel, welche sämtliche Lichtstufenpunkte der Kugel, die denen der Fläche entsprechen, in sich schliessen müssen. Im Grundriss der Fläche ist die Trajektorie kl gezogen, welche alle von oben sichtbaren Mantellinien ganz oder annähernd rechtwinklig schneidet. Aus der Verstreckung ihrer zwischen den Mantellinien liegenden Stücke und aus der Höhenlage der Mantellinien ergab sich die in der dritten Hilfsfigur gezeichnete Linie als „abgewinkelte Gefällskurve $k'l'$ “ der Fläche (zwei weitere solche Kurven sind beigelegt). Im Schnittpunkt b_v dieser Kurve, der der Höhenlage der Mantellinie b_v entspricht, ist eine Tangente tb_v



Figur III d.

zeichneten Kugel einerseits und der geneigten Geraden ai andererseits gleitet eine horizontale Gerade; die höchstliegende Tangente der Kugel geht durch a , die tiefstliegende durch i ; von den sieben andern Punkten der Linie ai sind als Mantellinien der Fläche je zwei Tangenten an einen gleich hoch liegenden horizontalen Parallelkreis der Kugel gezogen. Die an der Vorderseite der Kugel berührende, durch b gezogene Mantellinie ist mit b_v bezeichnet. (Zwei weitere benützte Punkte der Linie ai sind nur in den Hilfsfiguren eingetragen.) Nur die von oben sichtbaren Mantellinien sind im Flächengrundriss gezeichnet und zwar punktiert, um sie von den Lichtstufenlinien zu unterscheiden.

Für jede horizontale Mantellinie liegen die Lichtstufenpunkte auf einem vertikalen Grosskreis, dessen Ebene

gezogen und im Aufriss der Normalkugel (erste Hilfsfigur) ein Radius $o'b_v$ senkrecht zu dieser Tangente. Im Grundriss der Normalkugel ist auf dem zur Mantellinie b_v normalen Radius das Mass ob_v gleich dem im Aufriss erhaltenen Horizontalmass $m'b_v$ aufgetragen und dadurch der Punkt b_v des geometrischen Ortes auf der Normalkugel bestimmt, welcher der Flächenkurve kl entspricht. Die Figuren lassen auch die Bestimmung weiterer Punkte des geometrischen Ortes verfolgen.

Die für diesen erhaltene Kurve schneidet die Lichtstufenlinie $+1$ in einem Punkt n . Im Aufriss der Normalkugel ist Punkt p' bestimmt durch $r'p' = on$. An die Kurve kl ist eine Tangente $t+1$ normal zum Radius $o'p'$ gezogen; der Berührungspunkt s dieser Tangente ist der Lichtstufenpunkt $+1$ in der abgewinkelten Gefällskurve.

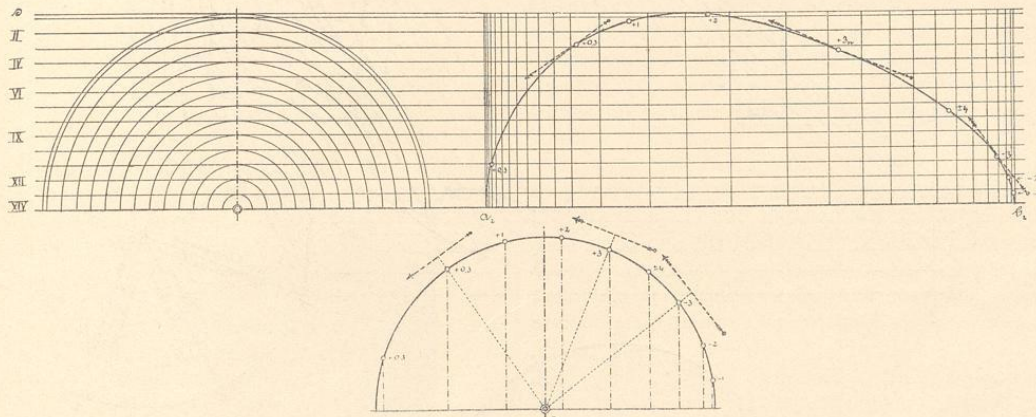
Er wird in den Grundriss der Fläche übertragen, indem dort das Bogenmass $s a$ gleich dem Horizontalmass $s a_e$ in der Abwicklung gemacht wird.

119. Lichtstufen auf beliebig gekrümmten Flächen, zweites Verfahren: mit berührenden Cylinderflächen. Gebilde durch Höhenkurven gegeben.

Ein zweites allgemeines Verfahren zum Bestimmen der Lichtstufenlinien auf gekrümmten Flächen ist das folgende. Man zeichnet wie beim ersten Verfahren die Schnittkurven beliebiger Horizontalebene mit der Fläche. Im allgemeinen wird man die Abstände der Horizontalschnitte gleich gross anzunehmen suchen, in welchem Fall sie nach dem Vorgang der topographischen Flächendarstellung als „Höhenkurven“ bezeichnet werden können. Zieht man an die im Grundriss gezeichneten Horizontalschnittkurven parallele Tangenten einer beliebigen Rich-

kurvensystem nur einmal zeichnen und jede Tangenten-Gruppe samt der zugehörigen Berührungskurve auf einem eigenen Blatt durchsichtigen Papiers davon abnehmen, wobei die Horizontalkurven auf dem Pausblatt und die Berührungskurven auf dem Horizontalkurvenblatt wegbleiben. Wenn später auf dem Pausblatt die Lichtstufpunkte der Berührungskurve konstruiert sind, werden sie auf das Reinblatt für die zu schattierende Flächendarstellung durchgestochen, wobei für die richtige Lage des Pausblattes Merkmale vorgesehen sein müssen. Die Benützung des Papierstreifens zum Auftragen geradliniger Punktreihen ist auch hier ein schätzbare Förderungs-mittel.

Dieses zweite allgemeine Verfahren, das als dasjenige „mit berührenden Cylinderflächen“ bezeichnet werden kann, wird meist erheblich rascher zum Ziel führen, als das erste. Nur werden die Berührungskurven, die alle durch den höchsten Flächenpunkt laufen, sich in dessen Nähe häufen und anderwärts grössere leere Flächen



Figur 112 a.

tung und verbindet deren Berührungspunkte durch eine stetige Kurve, so bilden die Tangenten die Mantellinien einer horizontalen Cylinderfläche, welche die gegebene Fläche nach dieser Kurve berührt. Wo die ganzzahligen Lichtstufpunkte dieser Kurve liegen als auf einer Linie in der Cylinderfläche, da liegen sie auch für die gegebene Fläche. Der Normalschnitt der Cylinderfläche ist leicht getrennt herauszuzeichnen, da die Mantellinien nach Grundriss und Höhenlage bekannt sind. Die Bestimmung der Lichtstufenlinien auf der Cylinderfläche ist in Art. 99 gezeigt. Wo eine ganzzahlige Lichtstufenmantellinie, z. B. + 3, jene Berührungskurve schneidet, da ist ein Lichtstufpunkt + 3 auf der gegebenen Fläche. Weitere Richtungen der horizontalen Tangentengruppen geben weitere Berührungslinien und auf diesen weitere ganzzahlige Lichtstufpunkte.

Da es schwierig oder unmöglich ist, auf derselben Figur über ein System von vielen Horizontalkurven weg, die sich ja zuweilen auch überschneiden können, viele Paralleltangentengruppen verschiedener Richtung zu legen und getrennt aufzufassen, so wird man das Horizontal-

zwischen sich übrig lassen. In solche leere Stellen wird man kleinere Gruppen von Paralleltangenten einschalten, welche nur kurze Stücke von Berührungskurven liefern; auch kann wohl oft ein Hereinziehen des ersten Verfahrens für bestimmte Teile der Horizontalkurvengruppe zweckmässig sein.

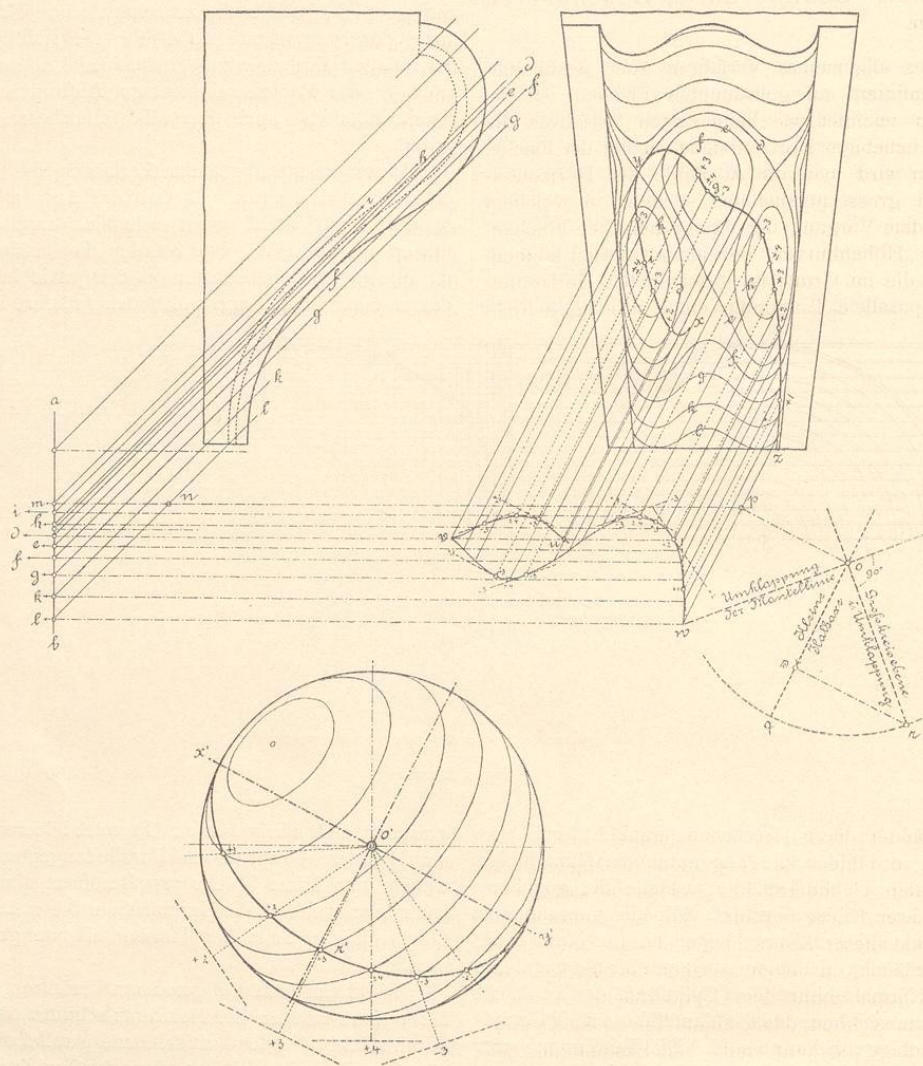
Wie beim ersten allgemeinen Verfahren, so sind auch bei diesem zweiten die Horizontalschnitte oft zu ersetzen durch solche, die der Vertikalebene parallel oder senkrecht zum Grundschnitt gerichtet oder schiefgerichtet, wenn auch senkrecht zu einer Grundebene sind.

Zur Darstellung der Konstruktion ist als erstes Beispiel die in Figur 111a gezeichnete exzentrische Wulstfläche mit denselben früher beschriebenen zur Vertikalebene parallelen Schnittebenen wiedergewählt. Mit einer beliebigen Richtung sind parallele Tangenten an die Schnittkurven gelegt und deren Berührungspunkte stetig verbunden worden; hiedurch ist die Kurve $x_2 s z_2$ entstanden, nach welcher die mit den Tangenten vorgestellte Cylinderfläche die Wulstfläche berührt. $a_2 b_2$ ist ein Normalschnitt der Cylinderfläche; durch Auftragen der

Abscissen und Ordinaten (Figur 112a rechts) ist die Normalschnittkurve selbst erhalten. Der Normalkugelaufschnitt (Figur 111a links) ist mit der Grosskreisebene $a_k b_k$ parallel zu $a_2 b_2$ geschnitten und der Schnittkreis samt seinen Lichtstufenpunkten in Figur 112a unten gezeichnet. Am Cylindernormalschnitt ist eine Tangente senkrecht zu dem Radius $o + 3$ gezogen und der Berührungspunkt $+ 3 n$

stufenpunkte können aus derselben Normalschnittkurve in Figur 112a abgeleitet werden. Einige weitere Tangentenrichtungen haben in Verbindung mit den in Art. 113b besprochenen Hauptlinien genügend viele weitere Lichtstufenpunkte der Fläche geliefert.

Für eine schräge Richtung der Schnittebenen ist die in Figur 73 dargestellte Röhrenfläche mit veränderlicher

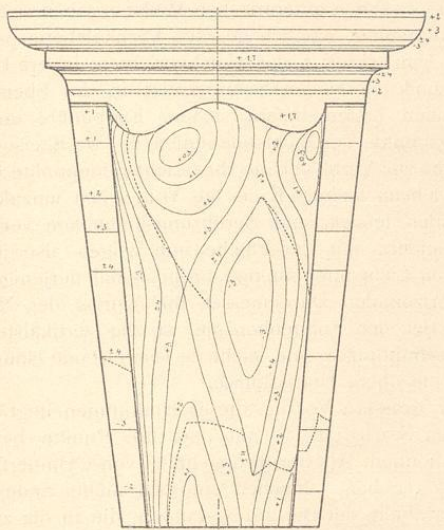


Figur 112b.

dieser Tangente auf die Linie $a_2 b_2$ nach $+ 3$ zurückgetragen. Der Schnitt der durch diesen Punkt $+ 3$ gezogenen Cylindermantellinie mit der Kurve $x_2 s_2 z_2$ liefert einen Lichtstufenpunkt $+ 3$ auf der Fläche. Die Figuren lassen auch die Bestimmung der andern ganzzahligen Lichtstufenpunkte der Berührungskurve $x_2 s_2 z_2$ verfolgen. Im Aufriss der Fläche ist noch eine zweite kongruente Berührungskurve, welche sich für eine symmetrische Tangentenrichtung ergeben würde, punktiert eingezeichnet; ihre Licht-

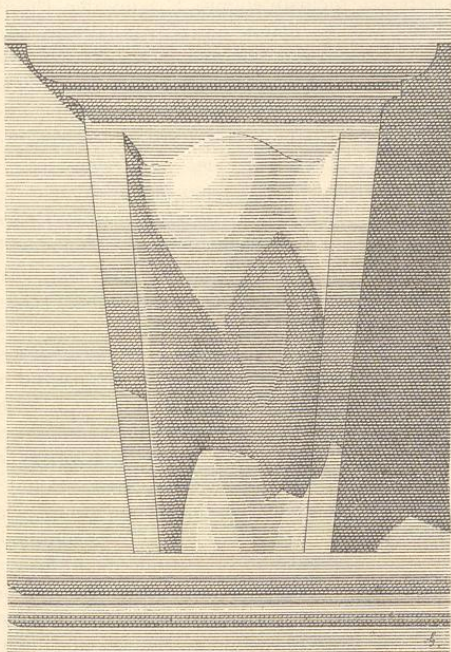
Erzeugenden, als Volutenkonsole mit Leitlinie parallel zur Seitenebene gedacht, ein interessantes Beispiel. Die in dieser Figur gezeichneten Schnittkurven der Fläche mit Lichtstrahlenebenen, die senkrecht zur Seitenebene stehen, können auch zur Bestimmung der Lichtstufenlinien verwendet werden. Zieht man (Figur 112b) mit einer beliebigen Richtung an diese Kurven parallele Tangenten, verbindet deren Berührungspunkte durch eine stetige Kurve xyz und betrachtet die in der Seitenprojektion gezogenen

Lichtstrahlen als die auch zu diesen Tangenten gehörigen Seitenprojektionen, so bilden die Tangenten eine Cylinderfläche, deren Spur oder Basis in der Vertikalebene oder



Figur 112 c.

einer beliebigen zu dieser parallelen Ebene ab durch Aufsuchen der Spuren ihrer Mantellinien bestimmt werden



Figur 112 d.

kann, und für welche jene Kurve xyz die Berührungslinie mit der Röhrenfläche darstellt. Wo auf dieser Linie die ganzzahligen Lichtstufenpunkte für die Cylinderfläche liegen, da liegen sie auch für die Röhrenfläche. Auf der Cylinderfläche sind die Lichtstufenlinien nach Art. 100

erhältlich; was dort für die horizontale Basis erklärt wurde, ist auf die in der Vertikalebene liegende leicht übertragbar. Durch weitere Gruppen paralleler Tangenten an dem schon früher für die Schlagschattenkonstruktion erhaltenen Schnitkurvensystem lassen sich genügend viele weitere Lichtstufenpunkte erhalten.

