



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

II. Schlagschatten auf den Grundebenen und Selbstschatten von Körpern
mit ebenen Flächen.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

A. Schattenkonstruktionslehre oder Lehre von den Schattengrenzlinien.

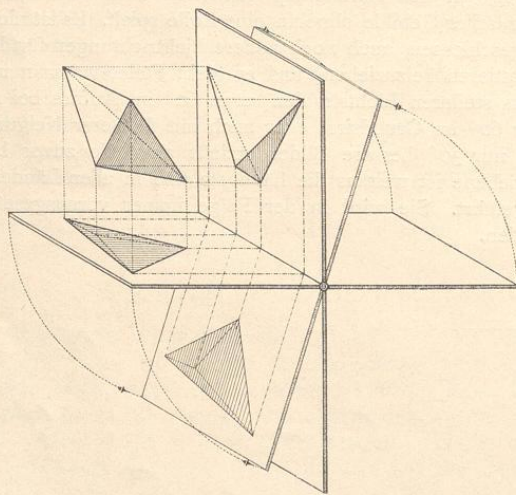
Die Schattenkonstruktionslehre hat unter Annahme der beschriebenen Lichtstrahlrichtung die graphischen Konstruktionen darzulegen, mit welchen die Grenzen zwischen Lichtflächen, Körperschattenflächen und Schlagschattenflächen für die zumeist in der Technik verwendeten mathematisch bestimmbaren Körper in verschiedenen Lagen aufgesucht werden können. Dieser Aufgabe sind die Kapitel II bis X gewidmet. Zusammengesetzte technische Gebilde erheischen zwar im allgemeinen die Anwendung von mehreren Lösungsmethoden nebeneinander; doch bleiben solche Fälle bei Erklärung der einzelnen Methoden besser beiseite.

II. Schlagschatten auf den Grundebenen und Selbstschatten von Körpern mit ebenen Flächen.

S. Hilfsmittel aus der darstellenden Geometrie.

Die Lösung der in den Kapiteln II, III und IV behandelten Aufgaben erfordert nur die Kenntnis elementarer Sätze und Operationen der darstellenden Geometrie; sie sind, der früheren Ankündigung entsprechend, in gedrängter Fassung hier voranzustellen.

a) Das Projizieren. Wenn ein Körper geometrisch, das heisst nach dem Verfahren der darstellenden Geometrie abgebildet werden soll, so geschieht dies



Figur 8.

dadurch, dass man in bestimmter Lage zum Körper eine horizontale und eine vertikale Ebene vorstellt und von jedem Kantenpunkt des Körpers sich ein Lot gefällt denkt

sowohl auf die Horizontalebene als auf die Vertikalebene. Dieses Lotfällen auf die beiden „Grundebenen“ nennt man das „Projizieren“, genauer das „rechtwinklige Projizieren“, und die Figur, welche gebildet wird durch die Fusspunkte der Lote, heisst eine „Projektion“. Auf der Horizontalebene bildet sich die „Horizontalprojektion“ des Körpers, die im folgenden ebensohäufig der „Grundriss“ des Körpers genannt werden wird, um eine Abwechslung und ein kürzeres Wort zu haben; auf der Vertikalebene bildet sich die „Vertikalprojektion“, die auch bezeichnet werden wird als „Aufriss“ oder „Vorderansicht“ des Körpers. Die horizontale Schnittlinie der beiden Grundebenen heisst der „Grundschnitt“. Da man nun beim Zeichnen nicht auf einer horizontalen Tafel und einer aufgesetzten vertikalen zugleich operieren kann, so denkt man sich nach vollendetem Projizieren (Figur zu Art. 8) die Horizontalebene mit allem, was an Projektionen darauf erscheint, um den Grundschnitt nach unten geklappt, und zwar um eine Viertelswendung, so dass sie mit der unter den Grundschnitt erweitert gedachten Vertikalebene zusammenfällt, oder — anschaulicher zu sprechen — vor diese Erweiterung zu stehen kommt. Doch ist für alle Beziehungen zwischen beiden Projektionen immer die ursprüngliche Lage beider Grundebenen wieder vorzustellen. Die Zeichnungsfläche unter dem Grundschnitt bedeutet also ebensowohl den vorderen Teil der Horizontalebene als den unteren Teil der Vertikalebene. Vertikalprojektionen auf diesem letzten, verdeckten Teil werden punktiert gezeichnet, um auszudrücken, dass sie von der Horizontalebene verdeckt sind; die Figuren auf dieser letzteren zeichnet man mit ausgezogenen Linien. — Die hinter den Grundschnitt erweiterte Horizontalebene, welche vielfach ebenfalls Projektionen aufzunehmen hat, klappt sich beim Hinunterdrehen der vorderen Horizontalebene nach oben und legt sich hinter den Oberteil der Vertikalebene. Die Zeichnungsfläche über dem Grundschnitt bedeutet also ebensowohl den hinteren Teil der Horizontalebene als den

Oberteil der Vertikalebene. Horizontalprojektionen auf diesem ursprünglich hinter dem Grundschnitt liegenden Teil der Horizontalebene werden ebenfalls als verdeckt bezeichnet, das heisst punktiert.

Auch in den sichtbar gedachten Projektionen der Körper auf der oberen Vertikalebene und der vorderen Horizontalebene werden diejenigen Kanten und Linien, welche bei Auffassung der Projektion als Vorderansicht beziehungsweise Ansicht von oben vom übrigen verdeckt und dadurch unsichtbar wären, nur punktiert gezeichnet. Anstatt der Ansicht von oben („Oberansicht“, auch „Draufsicht“ genannt) wird eine Horizontalprojektion wohl auch als Ansicht von unten („Unteransicht“, „Ansicht nach oben“) behandelt, wenn hierdurch grössere Deutlichkeit erreicht oder Wichtigeres als sichtbar dargestellt wird.

b) Der Punkt. Ein Punkt A erscheint in der Horizontalprojektion als ein Punkt a und ebenso in der Vertikalprojektion als ein Punkt a' ; beide Projektionen liegen auf derselben Vertikallinie des Zeichenblattes.

c) Die Gerade. Eine gerade Linie erscheint im allgemeinen in beiden Projektionen als gerade Linie. Die Lote, welche ihre Punkte auf die horizontale Grundebene projizieren, bilden eine Ebene, welche die „horizontalprojizierende“ Ebene der Geraden heisst; sie wird im folgenden oft auch ihre „vertikalstehende“ oder „vertikale“ Ebene genannt werden. Die Ebene, welche die Gerade auf die vertikale Grundebene projiziert, heisst die „vertikalprojizierende“.

Die Punkte, in welchen eine Gerade die Grundebenen schneidet, heissen ihre „Spuren“. Die „Vertikalspur“ einer Geraden liegt auf dem Zeichenblatt vertikal über (oder unter) dem Punkt, in welchem die Horizontalprojektion der Geraden den Grundschnitt schneidet; ebenso liegt die „Horizontalspur“ vertikal unter (oder über) dem Schnittpunkt der Vertikalprojektion mit dem Grundschnitt.

Für bestimmte Lagen der Geraden liegt eine Spur unendlich fern, oder es ist dies mit beiden Spuren der Fall. Diese Lagen sind die folgenden:

Eine vertikale Gerade erscheint im Grundriss als ein Punkt, im Aufriss vertikal.

Eine Gerade senkrecht zur Vertikalebene erscheint im Aufriss als ein Punkt, im Grundriss senkrecht zum Grundschnitt.

Eine horizontale Gerade erscheint im Aufriss horizontal, im Grundriss parallel zu ihrer Lage im Raum.

Eine Gerade parallel zur Vertikalebene erscheint im Grundriss horizontal, im Aufriss mit der Neigung, die sie im Raum gegen die Horizontalebene darbietet.

Eine Gerade parallel zum Grundschnitt erscheint in beiden Projektionen horizontal.

Eine Gerade senkrecht zum Grundschnitt erscheint in beiden Projektionen vertikal; sie bedarf zu ihrer unzweideutigen Darstellung der Beifügung der später zu erklärenden Seitenprojektion. Für eine solche Gerade lassen sich beide Spuren als im Grundschnitt zusammengefallen vorstellen.

Ist eine Gerade im Raum in irgend einem Verhältnis eingeteilt, so sind auch ihre beiden Projektionen in diesem Verhältnis eingeteilt.

d) Die Kurve. Eine gekrümmte Linie hat im allgemeinen zwei Kurven als Projektionen; bei ebenen Kurven kann eine Projektion geradlinig werden. Tangenten an einer Kurve projizieren sich als Tangenten an beiden Kurvenprojektionen.

e) Die Ebene. Eine Ebene kann auf zwei Weisen dargestellt werden, entweder durch ihre zwei Schnittlinien mit den Grundebenen, welche als gerade Linien mit Schnittpunkt im Grundschnitt auftreten und die „Spuren“ der Ebene heissen, oder durch die zwei Projektionen einer Figur, welche in der Ebene liegt (Dreieck, Vieleck, Kreis, beliebig begrenzte Figur, auch wohl nur Winkelfeld zweier Geraden). Die letzte Darstellungsweise ist für die Schattenkonstruktion die häufigere.

Zwei beliebige Dreiecke, deren Eckpunkte vertikal übereinander liegen, stellen, aufgefasst als zusammengehörige Projektionen, immer eine Ebene dar. Zwei Vielecke stellen nur dann die Projektionen einer ebenen Figur dar, wenn nicht nur ihre Eckpunkte, sondern auch die Schnittpunkte der einander entsprechenden Diagonalen und Seitenverlängerungen vertikal übereinander liegen. Bei n Seiten eines Vielecks muss diese Probe (abgesehen von den Eckpunkten selbst) für mindestens $n-3$ Schnittpunkte erfüllt sein; dann ist sie für alle erfüllt.

Eine horizontale Ebene hat nur eine Spur, und zwar eine horizontal gerichtete Vertikalspur. Die Horizontalprojektion einer in einer solchen Ebene liegenden Figur ist der Figur kongruent.

Eine vertikale Ebene parallel zum Grundschnitt hat nur eine Spur, und zwar eine horizontal gerichtete Horizontalspur. Die Vertikalprojektion einer in einer solchen Ebene liegenden Figur ist der Figur kongruent.

Eine schief zum Grundschnitt stehende Vertikalebene hat eine vertikale Vertikalspur und eine schief gerichtete Horizontalspur.

Eine geneigte Ebene, die senkrecht zur Vertikalebene steht, hat eine senkrecht zum Grundschnitt stehende Horizontalspur und eine schief gerichtete Vertikalspur.

Eine geneigte Ebene parallel zum Grundschnitt hat zwei horizontal gerichtete Spuren.

Eine Ebene senkrecht zum Grundschnitt hat zwei übereinander stehende Vertikallinien als Spuren.

Jede Ebene, die nicht ganz horizontal ist, enthält eine horizontale Linienrichtung und eine zu dieser senkrechte Linienrichtung, welche die steilste Linienrichtung auf der Ebene ist und zugleich die Neigung der Ebene gegen die Horizontalebene darbietet, weshalb sie die Richtung der „Gefällslinie“ der Ebene heisst. Jede horizontale Richtungslinie der Ebene erscheint im Aufriss horizontal und im Grundriss parallel der Horizontalspur der Ebene; jede Gefällslinie erscheint im Grundriss senkrecht zur Horizontalspur der Ebene oder Horizontalprojektion der Richtungslinie. Die beiden Projektionen einer Gefällslinie bestimmen für sich allein die Ebene, der sie angehört.

Unter „Neigung“ einer Ebene oder Geraden kurzweg ist immer die Neigung gegen die Horizontalebene verstanden.

f) Gerade und Gerade. Zwei Gerade sind im Raum parallel, wenn auf jeder Grundebene ihre beiden

Projektionen parallel sind (oder, mit dem gebräuchlichen Ausdruck, wenn ihre „gleichnamigen“ Projektionen parallel sind). Ausnahme bei Geraden senkrecht zum Grundschnitt, indem diese zur Bestimmung ihrer Richtung der Seitenprojektion bedürfen.

g) Ebene und Ebene. Zwei Ebenen sind parallel, wenn ihre gleichnamigen Spuren parallel sind. (Ausnahmen bei Ebenen parallel zum Grundschnitt.)

Die Gerade, nach welcher sich zwei Ebenen schneiden, hat ihre Spuren in den Schnittpunkten der gleichnamigen Spuren beider Ebenen.