Figur 112 b macht ausser den Mantellinien der Berührungscylinderfläche die Konstruktion ihrer Basislinie oder Spur uvw auf einer zur Vertikalebene parallelen Ebene ab anschaulich. In etwas veränderter Ausführung der in Art. 100 erklärten Konstruktion ist die vertikalprojizierende Ebene der Cylindermantellinie $w\phi$ in die Vertikalebene umgeklappt, indem $\phi o = mn$ aufgetragen ist. wo ist die Umklappung der Mantellinie; die Ebene des Normalkugelgrosskreises, auf welchem die Lichtstufenpunkte der Cylinderfläche zu suchen sind, steht senkrecht zu der Mantellinie und projiziert sich auf die umzuklappende Ebene als eine Gerade or senkrecht zu wo . Ist or gleich dem Normalkugelradius, so ist os (die rechtwinklige Projektion von or auf og parallel $w\phi$) die kleine Halbachse der Ellipse, als welche sich jener Grosskreis im Aufriss der Normalkugel darstellt. Ihre grosse Achse $x'y'$, als der zur Vertikalebene parallele Durchmesser des Grosskreises, ist senkrecht zur Aufrissrichtung $w\phi$ der Mantellinien.

Durch die Schnitpunkte der Berührungselipse mit den Lichtstufenellipsen $+2 + 3 + 4$ und -3 sind die Radien, dann an die Basiskurve uvw Tangenten senkrecht zu diesen Radien gezogen. Die Berührungspunkte dieser letzten waren zu benützen wie beim ersten Beispiel, wofür die Mantellinien zu den Lichtstufenpunkten auf der Kurve xyz punktiert eingezeichnet sind.

Bemerkungen zu den besonderen und allge-113. meinen Verfahren.

Die beiden beschriebenen Konstruktionen für Lichtstufenlinien auf beliebig gekrümmten Flächen geben in ihrem Verhältnis zu den früheren Lösungen und für sich allein betrachtet noch zu folgenden Bemerkungen Anlass.

a) Die früher erklärten Lichtstufenbestimmungen für gerade Kreiskegel und Cylinderflächen, Drehungsflächen u. s. f. erweisen sich, wie zu vermuten war, als vereinfachte besondere Fälle des erstbeschriebenen allgemeinen Verfahrens, wenn dieses noch in einigen Richtungen erweitert gedacht wird. (Dabei ist nur abzusehen vom dreiaxigen Ellipsoid, elliptischen Hyperboloid und rechtwinkligen Konoid, die auf dem Umweg über eine Drehungsfläche beziehungsweise Wendelfläche zu ihren Lichtstufen gelangt sind.) Die Vereinfachung liegt zum grössten Teil in der Gestalt des geometrischen Ortes, der fast immer ein Kugelkreis war und zugleich den Kugelkreis der allgemeinen Lösung ersetzte, also zwei Kurven derselben zugleich vertrat; zum andern Teil findet sie sich darin, dass von den Punkten des geometrischen Ortes meist nur ein einziger zu suchen war und dieser sich leichter ergab, als im allgemeinen Fall; zu einem dritten Teil erscheint sie in einem vereinfachten Ziehen der parallelen Tangenten.

Für alle Horizontalschnitte des geraden vertikalen Kreiskegels und Cylinders war derselbe horizontale Kugelkreis der geometrische Ort, so dass nur ein solcher Schnitt nötig war; für die Drehungsflächen erschienen verschiedene Parallelkreise für verschiedene Parallelschnitte der Fläche; in beiden Fällen ersetzen sich die parallelen Tangenten der allgemeinen Lösung durch parallele Radien oder durch die Proportionalteilungen der geradlinigen Parallelkreisprojektionen, in denen ja doch immer das Gleichgerichtetsein der Tangenten vorgestellt wird. Bei schiefgerichteten geraden Kreiskegel- und Drehungsflächen liegt dieselbe Vereinfachung derjenigen Gestalt der allgemeinen Lösung vor, bei welcher schon die erste Schnittebenengruppe schiefgerichtet ist.

Für die schiefen Cylinderflächen beliebigen Normalschnitts gilt dasselbe, wogegen schon die Kegelfläche mit beliebiger Basis die allgemeine Lösung nur mit ganz unwesentlicher Vereinfachung erfordert, indem nur die Mantellinien an die Stelle der geneigten Kurventangenten der allgemeinen Lösung treten.

Die Röhrenflächen beider Arten bringen zwar wieder sehr einfache geometrische Orte auf der Kugel mit sich, erfordern jedoch andererseits eine erweiterte Auffassung der allgemeinen Lösung, indem hier schon für die erste Schnittebenengruppe das Gleichgerichtetsein aufgegeben ist.

Bei den Rückungsflächen erscheinen wieder die Parallelschnitte der allgemeinen Lösung. Ist die Erzeugende unveränderlich, so sind die geometrischen Orte auf der Kugel Grosskreise verschiedener Richtung und die Lösung gestaltet sich einfach. Bei veränderlichen und drehenden Erzeugenden fallen die Vereinfachungen weg und die allgemeine Lösung tritt ganz oder nahezu unverändert auf.

Bei den Schraubenflächen sind die parallelen Schnittebenen durch konzentrische Schnittcylinder ersetzt, weil hiedurch abermals ein einfacher geometrischer Kugelort erzielt wird; bei diesen Flächen ist also die allgemeine Lösung abermals in einer früher nicht ausgesprochenen Richtung erweitert aufzufassen. Das Gleichgerichtetsein der Horizontaltangenten ist hier zwar vorhanden, aber nicht unmittelbar herbeigeführt, sondern auf dem Umweg einer Verdrehung um den Winkel zwischen Gefällsline und Radius erzielt, so dass diese Lösung eine eigenartige Verbindung von Erweiterung und Vereinfachung des allgemeinen Verfahrens darstellt.

b) Auf den meisten gegebenen Flächen werden sich bestimmte Hauptlinien finden, für welche sich die Lichtstufenpunkte einfacher und mit grösserer Sicherheit bestimmen lassen, als nach den allgemeinen oder sonst anzuwendenden Verfahren. Schon bei der schraubenförmigen Wulstfläche war diese Tatsache festzustellen; ihre Lichtstufenpunkte auf der äussersten und innersten Schraubenlinie ergeben sich durch Betrachtung der zwei berührenden Vertikalzylinder unabhängig von der Konstruktion mit den Umhüllungskugeln. Auf demselben Weg können auf dem dreiachsigen Ellipsoid und elliptischen Hyperboloid die Lichtstufenpunkte auf denjenigen drei Schnittkurven, deren Ebenen je durch zwei Achsen gelegt

sind, unabhängig von der früher erklärten Konstruktion und mit grösserer Sicherheit erhalten werden.

Bei dem für die allgemeinen Lösungen als erstes Beispiel gewählten exzentrischen Wulst ergeben sich leicht vier Hauptlinien, nämlich der zur Vertikalebene parallele äussere Umrisskreis b , der gleichgerichtete innere Umrisskreis c und die beiden Schnittkreise in der Ebene sbc . Die beiden ersten liefern sichere Endpunkte und Berührungspunkte der Lichtstufenlinien da, wo Kreiscylinder senkrecht zur Vertikalebene ihre Lichtstufenpunkte hätten, nur sind beim kleinen Kreis die Vorzeichen umzukehren. Die beiden letzten sind Berührungslinien von vertikalen Kreiscylindern mit der Fläche und zeigen also je eine Reihe von Lichtstufenpunkten proportional derjenigen auf dem horizontalen Durchmesser im Aufriss der Normalkugel. Bei der Volutenkonsole ist die vertikalstehende Achsenschnittkurve eine leicht zu verwertende Hauptlinie, ebenso die obere Umrisskurve.

Der grössere Vorzug dieser Hauptlinien liegt in der grösseren Sicherheit, mit der ihre Punkte bestimmt werden können. Als Berührungslinien von Cylinderflächen mit den gegebenen Flächen sind sie nichts anderes als besondere Fälle der Berührungskurven, die in der zweiten allgemeinen Lösung auftreten. Es ist einleuchtend, dass für alle Umrisse, welche durch Auswölbung gebildet sind, dasselbe gilt, wie für den exzentrischen Wulst; die Tangente im Endpunkt und Berührungspunkt einer beliebigen Lichtstufenlinie + 3 an der Umrisslinie irgend einer solchen Fläche muss parallel sein der Tangente am gleichnamigen Punkt + 3 am Umriss der Normalkugel. Dies gilt ausdrücklich auch dann, wenn die Umrisskurve im Raum, das heisst die Berührungslinie des von den Projektionsloten gebildeten Cylinders mit der Fläche, eine schief liegende oder gewundene ist. Diese Tatsache ist als für die meisten Flächen sehr wichtig hervorzuheben. Unter anderem können die Endpunkte der Lichtstufenlinien am Umriss des gewundenen Säulenschaftes (Figur 109a) in dieser Weise genau bestimmt werden, ebenso im Aufriss der Wulströhre Figur 107c, endlich in den Figuren 106b und 111d.

c) Auf den meisten gegebenen Flächen werden sich gleich anfangs durch Ueberlegung oder Konstruktion bestimmte Linien feststellen lassen, welche von ganzzahligen Lichtstufenlinien nicht berührt oder durchschnitten werden können. Solche Scheidelinien der Lichtstufengruppe, welche einen Einblick in deren Verlauf frühzeitig eröffnen, haben sich schon bei den Drehungsflächen in Art. 94, Satz c) und Art. 95, Satz d) als nur gedachte Parallelkreise und zugleich Lichtstufenlinien + 1,7 oder - 1,7 gefunden. Bei dem rechtwinkligen Konoid in Art. 110 und Figur 77a und b sind die zwei horizontalen Fusslinien und die Scheitellinie solche Scheidelinien, und zwar geradlinige, während die übrigen Lichtstufenlinien gekrümmte sind, ebenso beim Kugelkonoid in Art. 111 die oberste und unterste Erzeugende.

Für beide allgemeine Verfahren ist als wichtige Tatsache hervorzuheben, dass jede Schnittkurve der ersten oder zweiten Gruppe, oder jede einer Trajektorie entsprechende Flächenkurve, oder endlich jede Berührungs-

linie einer Cylinderfläche eine solche Scheidelinie für alle diejenigen Lichtstufenlinien wird, deren Punkte nicht auf ihr vertreten sind. Diese Linien können sie nicht berühren oder durchschneiden. Wenn auch auf einer solchen Kurve gar kein Lichtstufenpunkt gefunden wird, so ist sie doch nicht fruchtlos ausgewählt und behandelt, sondern als eine solche Scheidelinie für den Verlauf der gesuchten Linien verwertbar.

d) Auf vielen Flächen finden sich Lichtstufenlinien mit Kreuzungspunkten zwischen vier Gruppen umkehrender Kurven; doch ist es ein seltener Zufall, wenn eine ganzzahlige Lichtstufenlinie sich selber schneidet. Schon beim ringförmig steigenden Gewölbe in Figur 106b und bei der schraubenförmigen Wulstfläche oder Röhre in Figur 107b sind solche Kreuzungen festgestellt und erörtert worden; während dort die Kurven unganzzahlige waren, ist bei der Volutenkonsolle in Figur 112c zufällig die Kurve + 3 eine Kreuzungskurve geworden. Wie sie als Kurve etwa + 3,5 bei dem exzentrischen Wulst zu vermuten sein dürfte, ist in Figur 111b punktiert eingezeichnet. Die scharfe Bestimmung ihrer Lage und Benennungszahl wäre aber bei diesem Beispiel minder einfach als bei den früheren und wohl nur durch Versuche möglich. Die gewundene Säule, Figur 109a, hat eine Kreuzungskurve zwischen + 2 und + 3.

e) Die zweite allgemeine Lösung in Art. 112 kann durch die Verwertung einer etwa vorhandenen Symmetrie der Fläche ebensowohl Arbeit ersparen wie die erste durch Benützung der Symmetrie der Kurven der geometrischen Orte auf der Kugel. Zu jeder Richtung der Tangenten bei beiden Beispielen in Art. 112 giebt es eine symmetrische, welche beim exzentrischen Wulst eine kongruente Normalschnittlinie bei veränderter Richtung der Normalschnittebene und bei der Volutenkonsolle eine symmetrische Spurlinie der Cylinderfläche ergibt.

f) Bei beiden allgemeinen Verfahren sind oft Tangenten in gegebenen Punkten an Kurven mit unbekanntem Gesetz zu ziehen und Berührungspunkte von Tangenten gegebener Richtung an solchen Kurven zu bestimmen. Dies muss meist nach Schätzung geschehen, wodurch eine kleinere oder grössere Unsicherheit über das Resultat der Konstruktion des Einzelpunktes unvermeidlich hereinkommt. (Um so wichtiger sind die oben unter b) genannten sicheren Punkte der Hauptlinien.) Man darf sich hienach durch einander mässig widersprechende Punktbestimmungen nicht beirren lassen. Im allgemeinen korrigieren sich die zu einer Kurve gehörigen Punkte gegenseitig, wenn genügend viele bestimmt werden, und gestatten, den Verlauf der Linie genügend richtig festzusetzen.

g) Häufig werden die ausgewählten Schnittkurven oder Berührungslinien der Cylinderflächen punktleere Räume zwischen sich übrig lassen, welche an wichtigen Stellen Unsicherheit über den Verlauf der Lichtstufenlinien mit sich bringen. In diesen Fällen, ebenso wo die gefundenen ganzzahligen Punkte stärkere Widersprüche aufweisen, wird man zu Versuchen greifen und sich für einen auf einer Kurve zu vermutenden Punkt die Frage stellen: „Welche Lichtstufe hat dieser Punkt?“ Diese

Frage ist mit Hilfe einer eingeschätzten Tangente an der Horizontalkurve und eines Trajektorienbruchstücks zu beantworten. Man erfährt hiedurch, ob der Punkt wirklich auf der Kurve liegt oder ob sie mehr oder weniger weit rechts oder links an ihm vorbeigehen muss. Besonders für tiefste und höchste Punkte, äusserste Punkte nach irgend einer Richtung, Wendepunkte und vermutete Ein- oder Ausbiegungen werden solche Stichproben oft zweckmässig sein.

h) Ist ein Gebilde durch Höhenkurven gegeben, so ist das zweite allgemeine Verfahren unmittelbar darauf verwendbar. Dies trifft für die Darstellung der Bodengestaltung durch Höhenkurven in topographischen Karten u. s. w. zu. Zu einem Versuch der Verwertung der beschriebenen, wenigstens verhältnismässig einfachen Lichtstufenbestimmung für die Schattierung von Reliefkarten in grösserem Massstab mag hiemit die Anregung gegeben sein. Die Vertikalbeleuchtung giebt leider keine Anschauung der Bodengestaltung; eine solche ist nur mit schräger Beleuchtung erhältlich, wie sie in der Dufourkarte und im topographischen Atlas der Schweiz gewählt ist. In so kleinem Massstab (1 : 100 000 beziehungsweise 1 : 50 000) liessen sich freilich die Abstufungen noch nicht wohl durchführen; auch wären hier die Schlagschatten, welche bei der eingebürgerten Lichtrichtung in Gebirgsdarstellungen auftreten würden, der Deutlichkeit noch nicht förderlich. Wohl aber wäre dies bei grösserem Massstab, von etwa 1 : 25 000 an, der Fall; es würde wohl damit insbesondere das anschauliche Hervortreten hoher Spitzen gewonnen werden, das bisher auch der Darstellung mit einseitiger Beleuchtung unerreichbar war.

Bei Darstellungen aus dem Hügelland und der wenig gegliederten Ebene würde eine flachere Lichtrichtung, etwa 36° , beziehungsweise 30° oder 25° zu wählen sein, doch nur soweit, dass Schlagschatten nur ausnahmsweise und in kleinen Flächen auftreten würden.

Der Arbeitsaufwand, den die Bestimmung der Lichtstufenlinien auf beliebig gekrümmten Flächen nach den beiden beschriebenen Verfahren erfordert, ist ein sehr grosser und zwar auch dann, wenn die Ableitung der Horizontalkurven oder anderen Parallelschnittkurven aus dem Gesetz der gegebenen Fläche sich einfach gestaltet. Ausserdem ist einzuräumen, dass die Technik nur selten Flächen verwendet, welche sich nicht mit den früher erklärten einfacheren Lösungen bewältigen lassen, und dass sie noch viel seltener solche anderen Flächen eingehend schattiert, so dass eine auch nur einigermaßen ausgedehnte praktische Verwertung der beiden allgemeinen Verfahren, abgesehen etwa von der angedeuteten topographischen Schattierung und der anschaulichen Darstellung mathematischer Flächen für Unterrichtszwecke, kaum je zu erwarten sein wird. Andererseits aber ist vom Standpunkt der Theorie aus festzustellen, dass die Lösungen bei allen denkbaren Flächen durchgeführt werden können und damit das Problem der Beleuchtungskunde in seinem ganzen Umfang gelöst ist.

XIII. Auftragen der Lichtstufen mit Strichlagen oder mit dem Pinsel.

114. Getrennte Streifen gleicher Lichtstärke.

Die Verwertung der mit den beschriebenen Konstruktionen abgeleiteten Lichtstufenlinien in den Darstellungen der technischen Gebilde besteht im Auftragen jeder Lichtstufe durch einen Malton bestimmter Stärke oder eine Strichlage mit bestimmter Breite und Entfernung der Striche. Man kann nun nicht wohl jedem Punkt der Fläche diejenige Lichtstärke geben, die er streng genommen haben müsste; es würde dazu ein fortwährendes Vertreiben und Verwaschen der Farbtöne und viel Nachbessern gehören, wodurch bei grossem Arbeitsaufwand und grosser Gefahr des Misslingens doch nur ein gekünsteltes, unkräftiges Bild entstehen würde. Auch wäre eine Schattierung mit überall gleich breit bleibenden parallelen Strichen unmöglich, wenn die stetige Veränderung der Flächenbeleuchtung genau wiedergegeben werden müsste; nur die künstlerische Darstellung mit gekrümmten an- und abschwelenden Strichen vermag dies zu erreichen. Man beschränkt sich daher auf eine Annäherung an den streng richtigen Zustand mit gleichmässig aufgetragenen, scharf getrennt bleibenden Streifen in deutlich verschiedenen Lichtstufen und benützt die ganzzahligen Linien gleicher Helle, wie sie die vorgeführten Konstruktionen ergeben, als Grenzlinien zwischen diesen Streifen. Jeden Streifen benennt man durch eine Zahl, die in der Mitte liegt zwischen den zwei Zahlen seiner Grenzlinien, so wird z. B. der Streifen zwischen den Linien + 2 und + 3 mit + 2,5 bezeichnet. Die Kappenfläche um den Punkt + 0 herum heisst + 0; sie bleibt im allgemeinen als weisses Papier, kann aber auch, um eine Körperfarbe zu bezeichnen, einen leichten Ton aufnehmen, der die Grundlage aller Schattierungstöne zu bilden hat.

Es erhebt sich nun die Frage, welcher der bei streng richtiger Schattierung auf ihm erscheinenden Lichtstufen jeder Streifen entsprechen soll. Es liegt nahe, immer den mittleren Parallelkreis eines Streifens als für diesen massgebend zu betrachten, wonach z. B. der ganze Streifen + 3,5 ebenso dunkel anzulegen wäre wie der Parallelkreis + 3,5 bei streng richtiger Schattierung. Diese Wahl hätte aber den Nachteil, dass unmittelbar auf den Lichtstreifen mit + 3,5 Lichtstärke der Reflexionstreifen - 3,5 mit - 3,5 Lichtstärke folgen, also die Lichtstärke $\pm 4 k$ ganz verschwinden und die Schattierung ihres kräftigsten Körperschattentons verlustig gehen würde. Daher ist es besser, jeden Streifen in derjenigen Lichtstufe zu halten, die sein erster, dem hellsten Punkt + 0 k zunächstliegender Parallelkreis bei streng richtiger Schattierung erhalten würde. Hiedurch werden die stetigen Abnahmen der Lichtstärke vom hellsten Punkt an durch stufenförmige, durchschnittlich fernerliegende ersetzt, also die helleren Lichtstufen im Durchschnitt auf etwas grössere Fläche gebracht, womit zugleich der in Art. 85 erwähnten Erfahrungsthat, dass die Lichtstärke bei den Schattierungen in der Wirklichkeit bis zu den Kreisen + 2 und + 3 weniger rasch abzunehmen scheint als nach dem zuvor abgeleiteten Gesetz der Lichtstufen zu schliessen wäre, in erwünschter

Weise Rechnung getragen wird. Die Reflexstöne werden dagegen etwas dunkler als sie im Mittel sein müssten; das heisst die Reflexwirkung wird in Beziehung auf ihren Flächenraum etwas eingeschränkt. Diese Thatsache kann in der später zu betrachtenden Wahl der Lichtstärke des hellsten Reflexpunktes, r berücksichtigt werden. Hienach erhält

Tafel A	die Kappenfläche	+ 0	die Lichtstärke des Punktes	+ 0 (h oder s)
	der Streifen	+ 0,7	die Lichtstärke des Parallelkreises	+ 0,3
	" "	+ 1,5	" "	+ 1
	" "	+ 2,5	" "	+ 2
	" "	+ 3,5	" "	+ 3
	" "	- 3,5	" "	+ 4 (k)
	" "	- 2,5	" "	- 3
	" "	- 1,5	" "	- 2
	" "	- 0,7	" "	- 1
	„ Kappenfläche	- 0	" "	- 0,3

Die Lichtstufe des hellsten Reflexpunktes - 0 (r) verschwindet; doch ist ja diese ohnehin in Vorder- und Oberansichten niemals sichtbar. Für die Schlagschattenstreifen gilt dasselbe wie für die gleichzahligen Lichtstreifen.

Bei grösseren Gebilden mit sehr breiten Lichtstufenstreifen empfiehlt es sich, zu Gunsten der Annäherung an die stetige Krümmung die Streifen noch in je zwei Teile zu teilen, so dass z. B. anstatt des Streifens + 1,5 zwei Streifen auftreten würden, nämlich + 1,25 und + 1,75. Die Streifen im Schatten, die einer solchen Teilung weniger bald bedürfen, da ihre Uebergänge an sich weicher und ihre Breiten durch Verkürzung kleiner sind als im Licht, können oft ungeteilt bleiben, wenn auch die Teilung im Licht durchgeführt wird. Auch die Kappenfläche innerhalb + 0,3 kann geteilt werden oder nicht. Wo man die weitestgehende Abstufung für nötig erachtet, erweitert sich die Reihe der Streifen und ihrer Lichtstufen wie folgt:

Tafel B

Die Kappenfläche + 0 erhält die Lichtstärke des Punktes + 0, der Streifen + 0,25 (zwischen + 0,2 u. + 0,3 gelegen) die Lichtstärke + 0,2									
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18

Wenn auch im allgemeinen die zwischen den angegebenen Grenzlinien liegenden Streifen in sich selber gleichmässig hell oder dunkel aufgetragen werden und mit deutlichen Gegensätzen stehen bleiben, so ist es doch nicht ausgeschlossen, bei gemalten Darstellungen in grossem Massstab nachträglich Uebergänge auf den äusseren Teilen der Streifen mit Vertreiben und Verwaschen leicht aufgetragener Zwischentöne herzustellen. Schwieriger sind solche Uebergänge bei schraffierten

Darstellungen zu gewinnen. Ein Anschwellen der Striche gegen eine dunklere Nachbarstrichlage, wie es zur Herstellung der stetigen Uebergänge notwendig wäre, lässt sich bis jetzt mit der Reissfeder nicht anders erhalten als durch einen zweiten, etwas schrägliegenden Strich auf jedem zuvor gezogenen.

115. Zahlenbewertung der Lichtstufen.

Im früheren sind anfangs die Verhältnisse der Lichtstufen in Zahlen ausgedrückt worden, indem sich für den hellsten Punkt und die Parallelkreise der Normalkugel die Lichtstufen oder Helligkeitswerte 4 3 2 1 0 aus dem Gesetz der Lichtstufen ergaben. Die Betrachtung der Reflexlichtwirkungen hob jedoch dieses einfache Verhältnis auf, indem sie an die Stelle der Lichtstärke Null, die nicht vorkommen kann, einen veränderlichen Wert k , Körperschattengrenzlicht oder Streiflicht, ebenso an die Stelle der Lichtstärke Vier einen anderen veränderlichen Wert h , hellster Punkt im Licht, setzte und in Ermangelung anderer Wahrscheinlichkeiten nur die arithmetische Reihe der fünf Werte beibehielt. Neben die beiden Hauptwerte k und h traten noch die Lichtstufen r , hellster Reflexpunkt, und s , dunkelster Schlagschattenpunkt, für welche als feststehend nur gelten kann, dass r einer bestimmten Lichtstärke zwischen k und h entspricht und s dunkler ist als k . Die Zwischenkreise von k nach r und von k nach s mit Einschluss dieser Hauptwerte selbst sind wieder als Glieder arithmetischer Reihen vorzustellen.

Anschliessend an Art. 85 sind nun in erster Linie bestimmte Annahmen für die Verhältnisse der vier Hauptlichtstufen und damit auch für ihre Zwischenglieder zu treffen; eine zweite Aufgabe ist die Wiedergabe jeder nach ihrem Verhältnis zu den andern festgestellten Lichtstufe durch einen Malton oder eine Strichlage.

Alle Freiheit der Wahl für den einzelnen Fall auf Grund des in Art. 85 Ausgesprochenen wiederholt anerkannt, ist im folgenden angenommen

1) dass die vier Hauptwerte und die ganzzahligen Zwischenstufen nicht nur von h nach k , von k nach r und von k nach s , sondern auch von r nach s eine arithmetische Reihe bilden, also die Unterschiede zwischen je zwei Schlagschattentönen ebenso gross sein sollen wie zwischen zwei Reflexstufen,

2) dass die Lichtstärke des hellsten Reflexpunktes r dem Parallelkreis + 2,5 der Normalkugel entsprechen, also in der Mitte zwischen derjenigen der Parallelkreise + 2 und + 3 liegen soll.

Die erste Annahme, dass die acht Unterschiede zwischen r und s gleich gross sein sollen, ist zwar willkürlich, aber naheliegend; sie erreicht offenbar die grösste Stetigkeit in der Zu- und Abnahme der Schattentöne und dürfte in der Wirklichkeit oft erfüllt sein. Die Feststellung der Lichtstärke des Reflexpunktes r entspricht einer ziemlich kräftigen Reflexwirkung, wie sie der Formendeutlichkeit der dargestellten Gebilde meist am günstigsten sein dürfte; übrigens sollen auch schwächere im Auge behalten werden.

Die Stärke der Reflexwirkung auf der Körperschatten-

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

seite hängt, wie in Art. 85 ausgeführt worden ist, in erster Linie von der Durchstrahlbarkeit des Materials ab; bei geringer Durchstrahlbarkeit, etwa trockenem Gips, würde der hellste Reflexpunkt r vielleicht noch heller werden können als der Parallelkreis + 2,5; bei starker Durchstrahlbarkeit (weissem Marmor, Alabaster) ist wegen des von innen heraus erhellten Streiflichts und der geringeren Zurückwerfung des Reflexlichtes selber die Reflexwirkung weniger fühlbar; in diesem Fall würde der Reflexpunkt r nur etwa bis zur Lichtstärke des Kreises + 3 aufsteigen dürfen. Noch geringere Reflexwirkung kann in künstlerischen Darstellungen günstig sein; für den hier vorliegenden Zweck würde sie zu wenig Abstufung der Körperschattentöne liefern. Bei der Wahl der Reflexlichtstärke für eine Darstellung ist auch der Hintergrund einigermaßen in Betracht zu ziehen. Auf dunklem Hintergrund scheinen die Reflexstufen infolge des Gegensatzes zu diesem heller zu sein als sie wirklich sind. Sogar wenn gar keine Reflexerhellung eingeführt und der Körperschatten durchaus gleich stark gehalten wird, ist neben dunklem Grund eine scheinbare Reflexwirkung vorhanden, wogegen bei hellem Hintergrund eine schon ziemlich kräftige Reflexerhellung sich wenig fühlbar macht. Ein sehr dunkler Hintergrund verlangt aber auch dunklere Haltung aller andern Schattentöne, wenn nicht die Vorstellung stark durchscheinenden Materials erweckt werden soll. Abgesehen von allen solchen besonderen Rücksichten wird sich jedoch die oben für die Reflexwirkung getroffene Annahme am häufigsten empfehlen.

Sobald nun ein Zahlenverhältnis einer der drei Lichtstufen k , r und s zu der Lichtstufe h festgesetzt ist, lassen sich die beiden übrigen aus den getroffenen Annahmen bestimmen und ebenfalls durch Zahlen ausdrücken. Wenn die im Schlagschatten befindliche Kugel eine arithmetische Reihe der Lichtstufen zwischen r und s darbieten, also k in der Mitte zwischen r und s liegen soll, so ergibt sich die Gleichung $r - k = k - s$; die zweite getroffene Wahl, dass Punkt r die Lichtstärke des Parallelkreises + 2,5 haben soll, führt mit Berücksichtigung der Lage dieses Parallelkreises und der arithmetischen Progression zwischen h und k zu der Proportion $h - r : r - k = 5 : 3$.

Wenn nun etwa angenommen wird, dass der dunkelste Schlagschattenton s ein Achtel der Lichtstärke des hellsten Punktes h darbieten soll, so hat man in der Gleichung und der Proportion $h = 1$ und $s = 1/8$ zu setzen; man erhält dann $k = 4/11$ und $r = 53/88$. Mit diesen vier Hauptlichtstufen ergeben sich, wenn zu Gunsten abgerundeter Zahlen $12/88$ anstatt $11/88$ und $52/88$ anstatt $53/88$ geschrieben wird, folgende Verhältniszahlen für die ganzzahligen Lichtstufen.

	Lichtkugel:	Schlagschattenkugel:
Tafel C	+ 0 (h) = 88	+ 0 (s) = 12
	+ 1 = 74	+ 1 s = 17
	+ 2 = 60	+ 2 s = 22
	+ 3 = 46	+ 3 s = 27
	+ 4 (k) = 32	+ 4 (k) = 32
	- 3 = 37	- 3 = 37
	- 2 = 42	- 2 = 42
	- 1 = 47	- 1 = 47
	- 0 (r) = 52	- 0 (r) = 52

Mit der Lichtstärke des dunkelsten Schlagschattentons gleich einem Zwölftel der Lichtstärke des hellsten Punktes ist $h=1$ und $s=1/12$ zu setzen; es wird dann $k=1/3$, $r=7/12$, und es erscheinen die einfacheren und genau passenden Verhältniszahlen folgender zwei Reihen, welche später in erster Linie den Strichlagen und Maltönen der Schattierung zu Grunde gelegt werden sollen.