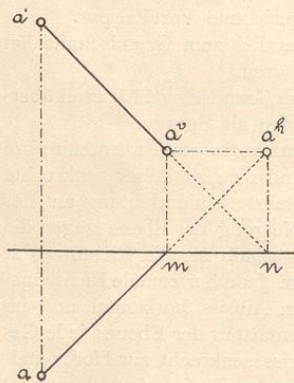
h) Gerade und Ebene. Eine Gerade liegt in einer Ebene, wenn die Spuren der Geraden in die Spuren der Ebene fallen. — Eine Gerade ist parallel einer Ebene, wenn sich durch die Spuren der Geraden die Spuren einer zweiten Ebene parallel zu denjenigen der gegebenen legen lassen. — Eine Gerade steht senkrecht zu einer Ebene, wenn die Projektionen der Geraden senkrecht zu den Spuren der Ebene stehen.

Zur Bestimmung der Spuren der Ebene zweier sich schneidender Geraden verbindet man die gleichnamigen Spuren der letzteren. Nur wenn sich die Verbindungslinien im Grundschnitt schneiden, sind sie die Spuren einer Ebene; andernfalls liegen die gegebenen Geraden nicht in einer Ebene. Um die Spuren der Ebene einer gegebenen Figur zu erhalten, wählt man auf dieser zwei sich schneidende Gerade und behandelt diese in der angegebenen Weise.

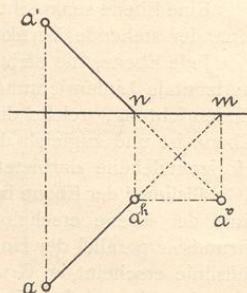
9. Schlagschatten eines Punktes auf den Grundebenen.

Das einfachste Problem der Schattenkonstruktion ist das folgende: „Auf den Grundebenen den Schatten eines Punktes zu suchen.“

Lösung: Man zieht durch den Punkt einen Lichtstrahl; wo dieser zuerst eine Grundebene schneidet, da ist der Schlagschatten des Punktes.



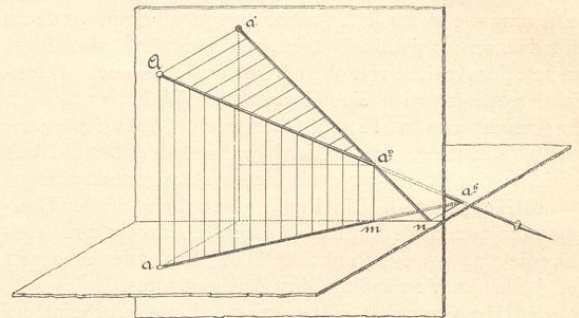
Figur 9a.



Figur 9b.

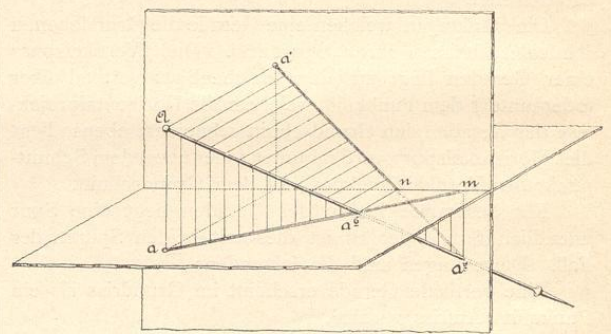
Graphische Ausführung (Figuren 9a u. b): Man zieht durch den Grundriss a des Punktes eine Linie unter 45° zum Grundschnitt geneigt, ebenso durch den Aufriss a' des Punktes. Im Schnittpunkt jeder solchen Linie mit dem Grundschnitt — also in m und n — errichtet man

ein Lot bis zum Schnitt mit der andern Linie. Die beiden Schnittpunkte dieser Lote mit den Projektionen des Lichtstrahls sind die Schattenpunkte a'' und a^b . Die zuerst vom Lichtstrahl getroffene Grundebene enthält den wirklichen Schattenpunkt, die andere den nur gedachten Schattenpunkt, der erscheinen würde, wenn die erste Grundebene nicht da wäre.



Figur 9c.

In Figur 9a ist a'' der wirkliche Schattenpunkt; in Figur 9b ist es a^b . Die Figuren 9c und 9d stellen den Grundgedanken der Konstruktion, die Benützung der projizierenden Ebenen des Lichtstrahls zur Bestimmung seiner



Figur 9d.

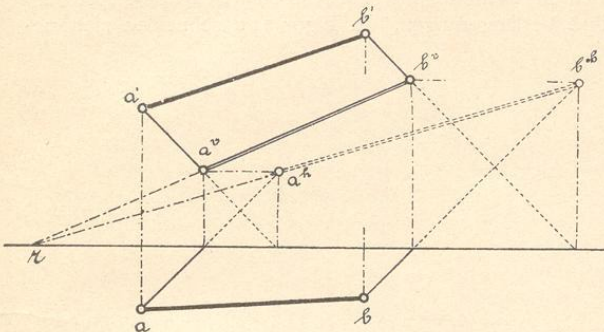
Schnittpunkte mit dem beschatteten Gebilde perspektivisch dar. Dieser Grundgedanke findet sich in der grösseren Hälfte aller Schattenkonstruktionen wieder.

Probe: Die beiden Schattenpunkte liegen auf der Zeichnung in gleicher Höhe.

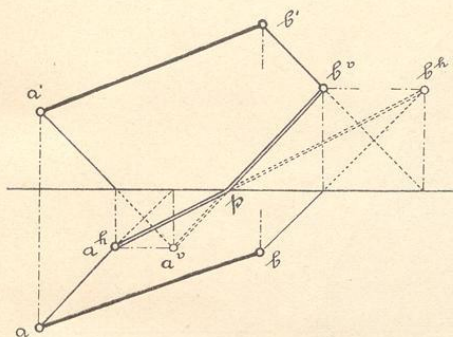
Schlagschatten gerader und gekrümmter Linien. 10.

Der Schlagschatten einer geraden Linie ab auf einer Grundebene (Figur 10a) wird gefunden, indem man die Schatten der Endpunkte auf dieser Grundebene bestimmt und geradlinig verbindet (a'' mit b'' und a^b mit b^b). Wirklicher Schatten ist nur diejenige Schattenlinie ($a'' b''$ in Figur 10a), welche zuerst von den Lichtstrahlen getroffen wird; die zweite Schattenlinie bildet nur einen gedachten Schatten, wie er bei Fehlen der andern Grundebene auf-

treten würde. Verteilt sich der Schatten auf beide Grundebenen (Figur 10b), so sucht man ihn ganz auf beiden Grundebenen und erhält als wirklichen Schatten eine gebrochene Linie $a^h b^v$ mit Ecke im Grundschnitt.