Tafel D	Lichtkugel:	Schlagschattenkugel:
	$+0(h) = 48$	$+0(s) = 4$
	$+1 = 40$	$+1s = 7$
	$+2 = 32$	$+2s = 10$
	$+3 = 24$	$+3s = 13$
	$\pm 4(k) = 16$	$\pm 4(k) = 16$
	$-3 = 19$	$-3 = 19$
	$-2 = 22$	$-2 = 22$
	$-1 = 25$	$-1 = 25$
	$-0(r) = 28$	$-0(r) = 28$

Die Zahlenreihen zeigen entsprechend der für die Reflexstärke getroffenen Annahme für $-0(r)$ ganz oder annähernd die Mitte zwischen $+2$ und $+3$. Will man die oben erwähnte schwächere Reflexwirkung einführen, bei welcher der hellste Reflexpunkt nur bis zu der Lichtstärke des Lichtkreises $+3$ aufsteigt, so tritt an die Stelle der oben angesetzten Proportion die folgende: $h:r:r-k=3:1$; man erhält mit der weiteren Annahme $k=1/4$ die Werte $r=7/16$ und $s=1/16$ und damit folgende Verhältniszahlen:

Tafel E	Lichtkugel:	Schlagschattenkugel:
	$+0(h) = 64$	$+0(s) = 4$
	$+1 = 52$	$+1s = 7$
	$+2 = 40$	$+2s = 10$
	$+3 = 28$	$+3s = 13$
	$\pm 4(k) = 16$	$\pm 4(k) = 16$
	$-3 = 19$	$-3 = 19$
	$-2 = 22$	$-2 = 22$
	$-1 = 25$	$-1 = 25$
	$-0(r) = 28$	$-0(r) = 28$

Nach folgenden Zahlenreihen ist die Reflexwirkung zwischen den beiden zuvor angenommenen gewählt, und zwar mit $-0(r) = +2\frac{2}{3}$, dabei s nur ein Siebenzehntel von h :

Tafel F	Lichtkugel:	Schlagschattenkugel:
	$+0(h) = 68$	$+0(s) = 4$
	$+1 = 56$	$+1s = 8$
	$+2 = 44$	$+2s = 12$
	$+3 = 32$	$+3s = 16$
	$\pm 4(k) = 20$	$\pm 4(k) = 20$
	$-3 = 24$	$-3 = 24$
	$-2 = 28$	$-2 = 28$
	$-1 = 32$	$-1 = 32$
	$-0(r) = 36$	$-0(r) = 36$

Alle vier Annahmen für die Verhältniszahlenreihen sind berechtigt und noch andere, für welche die zwei grundlegenden Gleichungen ebenso zu verwerten wären, dürften getroffen werden. Die erste Reihe würde eine lichtere Schattierung mit starker Reflexwirkung, die zweite eine etwas kräftigere Schattierung mit derselben verhältnismässigen Reflexwirkung, die dritte und vierte eine abermals dunklere Schattierung mit geringeren Reflexwirkungen bedeuten, wie in der Photographie hellere und dunklere Abzüge von derselben Platte, stärkere und schwächere

Reflexe bei verschiedenen Aufnahmen desselben Gegenstandes erscheinen können.

An diese Zahlen knüpft sich notwendig die Frage: „Was bedeutet es eigentlich, wenn zwei Lichtstufen sich verhalten wie 88 zu 46 oder wie 64 zu 19 u. s. w.? Die Lichtempfindung kennt ja keine Verhältniszahlen; sie gestattet nur das Urteil ‚hell und etwas weniger hell‘ oder ‚hell und dunkel‘; sie kann eine Anzahl von Lichtstufen zwar in eine steigende oder fallende Reihe stellen, aber nicht scharf bewerten.“ Trotz dieser Thatsache ist eine Antwort auf die gestellte Frage möglich, und zwar mit dem Hinweis auf das physikalische Gesetz, dass die Lichtstärken zweier normal beleuchteten Ebenen umgekehrt proportional den Quadraten ihrer Entfernungen von der Lichtquelle sind. Mit Hilfe dieses Gesetzes liessen sich ganz wohl um eine künstliche Lichtquelle herum dreizehn gleichfarbige Ebenen in verschiedenen, durch Rechnung zu bestimmenden Entfernungen aufstellen, deren Beleuchtungsstufen der einen oder anderen oben gegebenen Reihe von Verhältniszahlen genau entsprechen würden. Die Zahlenbewertung der Lichtstufen auf einem durch Zeichnung gegebenen Raumgebilde ist hienach, sobald die erwähnten drei Annahmen über die Verhältnisse der vier Hauptlichtstufen getroffen sind, immer möglich; auch lässt sich bestimmen sagen, was die Zahlen bedeuten.

Wiedergabe der Lichtstufen.

116.

Weniger günstig steht es um den zweiten Teil der Aufgabe, um die Wiedergabe der durch Zahlen festgesetzten Lichtstufen durch Strichlagen oder Maltöne. Es ist fraglich, ob sie überhaupt streng richtig wiedergegeben werden können. Angenommen es sei für eine bestimmte Beleuchtungsstärke der Papierfläche die Reihe der Lichtstufen genau so aufgetragen, wie es jenen dreizehn um eine künstliche Lichtquelle aufgestellten Ebenen entspricht, das heisst die dreizehn verschieden dunkel bemalten oder schraffierten Ebenen in den hiefür berechneten Entfernungen von der künstlichen Lichtquelle aufgestellt, würden alle als gleich hell beurteilt werden, so dürften diese Abstufungen eben nur strenge Gültigkeit für die eine verwendete Lichtquelle, nicht auch für andere, nicht auch für Tagesbeleuchtung haben. Wahrscheinlich werden bei einer andern Beleuchtungsstärke die Verhältnisse der von den dreizehn gemalten oder schraffierten Papierebenen ausgesendeten Lichtmengen andere, also nicht mehr streng richtige werden. Im dunklen Zimmer dürfte eine bestimmte helle Fläche ein anderes Lichtmengenverhältnis gegenüber einer bestimmten dunkeln ergeben, als im Sonnenschein. Welche Beleuchtungsstärke der Papierfläche soll nun massgebend sein? Solange diese Frage sich nicht beantworten lässt, oder solange nicht sicher gestellt ist, dass die von einer nicht glänzenden Ebene unregelmässig reflektierte Lichtmenge bei jeder Beleuchtungsstärke denselben Bruchteil der empfangenen Lichtmenge darstellt, ist auch die Möglichkeit einer allgemeingültigen, streng richtigen Wiedergabe jener durch Zahlen ausgedrückten Lichtstufen mit Hilfe von Maltönen oder Strichlagen nicht sicher gestellt.

Dies ist aber noch die kleinere Schwierigkeit gegenüber der Unmöglichkeit, im Einzelfall des Schattierens die Probe mit den Entfernungen von einer Lichtquelle wirklich anzustellen und insbesondere mit Tagesbeleuchtung anzustellen. Dreizehn oder sechzehn als Proben aufgetragene Tuschtöne oder Strichlagen im dunklen Zimmer um ein Licht zu stellen, wäre eine viel zu weit greifende Einleitung der Arbeit, um so mehr als die Brauchbarkeit des Resultats für die Anschauung bei Tageslicht zweifelhaft wäre. Von einer strengen auf den absoluten Werten jener Zahlen fussenden Wiedergabe der Lichtstufen durch Maltöne oder Strichlagen kann auch aus diesem Grund nicht die Rede sein; nur Annäherungen sind möglich.

117. Schattierung mit Strichlagen.

Bei Schattierung mit Strichlagen kann man diese so wählen, dass das zwischen den Strichen übrig bleibende weisse Papier seinem Flächengehalt nach dieselben zwei arithmetischen Reihen bildet wie die Verhältniszahlen einer jener vier Tafeln (C bis F) für die Licht- und Schattenstufen. Die oben gegebene zweite Zahlenreihe z. B. (Taf. D) wird dann so wiedergegeben, dass die Lichtstufe $+0/h$ durch das weisse Papier dargestellt ist, $+0/s$ durch eine Strichlage oder Strichlagenkreuzung, welche nur $1/48$ vom weissen Papier übrig lässt, $+3$ im Licht durch eine Strichlage, welche $24/48$ vom weissen Papier übrig lässt u. s. w. Wenn von einer Strichlage zur benachbarten die Fläche des weissen Papiers um einen Bruchteil n der Gesamtfläche abnimmt, also die dunkle der Striche um denselben Bruchteil n zunimmt, wenn ferner das weisse Papier einen Bruchteil a und die dunkle Strichfläche einen weit kleineren Bruchteil b des von aussen auf sie fallenden Lichtes zurückwirft, so nimmt die vom weissen Papier ausgehende Lichtmenge bei diesem Uebergang a um $n a$ und die von der Strichfläche ausgehende Lichtmenge zu um $n b$; die Gesamtveränderung ist also eine Abnahme um $n(a - b)$. Da nun nach den aufgestellten Zahlenreihen n für alle Uebergänge von $+0(h)$ bis $+4(k)$ gleich gross ist (z. B. bei der Tafel $D = 8/48$), und ebenso für diejenigen von $-0(r)$ bis $+0(s)$ immer gleich gross ist (bei der Tafel $D = 3/48$), so sind auch die Unterschiede der von den Strichlagen ausgehenden Lichtmengen gleich gross. Mit solchen Strichlagen wird also in der That erreicht, dass bei allen Beleuchtungsstärken des Papiers die dargestellten Lichtstufen in Beziehung auf die Unterschiede dieselben zwei arithmetischen Reihen bilden, wie die Glieder der zu Grunde liegenden zwei Zahlenreihen für die Lichtstufen im Licht und im Schatten. Nur von den hiebei erzielten geometrischen Verhältnissen der Glieder lässt sich nicht dasselbe behaupten, da diese Verhältnisse wie auch dasjenige der Werte a und b bei verschiedenen Beleuchtungsstärken des Papiers wechseln dürften. Nun sind aber die Endglieder jener Zahlenreihen (Tafeln C bis F) selbst willkürlich gewählt; sie könnten auch beliebig anders und mit gleichem Recht so gewählt worden sein, wie es bei einer bestimmten Tagesbeleuchtung den entstandenen Strichlagen entspricht; es würde also auf diesem Weg eine

durchaus wohlbegründete Reihe von Strichlagetönen für die ganzzahligen Lichtstufen erreicht werden, wenn es möglich wäre, die zwei arithmetischen Reihen der bei der Schraffierung für die Licht- und Schattentöne übrig zu lassenden weissen Papierflächen streng richtig zu erzielen. (Für gekreuzte Strichlagen ist in dieser ganzen Erwägung vorausgesetzt, dass die Flächen der Strichkreuzungen nicht dunkler werden als die einfache Strichfläche, was nur bei sehr dunkler Strichfläche nahehin erfüllt ist.)

Es giebt Schraffierlineale, mit welchen durch Einstellen einer Druckschraube nach einer Skala die Abstände der Parallelstriche, von Mitte zu Mitte gemessen, genau nach einem verlangten Mass erhalten werden, und Reissfedern mit Teilscheibe, welche eine bestimmte Strichdicke auf Zwanzigstelsmillimeter genau liefern oder liefern sollen. Mit zwei solchen Instrumenten würde die Strichlage für jede einzelne Lichtstufe ziemlich genau der berechneten übrig zu lassenden weissen Papierfläche angepasst werden können. Nur ist zu beachten, dass die Reissfedern im längeren Gebrauch sich allmählich etwas erweitern und dann breitere Striche geben als die Teilscheibe anzeigt.

In dieser Weise könnte die Schattierung durchgeführt werden, ohne zur Feststellung der Lichtstufen der Zeichnung das Gefühl zu Hilfe zu nehmen. Es ist aber im Einzelfall ganz überflüssig, dieser Schätzung der Strichstärken dem Gefühl nach aus dem Wege zu gehen; sie führt weit rascher zum Ziel und giebt vielleicht Resultate, die dem Gefühl mehr zusagen, als die auf rechnerischem und mechanischem Weg erzielten. Man wird hiezu nach Festsetzung einer für alle Lichtstufenstreifen gleichbleibenden Strichweite vor Beginn der Arbeit Probeschraffierungen auf einem Nebenblatt ausführen und den Versuch so oft wiederholen, bis eine befriedigende Stetigkeit der Lichtstufen innerhalb der zuvor gewählten Grenzen des hellsten und dunkelsten Tons erzielt ist. Diesen letzten wird man nach dem Verhältnis und dem Dunkelheitsgrad der Schattenflächen gegenüber den Lichtflächen richten und bei Vorhandensein grosser dunkler Schattenflächen weit heller festsetzen, als wenn etwa bei wenig Schattenflächen die dunkleren Stufen des Schlagschattens gar nicht vertreten sind. Figur 112d ist ein Beispiel für den ersten Fall, Figur 109b für den zweiten, ein Versuch bei jener, die gleichzahligen Licht- und Schattenstufen wie bei dieser zu halten, ergab ein viel zu schwarzes Bild. Bei wichtigen Darstellungen erleichtert es die Beurteilung der Lichtstufen, wenn man die empfohlenen Probestrichlagen zu Lichtstufenstreifen eines Cylinders mit Schlagschattenpartien gestaltet.

Ob oder wie weit eine solche gefühlsmässig festgesetzte Reihe von Lichtstufentönen übereinstimmt mit einer durch Berechnung und jene beide Instrumente erhaltenen, wäre noch durch Versuche zu erproben.

Die Schraffierung kann entweder mit nur einer Strichlage für jede Lichtstufe oder mit gekreuzten Strichlagen für die dunkleren Töne durchgeführt werden. In den Figuren 109b und 111c ist das erste gewählt; die Strichweite ist in dem anderthalbmal grösseren Original der ersten Figur 0,8 mm, bei der zweiten 0,7 mm. Bei dem

gewundenen Säulenschaft war die Reihenfolge der Strichstärken etwa diese (die Zahlen sind Zehntelsmillimeter):

Kappenfläche + 0 ... weisses Papier

Streifen + 0,7 ... 0 (Einstellen der Teilscheibe auf 0 giebt einen feinen Strich)

„ + 1,5 ... 1
 „ + 2,5 ... $2\frac{1}{2}$
 „ + 3,5 ... $3\frac{1}{2}$
 „ — 3,5 ... $4\frac{1}{2}$
 „ — 2,5 ... 4
 „ — 1,5 ... $3\frac{1}{2}$
 „ — 0,7 ... 3
 „ + 3,5 ... $5\frac{1}{2}$.

In Figur 112d erscheint in den Schlagschattentönen und im Streifen — 3,5 neben der stärkeren Horizontalstrichlage eine unter 45° geneigte feinere. Hier wäre, da die Schlagschattentöne fast vollzählig auftreten und sich bis 1,5 s erstrecken, die Abstufung mit einer Strichlage gar nicht oder nur mit weit grösserer Strichweite durchzuführen gewesen, da es fast unmöglich ist, mit einer einzigen Lage sehr breiter Striche, die nur sehr schmale Streifen weissen Papiers zwischen sich übrig lassen, einen gleichmässigen Ton zu erhalten, indem die unvermeidlichen Verschiebungen einzelner Striche um Zehntels- oder Zwanzigstelsmillimeter schon empfindlich stören. Richtiger wäre es, bei Kreuzstrichlagen auch die Reflexöne — 2,5 — 1,5 — 0,7 mit solchen zu behandeln und dafür die ersten Strichlagen dieser Töne entsprechend heller zu halten, wonach alle Lichtöne mit einer, alle Schattentöne mit zwei Strichlagen auftreten würden.

118. Schattierung mit Maltönen.

Eine mit den oben genannten Instrumenten streng richtig hergestellte Reihe von Strichlagen könnte mit Maltönen derselben Farbe treu nachgebildet werden, indem jeder solche, in grösserer Entfernung vom Auge neben der nachzubildenden Strichlage aufgestellt, genau denselben Eindruck machen müsste wie diese. So wäre es also auch für Maltöne nicht unmöglich, jene Zahlenreihen in Beziehung auf das Wesentliche, auf ihre Eigenschaft als arithmetischer Reihen, wiederzugeben und damit eine auf Ueberlegung gegründete, durch Rechnung abgeleitete, nicht nur gefühlsmässig gefundene Reihe von Maltönen aufzustellen, welche in beliebig vielen Einzelfällen als Vorbild für die Lichtstufen dienen könnte.

Näher scheint es zu liegen, die arithmetische Reihe der Maltöne durch wiederholtes Auftragen eines und desselben Tons zu erzielen. Aber dieser nächste Weg führt höchstens bei wenigen leichten Tönen und auch dann nur annähernd richtig. Es wird keine arithmetische Reihe der Lichtstärken erhalten, wenn man einen ersten Streifen mit einem bestimmten Malton einmal, einen zweiten zweimal, einen dritten dreimal u. s. w. überlegt; vielmehr wird die Abnahme der Lichtstärke mit jedem weiteren Ton arithmetisch kleiner, also die Töne um so weniger wirksam, je mehr derselben schon vorher aufgetragen wurden. Dabei ist die Verschiedenheit der Wirkungen früher und später aufgetragener Töne so gross, dass sie unmöglich übergangen werden kann; ein Ton bestimmter Stärke als zehnte Schichte aufgetragen vermindert z. B. die ursprüng-

liche Lichtstärke etwa dreimal weniger, als wenn er die erste Schichte bildet. Diese Thatsache beruht nicht etwa nur auf einem Gefühlsurteil, das eine wirklich vorhandene arithmetische Reihe nicht als solche erkennen würde, sondern sie wird durch die Probe mit den Entfernungen von einer künstlichen Lichtquelle bestätigt; es handelt sich also um ein physikalisches Gesetz, nicht um ein solches der menschlichen Lichtempfindung. Ohne dieses Gesetz müssten z. B. acht Maltöne, von denen der erste (bei einer bestimmten Beleuchtungsintensität) die Lichtstärke des weissen Papiers nur um ein Achtel vermindert, schon die Lichtstärke Null, und zehn solcher Töne sogar eine Lichtstärke unter Null erzielen können, während doch undenkbar ist, dass eine gut beleuchtete, selbst mit hundert schweren Tönen bemalte Fläche gar kein Licht mehr unregelmässig zurückwerfe.