Figur 10a.



Figur 10b.

Probe für beide Fälle: Die beiden Schatten schneiden sich im Grundschnitt, im ersten Fall verlängert (in r), im zweiten unmittelbar (in p).

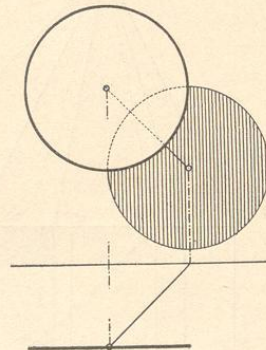
Um den Schlagschatten einer ebenen oder doppelt gekrümmten Kurve zu konstruieren, bestimmt man die Schlagschatten einer genügenden Zahl ihrer Punkte und verbindet die Schattenpunkte in richtiger Reihenfolge durch eine stetige Linie (Beispiel Figur 17c).

Für besondere Fälle der Form und Lage der Linien ergeben sich folgende oft verwertbaren Sätze:

- Eine Gerade parallel einer Grundebene wirft auf diese einen parallelen Schatten; eine horizontale Gerade parallel zum Grundschnitt hat auf beiden Grundebenen einen horizontalen Schatten; eine vertikale Gerade wirft auf die Vertikalebene einen vertikalen Schatten.
- Der Schatten einer Geraden auf einer Grundebene geht immer durch den Schnittpunkt der Geraden mit der Grundebene. (Dieser selbstverständliche Satz gewinnt seinen Wert erst bei getrennter Lage von Linie und Grundebene, in welchem Fall er nicht immer unmittelbar aus der Figur herausgefühlt wird.)
- Der Schatten einer Geraden, die senkrecht zur Vertikalebene steht, ist auf dieser unter 45° ge-

neigt; der Schatten einer vertikalen Geraden auf der Horizontalebene bildet einen Winkel von 45° mit dem Grundschnitt.

- Eine Kurve, deren Ebene parallel zu einer Grundebene steht, wirft auf diese einen ihr kongruenten Schatten. (Denn die Schattenkurve entsteht als Schnitt der von den Lichtstrahlen gebildeten Cylinderfläche durch eine Ebene parallel zur Basis.)



Figur 10c.

- Ein Kreis, dessen Ebene parallel zu einer Grundebene steht, wirft auf diese als Schatten einen kongruenten Kreis. Man findet diesen (Figur 10c) am raschesten, indem man den Schatten des Mittelpunktes bestimmt und aus dem Schattenpunkt einen Kreis mit dem Halbmesser des schattenwerfenden Kreises beschreibt. (Der Schattenkreis entsteht als der ebene Schnitt eines von den Lichtstrahlen gebildeten schiefen Kreiscylinders parallel zu dessen Basis.)
- Ein Kreis wirft im allgemeinen einen elliptischen Schatten auf die Grundebenen. In besonderen Fällen ist der Schatten ein Kreis oder eine gerade Linie. Der zuvor unter e) genannte Fall ist aber nicht der einzige, in dem ein kreisförmiger Schatten entstehen kann.

Schlagschatten eines Körpers mit ebenen Grenz- 11. flächen.

Die nächste Aufgabe wird die folgende sein: „Es ist der Schlagschatten zu konstruieren, den ein Körper mit ebenen Flächen auf die Grundebenen wirft, und die Selbstschattengrenze auf dem Körper zu bestimmen.“

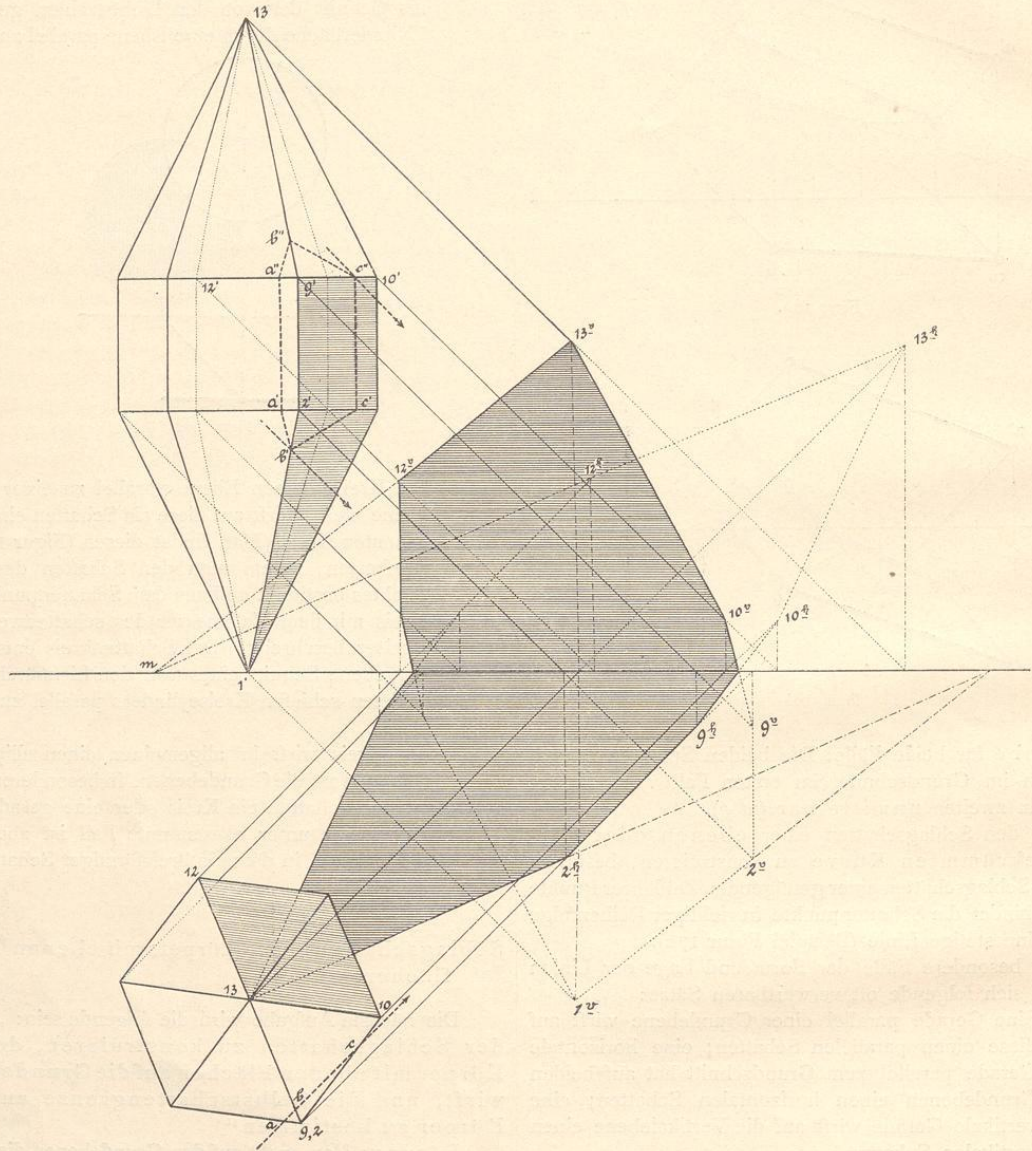
Lösung: Man sucht auf den Grundebenen die Schatten der einzelnen Eckpunkte und verbindet die Schattenpunkte den bestehenden Kanten entsprechend; es bildet sich dann durch die äußersten Schattenlinien die Schlagschattengrenze. Die innerhalb dieser liegenden Schattenpunkte bleiben ohne Verwertung; wenn man daher schon zuvor weiß, dass ein Eckpunkt keinen Schatten wirft, so kann die Konstruktion seines Schlagschattens unterbleiben. Das Numerieren der Eckpunkte ist zu empfehlen, ebenso das Numerieren der gefundenen Schattenpunkte mit Be-

zeichnung ihrer Grundebenen durch h und v , z. B. Schatten des Eckpunktes 13 auf der Horizontalebene 13^h , auf der Vertikalebene 13^v .

Im allgemeinen verteilt sich der Schatten auf beide Grundebenen. Zur Übung und Vervollständigung der Anschauung empfiehlt es sich, den Schlagschatten auf beiden

Proben: 1) Die zwei Schatten eines jeden Punktes liegen auf der Zeichnung in gleicher Höhe, z. B. 13^v mit 13^h in Figur 11 a.

2) Die zwei Schatten einer jeden Kante schneiden sich im Grundschnitt, entweder die Schatten selbst oder ihre Verlängerungen. In Figur 11 a schneiden sich un-



Figur 11 a.

Grundebenen ganz zu suchen, das heisst die nur gedachten Schattengrenzen auf der hinteren Horizontalebene und unteren Vertikalebene als Fortsetzung der wirklichen Schattengrenzen mit punktierten Linien einzutragen. Die Figuren 11 a und 11 b geben ein einfaches und ein schwierigeres Beispiel mit Beifügung dieser nur gedachten Schatten auf den verdeckten Grundebenen.

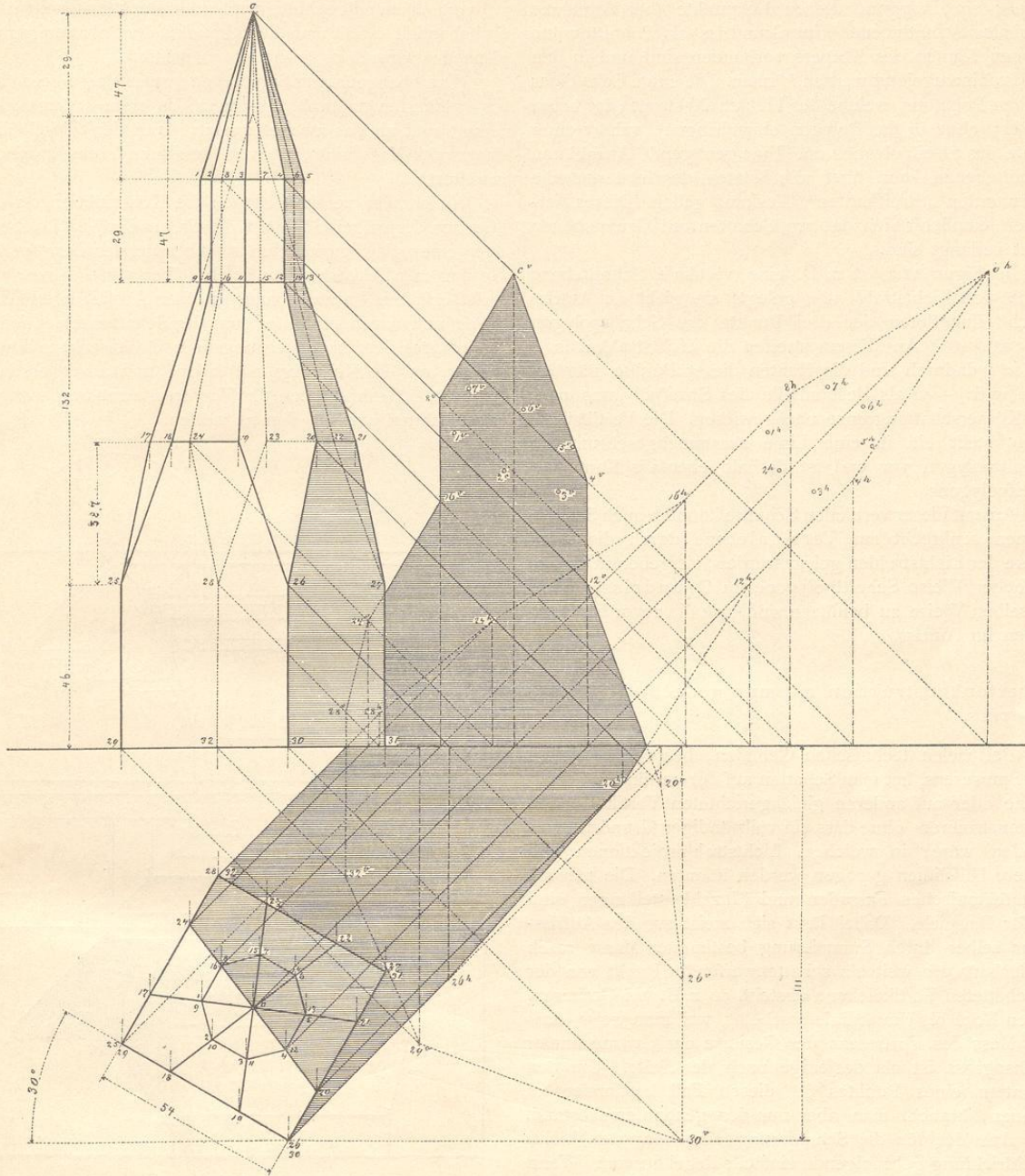
mittelbar im Grundschnitt die Schatten der Kante $10-9$; verlängert schneiden sich im Punkt m des Grundschnitts die Schatten der Kante $13-12$.