Die Wirkung dieses Gesetzes scheint dadurch verstärkt zu werden, dass das Papier dem ersten Farbton mehr Farbteilchen entnehmen und festhalten kann als dem zweiten, diesem mehr als dem dritten u. s. w., indem seine Ansaugungsfähigkeit durch die aufgetragenen Farbschichten vermindert wird.

Diese Eigenschaft ist schon vorher bei verschiedenen Papieren stark verschieden; glatte, gutgeleimte Papiere saugen die Farbflüssigkeit weniger kräftig an und lassen einen aus derselben Schale gezogenen Farbton heller erscheinen als raue, feuchte Papierflächen oft weit heller als stark ausgetrocknete. Es scheint sogar, dass später aufgetragene Farbtöne früheren dunklen wieder Farbteilchen wegnehmen können; ein sehr dunkler Ton, noch wenig eingetrocknet, kann durch einen nachfolgenden sehr flüssigen hellen Ton wieder heller werden. Da ferner auch ein erster Farbton, flüssig und voll aufgetragen, nach dem Auftrocknen eine erheblich dunklere Lichtstufe darstellt als bei zurückhaltendem trockenem Malen, so ist nicht zu erwarten, dass die Wirkung eines früher oder später aufgetragenen Farbtöns jemals streng durch Zahlen ausgedrückt werden kann.

C. F. A. Leroy („Die Stereotomie“, übersetzt von E. F. Kauffmann, 1847, § 230) giebt an, „dass die verschiedenen Lichtgrade, welche den Werten von $c = \frac{9}{10}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{7}{10}$... entsprechen, nicht genau erhalten werden durch ein wiederholtes Auftragen von 1 2 3 ... unter sich identischer Tuschlagen auf eine und dieselbe Zone; das Gesetz, durch welches das Verhältnis zwischen den Werten von c und der Zahl n der Tuschlagen bestimmt wird, ist vielmehr dasjenige, welches zwischen den Zahlen und ihren Logarithmen für eine nur wenig unter der Einheit genomme Grundzahl besteht“. In Beziehung auf die Begründung dieses Gesetzes verweist Leroy auf eine nicht mehr zugängliche andere Schrift.*)

Nach den mit einer künstlichen Lichtquelle angestellten Versuchen von C. Riess (Schattierungskunde 1871, § 18) „ist das Verhältnis zwischen den Werten der Helligkeiten c und der Zahl der Tuschlagen n , durch welche jene

*) Dies erinnert an das Weber'sche oder Fechner'sche Gesetz der Psychophysik, dass in allen Sinnesgebieten Empfindungen sich verhalten wie die Logarithmen ihrer Reize. Aber schon das oben über die Wirkung von acht Maltönen Gesagte lässt eine Erklärung der Thatsachen ausschliesslich aus Gesetzen der menschlichen Empfindung nicht zu.

Helligkeiten erzeugt werden, sehr nahe ausgedrückt durch die Gleichung $c = \left(\frac{1}{1+a \cdot n}\right)^2$, worin der Koeffizient a von der Stärke des einfachen Tones (Grundtones) abhängt, mit derselben in einfachem Verhältnis wächst und für einen Grundton, wie er beim Schattieren durch wiederholtes Auftragen gewöhnlich zur Anwendung kommt, zwischen 0,1 und 0,05 liegen mag⁴.

Dieser veränderliche, zwischen weiten Grenzen zu schätzende Koeffizient würde offenbar eine genaue Festsetzung der Wirkung des einzelnen Maltons auch dann nicht gestatten, wenn die oben berührten Zufälligkeiten, glattes und rauhes Papier, trockenes und feuchtes Papier, trockenes und flüssiges Malen nicht von Einfluss wären. Doch ist schon die Annäherung, welche die Formel gestattet, für den vorliegenden Zweck schätzbar. Durch Annahme zweier verschiedener Werte für den Koeffizienten a hat Riess folgende zwei Reihen für die Abnahme der Lichtstärke durch wiederholtes Auftragen eines und desselben Tuschtöns abgeleitet. Dabei ist für die erste Reihe ein Tushton vorausgesetzt, der einmal aufgetragen die Lichtstärke des weissen Papiers um ein Siebentel vermindert, für die zweite ein solcher, der sie um ein Zehntel vermindert. (Bei einem Ton, der nur ein Fünftel der Lichtstärke wegnimmt, ergab sich eine nahezu arithmetische Reihe der zehn ersten erzielten Lichtstufen; aber ein so heller Ton, der zehnmal aufgetragen erst etwa ein Fünftel der Lichtstärke wegnehmen würde, ist nicht verwertbar.) Wenn in den Riess'schen Aufstellungen und ihrer Verwertung immer von geometrischen Verhältnissen auf dem Papier aufgetragener Lichtstufentöne die Rede ist, so ist die Berechtigung hiezu nach dem früher Ausgeführten noch nicht sicher gestellt, da diese Verhältnisse mit der Beleuchtungsstärke des Papiers veränderlich sein dürften; doch handelt es sich hier ja überhaupt nur um Annäherungen. Die zwei Reihen sind die folgenden:

Tafel G	I) Für $n = 0$ ist $c = 1$	für $n = 13$ ist $c = 0,236$
	„ $n = 1$ „ $c = 0,866$	„ $n = 14$ „ $c = 0,237$
	„ $n = 2$ „ $c = 0,755$	„ $n = 15$ „ $c = 0,221$
	„ $n = 3$ „ $c = 0,666$	„ $n = 16$ „ $c = 0,206$
	„ $n = 4$ „ $c = 0,591$	„ $n = 17$ „ $c = 0,193$
	„ $n = 5$ „ $c = 0,528$	„ $n = 18$ „ $c = 0,181$
	„ $n = 6$ „ $c = 0,475$	„ $n = 19$ „ $c = 0,169$
	„ $n = 7$ „ $c = 0,429$	„ $n = 20$ „ $c = 0,160$
	„ $n = 8$ „ $c = 0,389$	„ $n = 30$ „ $c = 0,094$
	„ $n = 9$ „ $c = 0,355$	„ $n = 40$ „ $c = 0,062$
	„ $n = 10$ „ $c = 0,326$	„ $n = 50$ „ $c = 0,044$
	„ $n = 11$ „ $c = 0,299$	„ $n = 100$ „ $c = 0,014$
	„ $n = 12$ „ $c = 0,276$	„ $n = \infty$ „ $c = 0$
Tafel H	II) Für $n = 0$ ist $c = 1$	für $n = 8$ ist $c = 0,488$
	„ $n = 1$ „ $c = 0,9$	„ $n = 9$ „ $c = 0,453$
	„ $n = 2$ „ $c = 0,814$	„ $n = 10$ „ $c = 0,422$
	„ $n = 3$ „ $c = 0,741$	„ $n = 11$ „ $c = 0,394$
	„ $n = 4$ „ $c = 0,676$	„ $n = 12$ „ $c = 0,369$
	„ $n = 5$ „ $c = 0,621$	„ $n = 13$ „ $c = 0,347$
	„ $n = 6$ „ $c = 0,570$	„ $n = 14$ „ $c = 0,327$
	„ $n = 7$ „ $c = 0,527$	„ $n = 15$ „ $c = 0,309$
	Für spätere Zwecke mögen mit Beachtung des Gesetzes der Abnahme, nach welchem die Differenzen für die Einschaltung von Zwischengliedern berechnet werden können, noch folgende Glieder angefügt sein:	
	Für $n = 2,5$ ist $c = 0,776$	für $n = 9,5$ ist $c = 0,437$
	„ $n = 4,5$ „ $c = 0,647$	

Innerhalb der zehn ersten Glieder stimmt die Taf. H ganz befriedigend mit dem oben erwähnten von Leroy ausgesprochenen Gesetz überein; für die späteren Werte schliesst sich die Tafel G besser an dieses an; im ganzen unterstützen sich die Aufstellungen beider Verfasser so weit, als es bei der Unsicherheit aller Messungen unregelmässig zurückgeworfenen Lichtes erwartet werden kann.*)

*) Riess hat die Werte der ersten Reihe für n als Abscissen und die zugehörigen Werte von c als Ordinaten aufgetragen, wodurch die stetige Abnahme der Wirkung eines wiederholt aufgetragenen Tuschtöns an einer Kurve zur Anschauung gebracht wurde. Mit Hilfe dieser Kurve hat er diejenigen Lichtstufenkreise der Kugel abzuleiten gesucht, für welche die Tuschtöne in arithmetischer Progression aufgetragen werden können. Er erhält hiedurch auf der Lichtseite der Kugel anstatt der vier gleichen Teile, in welche der zur Lichtrichtung parallele Halbmesser durch die Ebenen der Lichtstufenkreise geteilt ist, eine Einteilung mit den Entfernungen 1 0,438 0,2 und 0,066 vom Mittelpunkt. Die Ableitung enthält aber einen Fehlschluss, indem nach richtiger Feststellung der Linien für das Auftragen von 5 10 15 und 20 Tönen die 20 einfachen Töne als durch 4 fünffache, die 15 einfachen als durch 3 fünffache ersetzbar gedacht sind und dann angenommen wird, die auf beiden Wegen erzielten Lichtstufentöne seien gleich dunkel, während doch bei 4 Tönen die Abnahme der Wirkung des wiederholten Auftragens eine weit geringere sein muss als bei 20. Wenn einmal festgestellt ist, dass die 20 Tonwerte allmählich kleiner werden und zwar sehr stark, so hört jedes einfache geometrische Verhältnis auf. (Nur in ganz geringem Umfang, mit zwei oder drei anderthalbfachen oder doppelten Tönen wie in einigen der unten aufgestellten Tafeln, kann ein Ersatz der einfachen Töne stattfinden, ohne dass ein fühlbarer Fehler entsteht.)

Es ist auch einleuchtend, dass die Lage der neuen Linien veränderlich mit der Zahl der gewählten Aufträge sein müsste, und dass sie z. B. eine andere sein müsste, wenn die Streiflichtstufe mit 7 Tönen, als wenn sie mit 10 oder 15 Tönen aufgetragen werden sollte. Man hätte also verschiedene Normalkugeln je nach der Zahl der gewünschten Tonschichten aufzustellen, und die Linien wären zwar für die Tonschichten ganzzahlig, aber als Lichtstufen nicht mehr, sondern auf jeder andern Normalkugel mit andern Bruchzahlen für ihre Lichtstufen zu bezeichnen. (So stark ungleich, wie oben angegeben, können die Teile des Halbmessers eben nur bei den 20 Tonschichten für die Streiflichtstärke werden, die für die dunkelsten Schlagschatten 60 bis 80 Töne bedeuten würden.) Schon aus diesen Gründen empfiehlt es sich nicht, mit der Lage der Lichtstufenlinien Rücksicht auf die Zahl der aufzutragenden Tonschichten zu nehmen, und eine Notwendigkeit hiezu liegt nicht vor, denn auch bei Gleichtheilung des Halbmessers ist eine genügend richtige Abstufung durch unveränderliche Tuschtöne mit Berücksichtigung ihrer abnehmenden Wirkung bei wiederholtem Auftragen zu erhalten, wie unten auf Seite 144 nachgewiesen ist.

Riess selber hat das in dieser Richtung erhaltene Resultat nicht weiter verfolgt und verwertet, sondern sich in einem anschliessenden Kapitel zur Ableitung einer zweiten, anders begründeten Abänderung der Lage der Lichtstufenlinien gewendet, die er endgültig beibehält, und in welcher die abnehmende Wirkung eines wiederholt aufgetragenen Maltons nicht berücksichtigt ist. Durch neue Versuche mit einer künstlichen Lichtquelle gelangt er zu dem Ergebnis, dass das in Art. 81 ausgesprochene Gesetz, das als „Sinusgesetz“ in der Physik allgemein anerkannt ist, in der Wirklichkeit nicht erfüllt sei, sondern dass bei kräftiger Beleuchtung die Lichtstufenlinien $+1 + 2 + 3$ der Kugel mit ungleichen Abständen näher zur Schattengrenze rücken als nach dem Sinusgesetz, wogegen sie sich bei sehr schwacher Lichtintensität im entgegengesetzten Sinn, also gegen den hellsten Punkt verschieben. Bei starker Lichtintensität nimmt die Lichtstufe einer ursprünglich zum Lichtstrahl normalen und langsam sich drehenden Ebene anfangs minder stark ab als der Sinus ihres Winkels mit dem Lichtstrahl, dafür aber später um so stärker; bei sehr schwacher Lichtintensität ist es umgekehrt. Hienach wäre also die Lage der ganzzahligen Lichtstufenlinien stark veränderlich mit der Intensität der Beleuchtung und es müsste, um eine der vielen möglichen Normalkugeln zu erhalten, eine bestimmte Annahme in dieser Beziehung gemacht werden. Riess wählt diejenige Lichtintensität aus, bei welcher die Linie $+1$ in Grundriss und Aufriss durch den Mittelpunkt des Kugelbildes geht, wonach die Lichtstärken der drei Grundebenen genau mit $+1$ zu bezeichnen wären. Hiebei wird der zur Lichtrichtung parallele Halbmesser durch die Ebenen der

119. Tonschichtenpläne für das Schattieren mit dem Pinsel.

a) Für normale Reflexwirkung, Tafeln I, K und L.

Obwohl als Folge der stufenweise abnehmenden Wirkung eines Maltons bei wiederholtem Auftragen zu erwarten wäre, dass eine arithmetische Reihe von Lichtstufentönen mit einem unveränderlichen Ton nicht oder nur dadurch erreicht werden könne, dass dieser einmal satt und flüssig, ein andermal mit schwachgefülltem Pinsel

aufgetragen werde, kann man doch die Lichtstufen der Tafel D (S. 138) samt denjenigen der Streifen + 0,7 durchaus befriedigend erhalten, ohne zu einer Verschiebung der Lichtstufenlinien zu greifen, indem man neben einem Lichtton 1 einen etwas stärkeren Schlagschattenton 1,5 einführt und die unganzzahligen, nachträglich eingeschalteten Lichtstufenstreifen 0,7 mit einem Halbton 0,5 behandelt, der dann auch zur Ergänzung einiger anderen Tonstufen benützt wird. Folgende Tafel (I) giebt die Reihenfolge der hiebei nötigen 12 Aufträge oder Tonschichten.