3) Kanten, die im Raum parallel sind, haben parallele Schatten. In Figur 11 a z. B. erscheinen parallel die Schattengrenzen 12^h-13^h und 1^h-2^h .

12. Selbstschatten auf Körpern mit ebenen Flächen.

Die Bestimmung der Körperschattengrenze auf dem Vielflach, einer windschief gebrochenen Linie aus einer

und Schatten auf dem Körper.“ In Figur 11a sind z. B. die Kanten $9-10$ und $10-13$ dadurch als Körperschattengrenzlinien nachgewiesen, dass im Schlagschatten-umriss die Linien 9^h-10^h und 10^v-13^v erscheinen.



Figur 11b.

Reihe von Kanten zusammengesetzt, geschieht nach folgender Regel: „Diejenigen Kanten des Körpers, deren Schatten im Umriss der Schlagschattenfigur erscheinen, sind die Grenzen von Licht

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

Ein zweites Hilfsmittel zur Bestimmung der Körperschattengrenze, deren windschief gebrochene Linie zuweilen das „Streifpolygon“ des Lichtes genannt wird, weil die Lichtstrahlen längs dieser Linie den Körper streifen,

ist das Schneiden des Körpers durch einige Ebenen parallel zur Lichtrichtung, und zwar meist durch vertikale Ebenen, die im Grundriss als Linien von 45° Neigung erscheinen. Jede solche Ebene giebt als Schnitt mit dem Körper ein Polygon, dessen Eckpunkte (bei Annahme vertikaler Schnittebenen) im Grundriss als Schnittpunkte mit den Kanten des Körpers vorhanden sind und in den Aufriss hinaufgelotet werden können. Diejenige Ecke eines solchen Polygons, welche der Lichtstrahl streift (das heisst berührt, ohne in das Polygon einzudringen), gehört einer Kante des Streifpolygons an. Eine genügende Anzahl von Schnittebenen kann über alle Kanten des letzteren, die sogenannten „Streifkanten“, Auskunft geben. Dieses Verfahren empfiehlt sich da, wo Schatten auf Grundebenen nicht verlangt sind.

In Figur 11 a ist z. B. eine vertikale Schnittebene durch den Lichtstrahl abc gelegt; sie giebt im Aufriss durch Hinaufloten der drei Punkte das Schnittpolygon $a'b'c'd'e'f'a''$. An diesem streifen die Lichtstrahlen in b' und c'' ; dadurch sind die Kanten dieser Punkte, nämlich 1-2 und 9-10 als Bestandteile des Streifpolygons oder der Körperschattengrenze nachgewiesen. Die Vertikallinie $2'-9'$ stellt ein in eine Linie zusammengeschrunpftes Schnittpolygon vor und ist deshalb ebenfalls Kante des Streifpolygons.

Anstatt dieser vertikalen Schnitte könnten auch Schnittebenen senkrecht zur Vertikalebene durch die Aufrisse der Lichtstrahlen gelegt werden; sie geben in ebenso einfacher Weise Schnittpolygone im Grundriss, die in derselben Weise zu benützen sind, wie die zuvor beschriebenen im Aufriss.

13. Schattenkonstruktion mit nur gedachtem Grundriss.

Bei vielen technischen Gebilden, besonders solchen des Bauwesens, hat man Schatten auf der vertikalen Grundebene oder auf anderen gleichgerichteten Vertikalebenen zu konstruieren, ohne dass ein vollständiger Grundriss vorhanden wäre, in welchem Lichtstrahlprojektionen und andere Hilfslinien gezogen werden könnten. Die meisten architektonischen Fassaden und Einzeldarstellungen sind hiefür Beispiele. Dabei lässt sich meist aus der Aufrissfigur selber durch Summierung bestimmter Masse rasch abstecken, wie weit ein schattenwerfender Punkt von der beschatteten Vertikalebene absteht, so z. B. bei Gesimsen, deren Ecke als Umrisslinie erscheint, weil man weiss, dass das Mass des Vortretens der Gesimse nach vorne immer ebensogross ist als dasjenige nach der Seite. Um den Schatten eines Punktes für diesen Fall bestimmen zu können, braucht man aber nur den genannten Abstand.

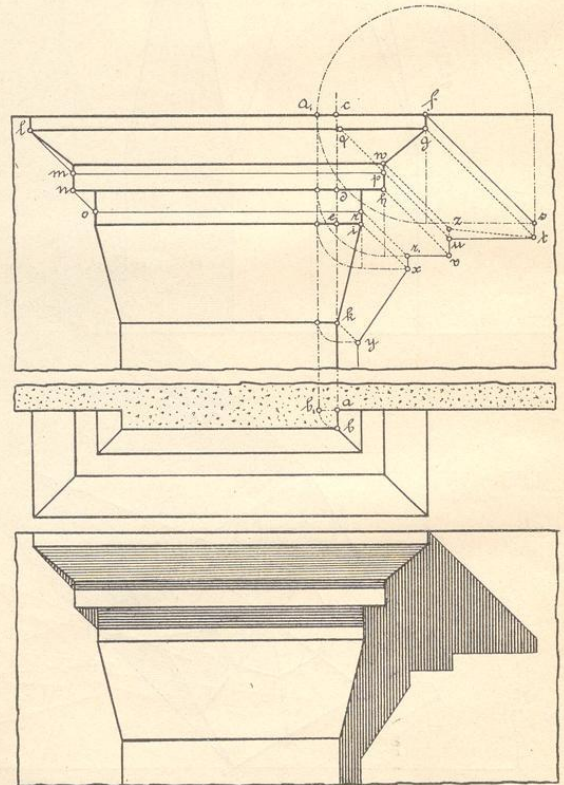
Aus der für die Schattierung eingebürgerten Lichtstrahlrichtung geht folgende einfache Regel hervor: „Wenn ein Punkt seinen Schlagschatten auf die vertikale Grundebene oder auf eine andere gleich gerichtete Ebene wirft, so fällt sein Schatten so weit unter ihn (oder auch so weit rechts von ihm), als er von der Ebene entfernt ist. Man erhält hieraus als einen geometrischen Ort des Schattenspunktes eine Horizontalinie (beziehungsweise Vertikallinie).