Tafel I

	Tonschichte Nummer:																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
	Kappe	+ 0 h	mit Lichtst.	+ 0	Streifen	+ 0,7	"	"	+ 0,5	"	+ 1	"		+ 2	"	+ 3	"	+ 4	"	+ 5	"	+ 6	"	+ 7	"	+ 8	"	+ 9	"	+ 10	"	+ 11	"	+ 12	"	+ 13	"	+ 14	"	+ 15	"	+ 16	"	+ 17	"	+ 18	"	+ 19	"	+ 20	"	+ 21	"	+ 22	"	+ 23	"	+ 24	"	+ 25	"	+ 26	"	+ 27	"	+ 28	"	+ 29	"	+ 30	"	+ 31	"	+ 32	"	+ 33	"	+ 34	"	+ 35	"	+ 36	"	+ 37	"	+ 38	"	+ 39	"	+ 40	"	+ 41	"	+ 42	"	+ 43	"	+ 44	"	+ 45	"	+ 46	"	+ 47	"	+ 48	"	+ 49	"	+ 50	"	+ 51	"	+ 52	"	+ 53	"	+ 54	"	+ 55	"	+ 56	"	+ 57	"	+ 58	"	+ 59	"	+ 60	"	+ 61	"	+ 62	"	+ 63	"	+ 64	"	+ 65	"	+ 66	"	+ 67	"	+ 68	"	+ 69	"	+ 70	"	+ 71	"	+ 72	"	+ 73	"	+ 74	"	+ 75	"	+ 76	"	+ 77	"	+ 78	"	+ 79	"	+ 80	"	+ 81	"	+ 82	"	+ 83	"	+ 84	"	+ 85	"	+ 86	"	+ 87	"	+ 88	"	+ 89	"	+ 90	"	+ 91	"	+ 92	"	+ 93	"	+ 94	"	+ 95	"	+ 96	"	+ 97	"	+ 98	"	+ 99	"	+ 100	"	+ 101	"	+ 102	"	+ 103	"	+ 104	"	+ 105	"	+ 106	"	+ 107	"	+ 108	"	+ 109	"	+ 110	"	+ 111	"	+ 112	"	+ 113	"	+ 114	"	+ 115	"	+ 116	"	+ 117	"	+ 118	"	+ 119	"	+ 120	"	+ 121	"	+ 122	"	+ 123	"	+ 124	"	+ 125	"	+ 126	"	+ 127	"	+ 128	"	+ 129	"	+ 130	"	+ 131	"	+ 132	"	+ 133	"	+ 134	"	+ 135	"	+ 136	"	+ 137	"	+ 138	"	+ 139	"	+ 140	"	+ 141	"	+ 142	"	+ 143	"	+ 144	"	+ 145	"	+ 146	"	+ 147	"	+ 148	"	+ 149	"	+ 150	"	+ 151	"	+ 152	"	+ 153	"	+ 154	"	+ 155	"	+ 156	"	+ 157	"	+ 158	"	+ 159	"	+ 160	"	+ 161	"	+ 162	"	+ 163	"	+ 164	"	+ 165	"	+ 166	"	+ 167	"	+ 168	"	+ 169	"	+ 170	"	+ 171	"	+ 172	"	+ 173	"	+ 174	"	+ 175	"	+ 176	"	+ 177	"	+ 178	"	+ 179	"	+ 180	"	+ 181	"	+ 182	"	+ 183	"	+ 184	"	+ 185	"	+ 186	"	+ 187	"	+ 188	"	+ 189	"	+ 190	"	+ 191	"	+ 192	"	+ 193	"	+ 194	"	+ 195	"	+ 196	"	+ 197	"	+ 198	"	+ 199	"	+ 200	"	+ 201	"	+ 202	"	+ 203	"	+ 204	"	+ 205	"	+ 206	"	+ 207	"	+ 208	"	+ 209	"	+ 210	"	+ 211	"	+ 212	"	+ 213	"	+ 214	"	+ 215	"	+ 216	"	+ 217	"	+ 218	"	+ 219	"	+ 220	"	+ 221	"	+ 222	"	+ 223	"	+ 224	"	+ 225	"	+ 226	"	+ 227	"	+ 228	"	+ 229	"	+ 230	"	+ 231	"	+ 232	"	+ 233	"	+ 234	"	+ 235	"	+ 236	"	+ 237	"	+ 238	"	+ 239	"	+ 240	"	+ 241	"	+ 242	"	+ 243	"	+ 244	"	+ 245	"	+ 246	"	+ 247	"	+ 248	"	+ 249	"	+ 250	"	+ 251	"	+ 252	"	+ 253	"	+ 254	"	+ 255	"	+ 256	"	+ 257	"	+ 258	"	+ 259	"	+ 260	"	+ 261	"	+ 262	"	+ 263	"	+ 264	"	+ 265	"	+ 266	"	+ 267	"	+ 268	"	+ 269	"	+ 270	"	+ 271	"	+ 272	"	+ 273	"	+ 274	"	+ 275	"	+ 276	"	+ 277	"	+ 278	"	+ 279	"	+ 280	"	+ 281	"	+ 282	"	+ 283	"	+ 284	"	+ 285	"	+ 286	"	+ 287	"	+ 288	"	+ 289	"	+ 290	"	+ 291	"	+ 292	"	+ 293	"	+ 294	"	+ 295	"	+ 296	"	+ 297	"	+ 298	"	+ 299	"	+ 300	"	+ 301	"	+ 302	"	+ 303	"	+ 304	"	+ 305	"	+ 306	"	+ 307	"	+ 308	"	+ 309	"	+ 310	"	+ 311	"	+ 312	"	+ 313	"	+ 314	"	+ 315	"	+ 316	"	+ 317	"	+ 318	"	+ 319	"	+ 320	"	+ 321	"	+ 322	"	+ 323	"	+ 324	"	+ 325	"	+ 326	"	+ 327	"	+ 328	"	+ 329	"	+ 330	"	+ 331	"	+ 332	"	+ 333	"	+ 334	"	+ 335	"	+ 336	"	+ 337	"	+ 338	"	+ 339	"	+ 340	"	+ 341	"	+ 342	"	+ 343	"	+ 344	"	+ 345	"	+ 346	"	+ 347	"	+ 348	"	+ 349	"	+ 350	"	+ 351	"	+ 352	"	+ 353	"	+ 354	"	+ 355	"	+ 356	"	+ 357	"	+ 358	"	+ 359	"	+ 360	"	+ 361	"	+ 362	"	+ 363	"	+ 364	"	+ 365	"	+ 366	"	+ 367	"	+ 368	"	+ 369	"	+ 370	"	+ 371	"	+ 372	"	+ 373	"	+ 374	"	+ 375	"	+ 376	"	+ 377	"	+ 378	"	+ 379	"	+ 380	"	+ 381	"	+ 382	"	+ 383	"	+ 384	"	+ 385	"	+ 386	"	+ 387	"	+ 388	"	+ 389	"	+ 390	"	+ 391	"	+ 392	"	+ 393	"	+ 394	"	+ 395	"	+ 396	"	+ 397	"	+ 398	"	+ 399	"	+ 400	"	+ 401	"	+ 402	"	+ 403	"	+ 404	"	+ 405	"	+ 406	"	+ 407	"	+ 408	"	+ 409	"	+ 410	"	+ 411	"	+ 412	"	+ 413	"	+ 414	"	+ 415	"	+ 416	"	+ 417	"	+ 418	"	+ 419	"	+ 420	"	+ 421	"	+ 422	"	+ 423	"	+ 424	"	+ 425	"	+ 426	"	+ 427	"	+ 428	"	+ 429	"	+ 430	"	+ 431	"	+ 432	"	+ 433	"	+ 434	"	+ 435	"	+ 436	"	+ 437	"	+ 438	"	+ 439	"	+ 440	"	+ 441	"	+ 442	"	+ 443	"	+ 444	"	+ 445	"	+ 446	"	+ 447	"	+ 448	"	+ 449	"	+ 450	"	+ 451	"	+ 452	"	+ 453	"	+ 454	"	+ 455	"	+ 456	"	+ 457	"	+ 458	"	+ 459	"	+ 460	"	+ 461	"	+ 462	"	+ 463	"	+ 464	"	+ 465	"	+ 466	"	+ 467	"	+ 468	"	+ 469	"	+ 470	"	+ 471	"	+ 472	"	+ 473	"	+ 474	"	+ 475	"	+ 476	"	+ 477	"	+ 478	"	+ 479	"	+ 480	"	+ 481	"	+ 482	"	+ 483	"	+ 484	"	+ 485	"	+ 486	"	+ 487	"	+ 488	"	+ 489	"	+ 490	"	+ 491	"	+ 492	"	+ 493	"	+ 494	"	+ 495	"	+ 496	"	+ 497	"	+ 498	"	+ 499	"	+ 500	"	+ 501	"	+ 502	"	+ 503	"	+ 504	"	+ 505	"	+ 506	"	+ 507	"	+ 508	"	+ 509	"	+ 510	"	+ 511	"	+ 512	"	+ 513	"	+ 514	"	+ 515	"	+ 516	"	+ 517	"	+ 518	"	+ 519	"	+ 520	"	+ 521	"	+ 522	"	+ 523	"	+ 524	"	+ 525	"	+ 526	"	+ 527	"	+ 528	"	+ 529	"	+ 530	"	+ 531	"	+ 532	"	+ 533	"	+ 534	"	+ 535	"	+ 536	"	+ 537	"	+ 538	"	+ 539	"	+ 540	"	+ 541	"	+ 542	"	+ 543	"	+ 544	"	+ 545	"	+ 546	"	+ 547	"	+ 548	"	+ 549	"	+ 550	"	+ 551	"	+ 552	"	+ 553	"	+ 554	"	+ 555	"	+ 556	"	+ 557	"	+ 558	"	+ 559	"	+ 560	"	+ 561	"	+ 562	"	+ 563	"	+ 564	"	+ 565	"	+ 566	"	+ 567	"	+ 568	"	+ 569	"	+ 570	"	+ 571	"	+ 572	"	+ 573	"	+ 574	"	+ 575	"	+ 576	"	+ 577	"	+ 578	"	+ 579	"	+ 580	"	+ 581	"	+ 582	"	+ 583	"	+ 584	"	+ 585	"	+ 586	"	+ 587	"	+ 588	"	+ 589	"	+ 590	"	+ 591	"	+ 592	"	+ 593	"	+ 594	"	+ 595	"	+ 596	"	+ 597	"	+ 598	"	+ 599	"	+ 600	"	+ 601	"	+ 602	"	+ 603	"	+ 604	"	+ 605	"	+ 606	"	+ 607	"	+ 608	"	+ 609	"	+ 610	"	+ 611	"	+ 612	"	+ 613	"	+ 614	"	+ 615	"	+ 616	"	+ 617	"	+ 618	"	+ 619	"	+ 620	"	+ 621	"	+ 622	"	+ 623	"	+ 624	"	+ 625	"	+ 626	"	+ 627	"	+ 628	"	+ 629	"	+ 630	"	+ 631	"	+ 632	"	+ 633	"	+ 634	"	+ 635	"	+ 636	"	+ 637	"	+ 638	"	+ 639	"	+ 640	"	+ 641	"	+ 642	"	+ 643	"	+ 644	"	+ 645	"	+ 646	"	+ 647	"	+ 648	"	+ 649	"	+ 650	"	+ 651	"	+ 652	"	+ 653	"	+ 654	"	+ 655	"	+ 656	"	+ 657	"	+ 658	"	+ 659	"	+ 660	"	+ 661	"	+ 662	"	+ 663	"	+ 664	"	+ 665	"	+ 666	"	+ 667	"	+ 668	"	+ 669	"	+ 670	"	+ 671	"	+ 672	"	+ 673	"	+ 674	"	+ 675	"	+ 676	"	+ 677	"	+ 678	"	+ 679	"	+ 680	"	+ 681	"	+ 682	"	+ 683	"	+ 684	"	+ 685	"	+ 686	"	+ 687	"	+ 688	"	+ 689	"	+ 690	"	+ 691	"	+ 692	"	+ 693	"	+ 694	"	+ 695	"	+ 696	"	+ 697	"	+ 698	"	+ 699	"	+ 700	"	+ 701	"	+ 702	"	+ 703	"	+ 704	"	+ 705	"	+ 706	"	+ 707	"	+ 708	"	+ 709	"	+ 710	"	+ 711	"	+ 712	"	+ 713	"	+ 714	"	+ 715	"	+ 716	"	+ 717	"	+ 718	"	+ 719	"	+ 720	"	+ 721	"	+ 722	"	+ 723	"	+ 724	"	+ 725	"	+ 726	"	+ 727	"	+ 728	"	+ 729	"	+ 730	"	+ 731	"	+ 732	"	+ 733	"	+ 734	"	+ 735	"	+ 736	"	+ 737	"	+ 738	"	+ 739	"	+ 740	"	+ 741	"	+ 742	"	+ 743	"	+ 744	"	+ 745	"	+ 746	"	+ 747	"	+ 748	"	+ 749	"	+ 750	"	+ 751	"	+ 752	"	+ 753	"	+ 754	"	+ 755	"	+ 756	"	+ 757	"	+ 758	"	+ 759	"	+ 760	"	+ 761	"	+ 762	"	+ 763	"	+ 764	"	+ 765	"	+ 766	"	+ 767	"	+ 768	"	+ 769	"	+ 770	"	+ 771	"	+ 772	"	+ 773	"	+ 774	"	+ 775	"	+ 776	"	+ 777	"	+ 778	"	+ 779	"	+ 780	"	+ 781	"	+ 782	"	+ 783	"	+ 784	"	+ 785	"	+ 786	"	+ 787	"	+ 788	"	+ 789	"	+ 790	"	+ 791	"	+ 792	"	+ 793	"	+ 794	"	+ 795	"	+ 796	"	+ 797	"	+ 798	"	+ 799	"	+ 800	"	+ 801	"	+ 802	"	+ 803	"	+ 804	"	+ 805	"	+ 806	"	+ 807	"	+ 808	"	+ 809	"	+ 810	"	+ 811	"	+ 812	"	+ 813	"	+ 814	"	+ 815	"	+ 816	"	+ 817	"	+ 818	"	+ 819	"	+ 820	"	+ 821	"	+ 822	"	+ 823	"	+ 824	"	+ 825	"	+ 826	"	+ 827	"	+ 828	"	+ 829	"	+ 830	"	+ 831	"	+ 832	"	+ 833	"	+ 834	"	+ 835	"	+ 836	"	+ 837	"	+ 838	"	+ 839	"	+ 840	"	+ 841	"	+ 842	"	+ 843	"	+ 844	"	+ 845	"	+ 846	"	+ 847	"	+ 848	"	+ 849	"	+ 850	"	+ 851	"	+ 852	"	+ 853	"	+ 854	"	+ 855	"	+ 856	"	+ 857	"	+ 858	"	+ 859	"	+ 860	"	+ 861	"	+ 862	"	+ 863	"	+ 864	"	+ 865	"	+ 866	"	+ 867	"	+ 868	"	+ 869	"	+ 870	"	+ 871	"	+ 872	"	+ 873	"	+ 874	"	+ 875	"	+ 876	"	+ 877	"	+ 878	"	+ 879	"	+ 880	"	+ 881	"	+ 882	"	+ 883	"	+ 884

*) Bei hellem Hintergrund bleibt für den Streifen — 0,7 die zwölfte Tonschichte 0,5 weg; die Summe wird dann 4 anstatt 4,5.

Alle drei Töne 0,5, 1 und 1,5 wird man schon vor dem Auftragen der Tonschichten zurichten und ins richtige Verhältnis zu einander setzen, indem man einen

Lichtstufenkreise vom hellsten Punkt aus (anstatt der Gleichteilung mit 1 0,75 0,5 0,25 0) in folgendem Verhältnis geteilt: 1 0,5787 0,2680 0,0688 0. Für die Lichtstufe + 0,5 ist noch ein Teilpunkt mit 0,7703 eingeschaltet. Die Lichtstufenkreise der Körperschattenhälfte liegen nicht symmetrisch zu denen der Lichthälfte, sondern zeigen folgende Abstände vom Mittelpunkt: 1 0,7467 0,3907 0,1070 0.

Unter anderem wird festgestellt, dass die Gleichteilung des Halbmessers durch die Ebenen der Lichtstufenkreise, wie sie aus dem Sinusgesetz hervorgeht, bei keiner Lichtintensität streng richtig sein könne und als Annäherung aufgefasst einer sehr geringen Lichtintensität entspreche, nämlich derjenigen, welche zwei Stearinkerzen in einer Entfernung von 1,62 m von der Kugel für diese erzeugen.

Mit der neuen Lage der Lichtstufenlinien soll die Schattierung in der Darstellung der Körper derjenigen der Wirklichkeit mehr angepasst werden, welche besonders bei Sonnenbeleuchtung erhebliche Unterschiede gegenüber der aus dem Sinusgesetz abgeleiteten darbietet. Schon oben (Seite 89) ist ausgesprochen worden, dass sich die helleren Lichtflächen in der Wirklichkeit mehr ausdehnen, in sich nur geringe Unterschiede zeigen und fast sprunghaft in das Streiflicht übergehen; diese Merkmale, besonders deutlich bei Sonnenbeleuchtung, finden sich auch noch bei guter Tagesbeleuchtung ohne Sonnenschein, etwa durch ein grosses Fenster, in geringerem

probeweise für 0,5 angenommenen Ton auf einer zweiten Probefläche zweimal, auf einer dritten dreimal aufträgt, und die zweite Probe, ganz wenig verstärkt, für den Ton 1,

Mass. Mit dieser Tatsache sind die von Riess erhaltenen Resultate im Einklang, und es ist kaum zu bezweifeln, dass das Sinusgesetz ungenau oder zum mindesten auf eine bestimmte Beleuchtungsintensität beschränkt ist, so dass es eines allgemeineren Gesetzes bedarf, in welchem die Beziehung zwischen dem Lichtstrahlenwinkel und der Lichtstärke der beleuchteten Ebene mit der Beleuchtungsintensität veränderlich auftritt. Es wäre zu wünschen, dass die in dieser Richtung von Riess mit den einfachsten Hilfsmitteln angestellten Versuche mit Apparaten grösserer Vollkommenheit wiederholt und zur Aufstellung eines Gesetzes verwertet würden — wenn je ein solches aufgestellt werden kann, und die zu Tage tretenden, dem Sinusgesetz widersprechenden Erscheinungen nicht etwa die veränderlichen Folgen von Zufälligkeiten im Gefüge oder der Durchstrahlbarkeit der Oberflächen verschiedener Stoffe sind.

Aber auch bei Anerkennung aller Gründe, die zu jener Abänderung der ursprünglichen Gestalt der Normalkugel geführt haben, dürfte doch diese letzte vorzuziehen und selbst dann noch als zweckmässige Vereinfachung einer strengrichtigen festzuhalten sein, wenn einmal das Sinusgesetz umgestossen und durch ein anderes ersetzt werden sollte. Der Vorzug der grösseren Einfachheit, den sie darbietet, sollte nicht aufgegeben werden, solange kein dringender Grund dafür vorliegt, und nachdem Riess selber festgestellt hat, dass bei einer Beleuchtungsstärke die Gleichteilung

doppelte ersetzt werden, weil mit diesen letzten die abnehmende Wirkung späterer Töne sich stärker äussert, also nicht derselbe Grad der Dunkelheit erzielt wird (nur in kleinem Umfang, wie oben in der Tafel I und K durch Einführen der drei Schichten mit 1,5 Tonsstärke, ist ein solcher Ersatz zulässig). Ausserdem würde mancher Streifen zwanzig und mehr Mal zu übermalen sein.

Zur Beantwortung der Frage, wie weit die aus den zwölf Tonschichten der Tafel I erhaltenen Lichtstufentöne mit der in der Tafel D (Seite 138) verlangten arithmetischen Reihe im Einklang sind, führt folgende Betrachtung. Nach der zweiten von Riess aufgestellten Zahlenreihe (Tafel H, Seite 141) drücken 7 Tonschichten, von welchen eine einzige die Lichtstärke Eins des weissen Papiers um ein Zehntel vermindert, diese Lichtstärke auf 0,527 herab. Wenn nun die Tafel D auf eine zur Vergleichung mit dieser Zahlenreihe brauchbare Form gebracht werden soll, so muss das erste Glied der Tafel D dem ersten Glied der Zahlenreihe H gleichgesetzt werden und das mit 7 Tonschichten als Lichtstufe + 4 herzustellende Glied der Tafel D genau dem Glied der Zahlenreihe H für 7 Tonschichten entsprechen; es wird sich dann fragen, ob auch die übrigen Glieder übereinstimmen. Der Zahlenwert $+0h = 48$ der Tafel D ist also durch eins, der Zahlenwert $+4 = 16$ der Tafel D durch 0,527 zu ersetzen. Einer der 48 Teile der Tafel B ist gleich $\frac{1}{32}$ ($1 - 0,527$) oder 0,01478, die Anfangsdifferenzen mit 8 Teilen sind gleich 8 mal 0,01478 oder 0,11824, die übrigen mit 3 Teilen gleich 3 mal 0,01478 oder 0,04434 zu setzen. Hieraus ergibt sich folgende Gegenüberstellung, bei welcher die unganzzahligen Lichtstufen nicht in Betracht zu ziehen waren.

Streifen:	mit Lichtstufe:	erhält Tonschichten:	und damit nach Taf. H eine Lichtstärke:	sollte nach Taf. D als Lichtstärke erhalten:	wird also:
+ 0 h	+ 0 h	0	1	1	
+ 1,5	+ 1	1	0,900	0,882	um 0,018 zu hell
+ 2,5	+ 2	2,5	0,776	0,764	„ 0,012 „ „
+ 3,5	+ 3	4,5	0,647	0,645	„ 0,002 „ „
— 3,5	+ 4	7	0,527	0,527	
— 2,5	— 3	6	0,570	0,571	
— 1,5	— 2	5	0,621	0,616	
— 0,7	— 1	4,5 ^{*)}	0,647	0,660	„ 0,013 „ dunkel
+ 3,5 s	+ 3 s	8	0,488	0,483	
+ 2,5 s	+ 2 s	9,5	0,437	0,438	
+ 1,5 s	+ 1 s	11	0,394	0,394	
+ 0 s	+ 0 s	13	0,347	0,350	

^{*)} Streifen — 0,7 erhält bei hellem Hintergrund nur 4 Tonschichten mit Lichtstärke 0,676 und wird dann um 0,016 zu hell.

Diese Gegenüberstellung zeigt nur sehr kleine Differenzen, die neben dem unvermeidlichen weit grösseren Einfluss der oben berührten Zufälligkeiten im Zustand des Papiers, im Grad der Pinselfüllung u. s. w. verschwinden, wonach die 12 Tonschichten eine so vollständige Wiedergabe der Zahlenwerte aus Tafel D erzielen, als sie überhaupt verlangt werden kann. Dabei ist hervorzuheben, dass Streifen + 1,5 um 18 Tausendstel zu hell, Streifen + 2,5 um 12 Tausendstel zu hell, Streifen + 3,5 nur noch um

7 Tausendstel zu hell ist, wonach gerade die lichter Töne ein wenig zu hell sind, der Ueberschuss aber ganz gesetzmässig abnimmt und verschwindet. Diese Thatsache kann nur erwünscht sein, indem sie einen weiteren Beitrag dazu liefert, die helleren Lichttöne im ganzen um eine Spur heller zu erhalten und dadurch die Schattierung der Wirklichkeit noch einen kleinen Schritt mehr anzunähern, ohne zu einer Verschiebung der Lichtstufenlinien greifen zu müssen (vgl. die Anmerkung auf Seite 142 und die Begründung der Tafel U, Seite 146).

Streifen — 0,7, der gewöhnlich als äusserster Reflex-tonstreifen den Umriss bildet, ist mit 4,5 Tonschichten um 0,013 zu dunkel, mit 4 Tonschichten um 0,016 zu hell. Man wird daher mit Rücksicht auf die Einwirkung des Hintergrundes (vgl. S. 137) bei dunklerem Hintergrund die 4,5 Tonschichten, bei hellerem die 4 Tonschichten gelten lassen; in beiden Fällen wird die kleine Abweichung von der berechneten Lichtstufe in Verbindung mit dem Gegensatz zum Hintergrund nur förderlich sein. Wo eine Lichtstufe — 0 vorkommt, welche die Tonschichtenzahl 4 zu erhalten hat, muss für den Streifen — 0,7 die Zahl 4,5 bleiben.

Für die Lichtstufe + 4 können offenbar weniger als 7 oder allenfalls 6 einfache Tonschichten niemals genügen. Die Lichtstärke + 1 kann nicht weniger als einen Ton erhalten, und wenn die Schritte zwischen den Reflex-tönen durch einen Ton erzielt werden, so können diejenigen zwischen den Lichttönen nicht weniger als zwei Töne erfordern. Die Lichtstufen ergeben sich also nach Tafel I (unter der Voraussetzung, dass im wesentlichen ein einfacher Farbton wiederholt aufgetragen werden soll) zugleich mit dem geringsten Arbeitsaufwand. Diesem Zweck dient auch die Verstärkung des Tons auf 1,5 in den drei letzten Tonschichten, ohne welche 13 oder 14 Aufträge nötig wären.

In ähnlicher Weise wie aus Tafel D mit Benützung der Tafel H die Tafel I abgeleitet ist, liessen sich auch aus den Tafeln C, E, F Lichtstufenpläne ableiten und dadurch andere Reflex- und Schlagschattenwirkungen erzielen. Doch ist hier ein näherer Weg hiezu gewählt; die Lichtstufenzahlen sind unter Beibehaltung einer gesetzmässigen Reihe nach Schätzung geändert. Zunächst ist in folgender Tafel L das Ergebnis der Tafel I in einer Form wiederholt, welche die Uebergänge bei beleuchteten und im Schlagschatten befindlichen Körpern leichter verfolgen und vergleichen lässt.

Tafel L	Licht und Körperschatten				Schlagschatten und Körperschatten			
	Kappe	+ 0 h	erhält 0	Töne	Kappe	+ 0 s	erhält 13	Töne
	Streifen	+ 0,7	„	0,5 „	Streifen	+ 0,7 s	„	12,5 „
	„	+ 1,5	„	1 „	„	+ 1,5 s	„	11 „
	„	+ 2,5	„	2,5 Töne	„	+ 2,5 s	„	9,5 „
	„	+ 3,5	„	4,5 „	„	+ 3,5 s	„	8 „
	„	— 3,5	„	7 „	„	— 3,5	„	7 „
	„	— 2,5	„	6 „	„	— 2,5	„	6 „
	„	— 1,5	„	5 „	„	— 1,5	„	5 „
	„	— 0,7	„	4,5 „	„	— 0,7	„	4,5 „
	Kappe	— 0 r	„	4 „	Kappe	— 0 r	„	4 „

b) Tonschichtenpläne für veränderte Reflex- und Schlagschattenwirkung, Tafeln M, N und O.

Die auf Körper- und Schlagschatten gerichteten Zahlen der Tafel L gestatten unmittelbar die Veränderungen, welche einer andern Reflex- und Schlagschattenwirkung entsprechen. Sie können nicht viel von dem auf dem zuerst angedeuteten Weg erhältlichen verschieden sein.

Schwächere Schlagschatten in Verbindung mit einer minder starken Reflexerhellung können gewählt werden im Wunsch nach einer ruhigeren Haltung der ganzen Schattierung, welche die Schattenflächen als in sich nur wenig gegliederte Masse den Lichtflächen entgegensetzen will. Auch grosse Ausdehnung der Schlagschattenfläche gegenüber der Lichtfläche kann ein Grund sein, die Schlagschatten heller zu halten, um kein zu dunkles Bild zu bekommen. Dabei kann die Reflexwirkung sowohl der Tafel L als der Tafel M entnommen sein.

Sehr starke Schlagschatten in Verbindung mit schwacher Reflexerhellung wären etwa zu wählen bei Darstellungen auf sehr dunklem Hintergrund, in welchen die Schlagschattenflächen nur auf kleine vereinzelt stehende Flächenstücke beschränkt sind. Der Gegensatz zum Hintergrund lässt die schwache Reflexerhellung weit stärker erscheinen.

Hellere Reflexe als diejenigen der Tafel L kann ein sehr lichter Hintergrund erfordern, der sie infolge des Gegensatzes minder hell aussehen lässt als sie sind, oder auch die Beschränkung der Reflexöne auf sehr schmale Streifen.

In allen Fällen kann der Grundton selbst noch sehr verschieden stark gewählt werden, z. B. bei dunklem Hintergrund stärker als bei hellem; bei Körpern, welche durchscheinenden Stoff oder sehr lichte Körperfarbe zeigen sollen, weit heller und in Verbindung mit milderen Schlagschatten. Allen angedeuteten besonderen Fällen ist im folgenden durch weitere Tafeln für die Tonschichten Rechnung getragen.

Schwächere Schlagschatten in Verbindung mit minder starker Reflexerhellung liefert Tafel M.

Tafel M	Licht und Körperschatten		Schlagschatten	
	Kappe	+ oh erhält 0 Töne	Kappe	+ os erhält 11 Töne
	Streifen	+ 0,7 „ 0,5 „	Streifen	+ 0,7 s „ 10,5 „
	„	+ 1,5 „ 1 Ton	„	+ 1,5 s „ 10 „
	„	+ 2,5 „ 2,5 Töne	„	+ 2,5 s „ 9 „
	„	+ 3,5 „ 4,5 „	„	+ 3,5 s „ 8 „
	„	— 3,5 „ 7 „	„	— 3,5 „ 7 „
	„	— 2,5 „ 6,5 „	„	— 2,5 „ 6,5 „
	„	— 1,5 „ 6 „	„	— 1,5 „ 6 „
	„	— 0,7 „ 5,5 „	„	— 0,7 „ 5,5 „
	Kappe	— 0 „ 5 „	Kappe	— 0 „ 5 „

Tafel N. Abänderung der Tafel L für sehr starke Schlagschatten bei gleichbleibenden Licht- und Reflexönen:

— 3,5 erhält 7 Töne, + 3,5 s erhält 9 Töne, + 2,5 s erhält 11 Töne, + 1,5 s erhält 13 Töne, + 0,7 s erhält 14 Töne, + 0 s erhält 15 Töne.

Tafel O. Abänderung der Tafel L für sehr starke Reflexerhellung bei gleichbleibenden Licht- und Schlagschattentönen:

— 3,5 erhält 7 Töne, — 2,5 erhält 6 Töne, — 1,5 erhält 4,5 Töne, — 0,7 erhält 3 Töne.

c) Tonschichtenpläne mit Beschränkung auf einen unveränderlichen Grundton, Tafeln P und R.

Nach den oben aufgestellten Tafeln sind 3 oder 4 Mal-töne notwendig, wenn auch im Wesentlichen ein Ton die

Güller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

Schattierung erzeugt. Es kann gewünscht werden, die Schattierung durchaus mit einem Ton durchzuführen, um der Beurteilung durch das Gefühl, solange es noch nicht ausgebildet ist, möglichst wenig überlassen zu müssen, und in der That wird am häufigsten in dieser Weise schattiert. Eine Untersuchung mit Hilfe der Tafeln G und H lehrt jedoch, dass es unmöglich ist, mit einem einzigen unveränderlichen Ton die Lichtstufen nach den Zahlenwerten der Tafel D samt derjenigen des Streifens + 0,7 im Licht befriedigend zu erzielen, ohne zu einer zu grossen Zahl von Tonschichten greifen zu müssen. Der genannte Streifen müsste unvermeidlich einen Ton, daher der Streifen + 1,5 zwei und der Streifen — 3,5 mit dem Streiflicht schon etwa 18 Töne erhalten, was für die dunkelsten Schlagschatten über 30 bedeuten würde. Also bedarf wenigstens die nachträglich eingeschaltete unganzzahlige Lichtstufe einer besonderen Behandlung.

Unter dieser Voraussetzung geben die folgenden Tonschichtenpläne P und R befriedigende Zahlenwertreihen.

Auf die ganze Fläche mit Ausnahme der Kappe + 0 im Licht wird ein leichter, etwa mit 0,4 zu bewertender Ton gelegt, der später den Streifen + 0,7 für sich allein bildet und zugleich die ohnehin erforderliche Einfärbung des Papiers erzielt; hierauf werden mit dem unveränderlichen Grundton 1 folgende Tonschichten gebildet.			
Tafel P	Licht und Körperschatten		Schlagschatten und Körperschatten
	Kappe	+ oh erhält 0 Töne	Kappe + os erhält 12 Töne
	Streifen	+ 0,7 „ 0 „	Streifen + 0,7 s „ 11 „
	„	+ 1,5 „ 1 Ton	„ + 1,5 s „ 10 „
	„	+ 2,5 „ 2 Töne	„ + 2,5 s „ 9 „
	„	+ 3,5 „ 4 „	„ + 3,5 s „ 8 „
	„	— 3,5 „ 7 „	„ — 3,5 „ 7 „
	„	— 2,5 „ 6 „	„ — 2,5 „ 6 „
	„	— 1,5 „ 5 „	„ — 1,5 „ 5 „
	„	— 0,7 „ 4 „	„ — 0,7 „ 4 „

Um diese Tonschichtenzahlen zu erhalten, benützt man zunächst die 8 ersten Horizontalreihen der Tafel I unverändert; hierauf erscheinen als Tonschichte IX die 4 letzten Vertikalreihen je mit 1, als Tonschichte X die 3 letzten, als XI die 2 letzten, als XII die letzte.

Auf die Streifen + 0,7 und + 1,5 im Licht wird zuerst ein leichter, etwa mit 0,5 zu bewertender Ton gelegt; dann sind mit dem Grundton 1 folgende Tonschichten zu bilden.