Einen zweiten geometrischen Ort hat man in der Vertikalprojektion des Lichtstrahls als in einer Linie unter 45° durch den schattenwerfenden Punkt gezogen; hiedurch ist der Schattenspunkt bestimmt.

Indem man die schattenwerfenden Punkte nacheinander so behandelt, erhält man die Eckpunkte der Schattengrenze, ohne den Grundriss beiziehen zu müssen.

(Das obengenannte Summieren zweier Masse geschieht am raschesten dadurch, dass man das erste in den Zirkel nimmt und an das zweite ansetzt, dann den Zirkel über das zweite Mass hinweg bis zu dessen anderem Endpunkt erweitert.)

Noch mehr vereinfacht sich die Konstruktion für die Grenzen derjenigen Schatten, die ein auf der Vertikalebene oder einer gleichgerichteten Ebene sitzendes horizontales Gesims mit Eckbildung auf sich selber wirft. Unter der meist erfüllten Voraussetzung gleicher Ausladungen nach vorne und nach der Seite muss der Schatten eines jeden Eckpunktes der linken Kehrungslinie (Gesimsseckprofilinie) wieder auf die Kehrungslinie fallen, und anschliessende horizontale Gesimskanten der Vorderseite müssen horizontale Schatten auf das Gesims werfen.



Figur 13 a.

Figur 13 a bietet ein einfaches Beispiel für diese Schattenkonstruktion mit nur gedachtem Grundriss. An der linken Kehrungslinie des Gesimses sind die Schattenspunkte m und o als Schnitte mit den Lichtstrahlen durch

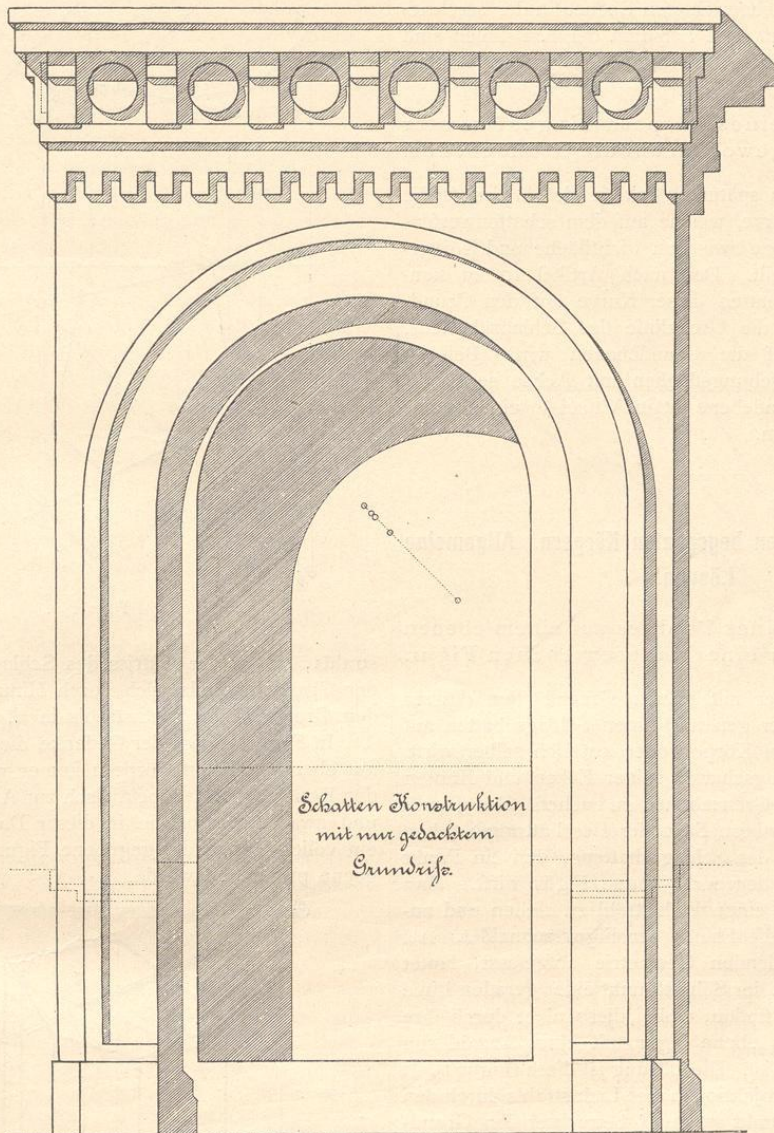
l und n erhalten und die horizontalen Schattengrenzen mp und or daran angeschlossen. Die zur Wandfläche senkrechten Kanten in l und n liefern die unter 45° geneigten Schattengrenzen auf der Wandfläche lm und no .

Der Schatten der rechtseitigen Kehrlinie ist erhalten wie folgt:

linie durch t haben; auch dadurch fällt die Linie tz als Schattengrenzlinie wieder hinaus.

Schattenpunkt v liegt vertikal unter h um $ab + dh$; Schattenpunkt x liegt vertikal unter i um $ab + ei$; Schattenpunkt y liegt vertikal unter k um ab .

Um das Mass ab zu summieren zu cf , dh und ei ,



Figur 13 b.

Schattenpunkt s liegt vertikal unter f um $ab + cf$, ausserdem auf dem Lichtstrahl; Schattenpunkt t liegt vertikal unter g um $ab + cf$.

Schattenpunkt z , von w geworfen, würde vertikal unter w liegen um $ab + dh$; da aber Punkt w selbst im Schatten ist, so kann er keinen Schatten werfen. Wenn ferner g seinen Schatten nach t wirft, so muss die Kante gl , weil parallel zum Grundschnitt, als Schatten eine Horizontal-

kann man sich der Vertikalen a, b , bedienen, die im Abstand ab parallel zu ck gezogen ist. Die Kreise machen das Umklappen der Masse ersichtlich.