Tafel R	Licht und Körperschatten		Schlagschatten und Körperschatten
	Kappe	+ oh erhält 0 Töne	Kappe + os erhält 13 Töne
	Streifen	+ 0,7 „ 0 „	Streifen + 0,7 s „ 12 „
	„	+ 1,5 „ 1 Ton	„ + 1,5 s „ 11 „
	„	+ 2,5 „ 3 Töne	„ + 2,5 s „ 10 „
	„	+ 3,5 „ 5 „	„ + 3,5 s „ 9 „
	„	— 3,5 „ 8 „	„ — 3,5 „ 8 „
	„	— 2,5 „ 7 „	„ — 2,5 „ 7 „
	„	— 1,5 „ 6 „	„ — 1,5 „ 6 „
	„	— 0,7 „ 5 „	„ — 0,7 „ 5 „
	Kappe	— 0 r „ 4 „	Kappe — 0 r „ 4 „

d) Tonschichtenpläne mit möglichst wenigen Tonschichten, Tafeln S und T.

Man könnte die Zahl der 12 oder 13 Tonschichten durch Einführungen von Doppeltönen oder sogar dreifachen Tönen herabzudrücken suchen. Bei Darstellungen in klei-

nem Massstab, bei denen ohnehin die gefühlsmässige Schätzung der Tonstärken mehr einzutreten hat, wird man hiedurch in der That Arbeit sparen können, ohne dem Verhältnis der Lichtstufen zu schaden; das weniger häufige Ueberlegen der Fläche mit Maltönen wird in diesem Fall sogar günstiger sein. Für grösseren Massstab ist jedoch diese Abkürzung kaum je ein Gewinn, da das Einschalten richtiger einfacher Töne zur Herstellung der Uebergänge der von den Doppeltönen erzeugten Stufen schwierig ist. Ein Wasserfarbton kann immer erst beurteilt werden, nachdem er aufgetrocknet ist, und er findet sich im vorliegenden Fall gewöhnlich zu dunkel oder zu hell, so dass der erhaltene Uebergangston sich der stetigen Reihe nicht einpasst und Nachbesserungen entweder für sich selbst oder für die Nachbarstreifen fordert.

Ein für kleineren Massstab der Darstellungen geeigneter Tonschichtenplan mit Doppeltönen, der sich der grösseren Ausdehnung der Lichtfläche vom hellsten Punkt aus noch etwas mehr anschliesst als die früheren, ist in folgender Tafel S gegeben. Es erscheinen hier im Maximum acht Tonschichten; die Licht- und Reflexöne sind nur bis zu drei- und viermal zu überlegen.

Nr.	Tafel S											
	+ 0	+ 0,7	+ 1,5	+ 2,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5
I	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
II	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
III	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
IV	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
V	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
VI	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
VII	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
VIII	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	0	0,5	1	2	4	6	5	4	3	7	8,5	10

In folgender Tafel T ist die Zahl der Tonschichten auf 5 herabgedrückt, indem ein sechsfacher Ton für Streiflicht und Schlagschatten den doppelten und einfachen vorangestellt ist.

Nr.	Tafel T											
	+ 0	+ 0,7	+ 1,5	+ 2,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5
I	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
II	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
III	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
IV	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
V	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	0	0,5	1	2	4	6	5	4	3	7	8,5	10

e) Tonschichtenplan mit Annäherung an die Sonnenbeleuchtung, Tafel U.

Nach Seite 89 ist die Schattierung der Raumgebilde bei Sonnenbeleuchtung von der im früheren abgeleiteten dadurch unterschieden, dass die hellere Lichtfläche sich im ganzen weiter ausdehnt, in sich weniger veränderlich ist und mit einer schmalen Uebergangszone fast sprunghaft in das Streiflicht führt; die Reflexe sind bei Fehlen zufälliger Reflexlichtquellen nur wenig erhellt. *) Auch

*) Aus dieser Tatsache ist es wohl zu erklären, dass die Schattierung ohne Lichtstufen, ausschliesslich mit einem unveränderlichen Körperschatten-

noch bei minder starker Parallelbeleuchtung sind diese unterscheidenden Merkmale der Schattierung der Wirklichkeit zu beobachten, wenn auch in weit geringerem Grad. Es ist zu wiederholen, dass sie in der Darstellung nachgebildet der Formdeutlichkeit und guten Modellierung der Gebilde minder zuträglich sind, als die aus dem Sinusgesetz abgeleitete Schattierung, wofür der zu vermutende Grund in der Anmerkung auf Seite 143 ausgesprochen ist. Wenn jedoch im Streben nach der Nachbildung der Wirklichkeit, etwa für mehr künstlerische Zwecke, eine solche mehr mit dem Gegensatz als mit Uebergängen wirkende Schattierung gewählt werden will, so dürfte etwa folgender Tonschichtenplan (Tafel U) hierzu geeignet sein. Schon bei kleinerem Massstab ist eine Zwischenstufenlinie + 3,5 einzuführen.

Nr.	Tafel U												
	+ 0	+ 0,7	+ 1,5	+ 2,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5	+ 3,5
I	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
II	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
III	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
IV	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
V	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
VI	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
VII	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
VIII	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
IX	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
X	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
XI	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	0	0,5	1	2	3,5	5	7	6	5,5	5	8	9	10

Mit der Wahl des Doppeltones 2 hat man ein Mittel, die Schlagschatten etwas minder dunkel zu erhalten, was noch mehr der Wirklichkeit sich anschliesst.

Von allen Tonschichtenplänen dürfte derjenige der Tafel I mit dem in Tafel L zusammengefassten Resultat in den meisten Fällen der beste sein, und für das Schattieren mit einem unveränderlichen Ton derjenige der Tafel P. Die früher genannten Zufälligkeiten im Zustand des Papiers, in der Pinselfüllung u. s. w. dürften jedoch nur selten gestatten, das ausschliesslich mit den Tonschichten dieser oder der andern Tafeln erzielte Bild ganz unverändert zu lassen; kleine Nachbesserungen werden sich meist als notwendig erweisen. In Beziehung auf die in den vier Lichtdrucktafeln erscheinenden Lichtstufen ist daran zu erinnern, dass die Wiedergabe einer getuschten Zeichnung durch Photographie und Lichtdruck das Verhältnis der Maltöne zuweilen etwas verändert.

ton, Schlagschattenton, auch wohl Lichtton, meist für sich allein schon eine ganz gute Anschauung der Formen eines in nicht zu grossem Massstab dargestellten Körpers zu geben vermag. Ein so einfach schattiertes Bild erweckt die Vorstellung der bei starker Sonnenbeleuchtung auftretenden Schattierung und damit der Körperformen. Schon in mässiger Entfernung gesehen, macht bei solcher Beleuchtung der Raumgebilde die Uebergangszone von Licht zu Schatten fast den Eindruck einer scharfen Linie, wie sie bei jener Darstellungsweise gezeichnet wird. Als bezeichnende Beispiele für eine mit diesen einfachsten Mitteln erzielte gute Anschauung der Formen können etwa die Figuren 30b, 71c, 70a und 73 gelten.

120. Grosse ebene Flächen.

Wo grosse ebene Flächen auftreten, wird man sich auf diesen das stufenweise Erzeugen der Lichtstufen meist besser durch einen einmal aufgetragenen stärkeren Ton ersparen. Bei der Säulenordnung auf der vierten Lichtdrucktafel und der Balustrade auf der zweiten lag es nahe, zuerst die Drehungsflächen durch wiederholt aufgetragene Töne in der oben beschriebenen Weise zu schattieren und zuzusehen, welche Stärke des Tons sich hiebei für die Lichtstufen von Licht und Schlagschatten auf den vertikalen Ebenen ergab; der hiebei erscheinende Lichtton + 1,7 konnte ganz wohl mit einer Tonschichte, die Schlagschattentöne wenigstens mit zweien oder dreien erzeugt werden. Auf für anders gerichtete grosse Ebenen ist dasselbe Verfahren als arbeitssparend zu empfehlen.

121. Luftperspektive.

Bei Darstellungen eben begrenzter Körper ist eine Andeutung von Luftperspektive der Wirkung und Anschaulichkeit der Bilder meist förderlich. Sie besteht darin, dass in den ferner liegenden Teilen des räumlich vor dem Auge stehend gedachten Körpers die hellsten Lichtstufen etwas weniger hell, die dunkleren etwas weniger dunkel gehalten, also die Gegensätze gemildert und die stärksten Kontraste den meist gegen das Auge vortretenden Partien vorbehalten werden. Auf dem Sternikosaeder der ersten Lichtdrucktafel waren z. B. die zwei Spitzen links oben und ganz oben am Umriss in Licht und Schatten etwas zu dämpfen, auf der vordersten Spitze dagegen das weisse Papier als Lichtfläche festzuhalten und der Schatten kräftiger daneben zu setzen, als er sonst auf derselben Ebene erscheint.

Körper mit gekrümmten Flächen bedürfen dieses Hilfsmittels seltener, indem hier meist Auswölbungen den Umriss bilden und die Abnahme der Lichtstufe unmittelbar den Eindruck des Zurücktretens und der Verkürzung der Fläche erzeugt.

122. Winke für das Zeichnen, Malen und Schraffieren.

Die Umrisslinien und Kanten des darzustellenden Gegenstandes werden für das Schattieren mit den feineren Lichtstufen am besten nur in Bleistift oder bei kleinerem Massstabe mit blassem Tusch gezeichnet, die Lichtstufenlinien entweder nur leicht in Bleistift oder mit der Feder sehr blass in dem für das Malen gewählten Farbton ausgezogen.

Zum Auftragen der Lichtstufen mit dem Pinsel eignen sich alle nicht zu lebhaften Wasserfarben, insbesondere Tusch für sich allein oder gemischt mit Karmin, preussisch Blau oder Neutraltinte, ferner Sepia als natürliche oder schon in der Farbtafel mit Karmin gemengte (sogenannte warme) oder mit Rotgelb gemengte (kolorierte) oder erst in der Farbenschale mit Karmin oder gebrannter Terra

di Siena zu mengende Sepia, endlich Neutraltinte entweder ins Blaue oder ins Rötliche spielend, auch wohl erst in der Farbenschale gemischt mit preussisch Blau oder Karmin. Die erst in der Farbenschale vorzunehmenden Mischungen bringen die Gefahr mit sich, bei neuem Bereiten das alte Verhältnis beider Farben nicht genau wiederzufinden. Bei Mischungen gerinnt auch die Farbflüssigkeit leichter als bei Verwendung einer einzigen Farbtafel.

Zum Malen mit Wasserfarben eignet sich etwas rauhes, wenig geleimtes Papier, insbesondere das englische Whatmanpapier; auf glattem, stark geleimtem Papier ist es weit schwieriger, ja zuweilen auch dem Geübten fast unmöglich, klare, fleckenlose Töne zu erhalten. (Bei Vervielfältigung einer gemalten Darstellung durch Photographie oder Lichtdruck ist übrigens rauhes Gefüge des Papiers dem Lichtbild nicht zuträglich.) Bei dunkleren Tönen ist ein vorhergehendes Einfeuchten der Fläche durch Auftragen reinen Wassers mit dem Pinsel, nach dessen Aufdrehen der Ton sofort aufzulegen ist, als ein Hilfsmittel zur Vermeidung von Wolken und Flecken sehr zu empfehlen.

Flüssiges Malen, das heisst Malen mit starkgefülltem Pinsel, bringt die Farbtöne ansprechender, voller, durchsichtiger zur Erscheinung; bei zu trockenem Auftragen ist nicht nur die Gefahr der Streifen- und Fleckenbildung grösser, sondern die Fläche sieht auch leicht unscheinbar und wie bestäubt aus. Doch drängt beim flüssigen Malen die aufdrehende Farbe stark gegen ihren Rand, so dass dieser besonders nach Auftragen mehrerer Töne leicht eine schwarze und unreine Linie bildet. Man vermindert diesen Uebelstand einigermaßen, indem man mit den später aufzutragenden Tönen sich ein wenig vom Rand entfernt hält; übrigens lassen sich auch die schon schwarz gewordenen Randlinien wieder reinigen, indem man sie mit dem spitzen Pinsel leicht mit Wasser einfeuchtet und dieses beim beginnenden Aufdrehen mit Fliesspapier, das durch Streichen mit dem Fingernagel oder Falzbein aufgedrückt wird, wieder aufsaugt.

Es ist zu empfehlen, nach je drei oder vier Tonschichten, wenn sie gut ins Papier eingetrocknet sind, und ebenso bei jedem Wiederbeginn der unterbrochenen Arbeit, die gemalte Fläche mit dem Schwamm oder einem grossen Pinsel satt einzufeuchten, sowohl um die vorgenannten Ränder zu beseitigen, als die gewöhnlich vorhandenen Unregelmässigkeiten der Tonschichten auszugleichen. Dieses Einfeuchten, das auch das Auflegen der nachfolgenden Töne erleichtert, soll jedoch kein vollständiges Waschen sein, sondern möglichst ohne Aufdrücken von Schwamm oder Pinsel vorgenommen werden. Wenn es die Töne erheblich abschwächt, so erhält man leicht eine stumpfe, kraftlose Schattierung.

Hier ist zu wiederholen, dass bei flüssigem Malen die Töne etwas dunkler zum Vorschein kommen als bei minder stark gefülltem Pinsel, so dass man mit dem mehr oder minder flüssigen Malen innerhalb enger Grenzen ein weiteres Hilfsmittel hat, die Abstufung der Farbtöne zu beeinflussen und noch häufiger sie unfreiwillig beeinflusst. Von noch grösserer Wirkung in dieser Rich-

tung ist aber der mehr oder minder trockene Zustand des Papiers. Auf feuchter Papierfläche kommt ein Ton viel heller als auf stark ausgetrockneter, da diese die Farbflüssigkeit begieriger und reichlicher ansaugt. Ist also ein Ton kaum aufgetrocknet, wenn man den folgenden auflegt, so wirkt dieser weit schwächer; er scheint oft vom vorhergehenden fast ebensoviel wieder wegzunehmen als er selber hinzubringt; wenn aber ein Ton erst andern Tags aufgelegt wird, so wirkt er schon mit geringerer Stärke sehr lebhaft. Daher ist der mehr oder minder trockene Zustand des Papiers bei jeder Wahl der Tonstärke wohl zu beachten; daher hat ein oftmaliges oder längeres Unterbrechen der Arbeit des Farbtonauftragens meistens zur Folge, dass man nicht ohne einiges Nachbessern zum Ziel kommt.

Für das Schattieren mit Strichlagen ist glattes, gutgeleimtes, kräftiges, sorgfältig aufgespanntes Papier, tiefschwarzer Tusch und eine gutgeschliffene Reissfeder notwendig. Bei Verwendung eines Schraffierlineals soll um die Zeichnung herum reichlich Papierfläche vorhanden sein, da die Bewegung des Apparats durch die geringste Unebenheit gehemmt und dadurch die Strichweite beeinflusst oder sogar eine Drehung der Strichrichtung hervorgerufen wird. Die Lichtstufenlinien sind gewöhnlich nur mit Bleistift vorzuzeichnen; bei Darstellungen in kleinerem Massstab kann das Ausziehen mit der Feder der grösseren Klarheit wegen günstiger sein.

Auftragen der Lichtstufen mit je einem Ton. 123.

Die beschriebene Schattierung mit Lichtstufen ist ein vorzügliches Hilfsmittel, die ästhetische Wirkung auszuführender Gebilde mit mathematisch bestimmten Flächen zu erproben und schwieriger vorstellbare Raumformen ohne Modelle der Anschauung näher zu bringen. Ihre Vorzüge könnten sowohl nach ihrem Wert für das praktische Schaffen, als auch für den auf mathematische Raumgebilde zielenden Unterricht in grösserem Umfang ausgenützt werden, wenn für den Fall der gleichzeitigen Herstellung vieler Lichtstufenbilder das Auftragen der Maltöne auf kleineren Arbeitsverbrauch herabgedrückt und von all den Zufälligkeiten und Gefahren befreit würde, die beim Malen mit Wasserfarbtönen das Resultat so leicht verändern oder in Frage stellen. Es dürfte nun in der That nicht schwer sein, in einem Malverfahren mit deckenden Farbtönen die 15, genauer betrachtet 13 Lichtstufen ein- für allemal in grösseren Mengen derart herzustellen, dass jede Lichtstufe durch einmaliges Auftragen ihres Farbtöns fleckenlos, deckend und immer unverändert richtig erhalten würde. Für Formen in grösserem Massstab, welche neben den 13 Grundtönen noch diejenigen für die in Art. 114 erwähnten Zwischenstreifen $+ 1,75 + 2,75$ u. s. w. erfordern, würden die Zwischentöne je durch Mischen gleicher Mengen der zwei nächstliegenden Farbtöne erhalten, so man auch für solche Formen mit den 13 Tönen ausreichen könnte.