Proben: Zieht man durch p einen Lichtstrahl rückwärts bis q , so ist mp der Schatten von lq ; also muss ut der Schatten von qg , als des Restes von lg sein. Das heisst u ist ebenfalls Schatten von q ; also liegen die drei Punkte q, p, u auf einem Lichtstrahl; mit andern Worten:

ρu muss eine Linie von 45° Neigung sein, und dieselbe Bedingung muss erfüllt werden durch $r r, y$.

Ein ausgedehnteres Beispiel der Schattenkonstruktion mit nur gedachtem, beziehungsweise nur zum Abstecken von Massen benütztem Grundriss bietet Figur 13b. In dieser sind nicht nur Schatten auf der Wandfläche, sondern auch auf anderen gleichgerichteten Ebenen in der beschriebenen Weise erhalten. Die Schatten der Kreislinien sind konstruiert wie oben in Artikel 10, Folgerung e) angegeben.

14. Schlagschatten eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche, geworfen auf die Grundebenen.

Man bestimmt in später zu erklärender Weise (siehe Kap. IV u. ff.) die Kurve, welche auf dem schattenwerfenden Körper die Grenze zwischen Lichtfläche und Körperschattenfläche darstellt. Der nach Artikel 10 zu konstruierende Schlagschatten dieser Kurve auf den Grundebenen ist zugleich die Grenzlinie des Schlagschattens, den der Körper auf die Grundebenen wirft (Beispiel Figur 30b). Für Drehungsflächen mit Achse senkrecht zur beschatteten Grundebene ist in Artikel 59 ein weiteres Verfahren beschrieben.

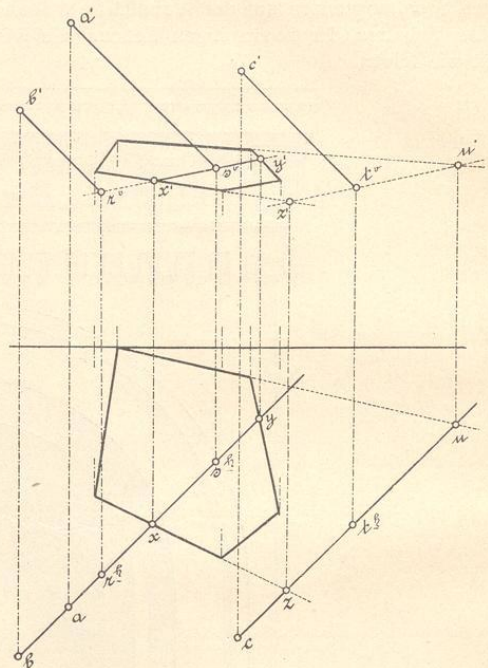
III. Schatten auf eben begrenzten Körpern. Allgemeine Lösung.

15. Schlagschatten eines Punktes auf einem ebenen Polygon oder einer anderen ebenen Figur.

Wenn ein Körper mit ebenen Grenzflächen (kürzer Vielfach und Polyeder genannt) einen Schlagschatten auf einen andern solchen Körper oder auf sich selber wirft, so hat man die Schlagschatten seiner Ecken und Kanten auf den beschatteten Grenzebenen zu suchen. Das grundlegende Problem für diese Fälle der Beschattung ist hiernach das Aufsuchen des Schlagschattens, den ein Punkt auf eine geradlinig begrenzte ebene Figur wirft. Man hat durch den Punkt einen Lichtstrahl zu ziehen und zuzusehen, wo dieser die Fläche der Figur schneidet. Als Problem der darstellenden Geometrie aufgefasst, lautet dies wie folgt: Es ist der Schnittpunkt einer geraden Linie und einer Ebene zu finden, wobei diese nicht durch ihre Spuren, sondern als ebene Figur mit einer Anzahl von Eckpunkten gegeben ist. Die Lösung ist diese (Figur 15a):

Man zieht die Projektionen des Lichtstrahls durch den schattenwerfenden Punkt aa' und betrachtet den Grundriss des Lichtstrahls als die Darstellung seiner horizontalprojizierenden Ebene. Diese vertikalstehende Ebene schneidet die gegebene Figur oder deren Erweiterung nach einer geraden Linie, deren Horizontalprojektion zusammenfällt mit dem Grundriss des Lichtstrahls. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Kanten der gegebenen Figur müssen also im Grundriss zusammenfallen mit den Schnittpunkten der Kanten und des Lichtstrahls. Man hat also diese im Grundriss nach Ziehen des Lichtstrahls erscheinenden Punkte x und y nur hinaufzuloten auf die

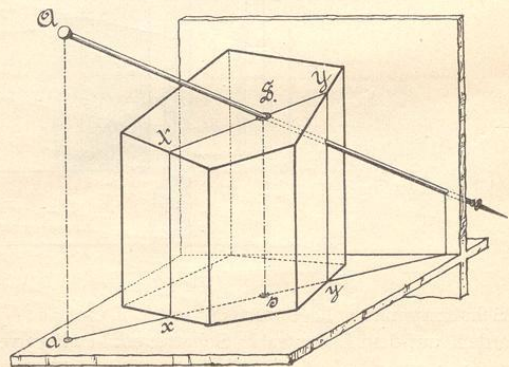
entsprechenden Aufrisskanten nach x' und y' und erhält in der Verbindungslinie $x'y'$ die Vertikalprojektion jener Schnitlinie. Wo sie getroffen wird vom Aufriss des Licht-



Figur 15a.

strahls, da ist der Aufriss des Schlagschattenpunktes s'' ; der Grundriss findet sich durch Hinunterloten von s'' auf den Grundriss des Lichtstrahls in s^h .

In Figur 15b ist der Gedanke dieser für die Schatten auf ebenbegrenzten Körpern immer wieder zu verwerten Konstruktion perspektivisch zur Anschauung gebracht, und zwar erscheint sie in dieser Darstellung so, als ob ein volles Prisma die gegebene Figur auf die Horizontalebene projizieren würde.



Figur 15b.

Der Schatten des Punktes aa' hat sich innerhalb der Grenzlinien der gegebenen Figur gefunden. Ein zweiter Fall ist der, dass zwar der Schatten des Punktes bb' ausser-