



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

III. Schlagschatten auf eben begrenzten Körpern. Allgemeine Lösung.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

ρu muss eine Linie von 45° Neigung sein, und dieselbe Bedingung muss erfüllt werden durch $r r, y$.

Ein ausgedehnteres Beispiel der Schattenkonstruktion mit nur gedachtem, beziehungsweise nur zum Abstecken von Massen benütztem Grundriss bietet Figur 13b. In dieser sind nicht nur Schatten auf der Wandfläche, sondern auch auf anderen gleichgerichteten Ebenen in der beschriebenen Weise erhalten. Die Schatten der Kreislinien sind konstruiert wie oben in Artikel 10, Folgerung e) angegeben.

14. Schlagschatten eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche, geworfen auf die Grundebenen.

Man bestimmt in später zu erklärender Weise (siehe Kap. IV u. ff.) die Kurve, welche auf dem schattenwerfenden Körper die Grenze zwischen Lichtfläche und Körperschattenfläche darstellt. Der nach Artikel 10 zu konstruierende Schlagschatten dieser Kurve auf den Grundebenen ist zugleich die Grenzlinie des Schlagschattens, den der Körper auf die Grundebenen wirft (Beispiel Figur 30b). Für Drehungsflächen mit Achse senkrecht zur beschatteten Grundebene ist in Artikel 59 ein weiteres Verfahren beschrieben.

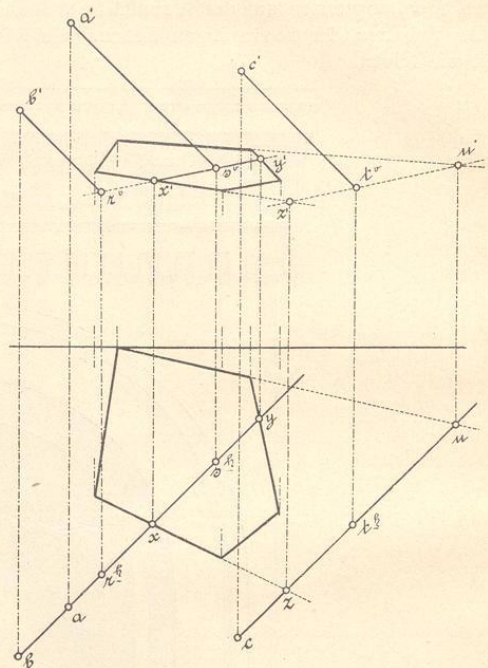
III. Schatten auf eben begrenzten Körpern. Allgemeine Lösung.

15. Schlagschatten eines Punktes auf einem ebenen Polygon oder einer anderen ebenen Figur.

Wenn ein Körper mit ebenen Grenzflächen (kürzer Vielfach und Polyeder genannt) einen Schlagschatten auf einen andern solchen Körper oder auf sich selber wirft, so hat man die Schlagschatten seiner Ecken und Kanten auf den beschatteten Grenzebenen zu suchen. Das grundlegende Problem für diese Fälle der Beschattung ist hiernach das Aufsuchen des Schlagschattens, den ein Punkt auf eine geradlinig begrenzte ebene Figur wirft. Man hat durch den Punkt einen Lichtstrahl zu ziehen und zuzusehen, wo dieser die Fläche der Figur schneidet. Als Problem der darstellenden Geometrie aufgefasst, lautet dies wie folgt: Es ist der Schnittpunkt einer geraden Linie und einer Ebene zu finden, wobei diese nicht durch ihre Spuren, sondern als ebene Figur mit einer Anzahl von Eckpunkten gegeben ist. Die Lösung ist diese (Figur 15a):

Man zieht die Projektionen des Lichtstrahls durch den schattenwerfenden Punkt aa' und betrachtet den Grundriss des Lichtstrahls als die Darstellung seiner horizontalprojizierenden Ebene. Diese vertikalstehende Ebene schneidet die gegebene Figur oder deren Erweiterung nach einer geraden Linie, deren Horizontalprojektion zusammenfällt mit dem Grundriss des Lichtstrahls. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Kanten der gegebenen Figur müssen also im Grundriss zusammenfallen mit den Schnittpunkten der Kanten und des Lichtstrahls. Man hat also diese im Grundriss nach Ziehen des Lichtstrahls erscheinenden Punkte x und y nur hinaufzuloten auf die

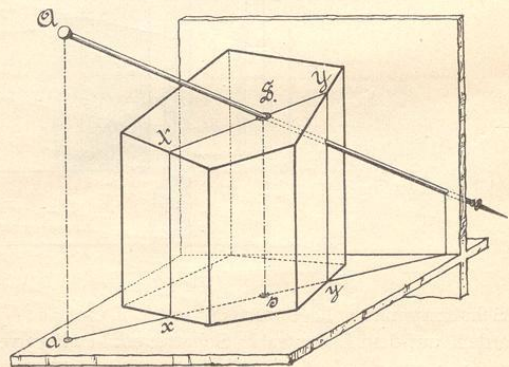
entsprechenden Aufrisskanten nach x' und y' und erhält in der Verbindungslinie $x'y'$ die Vertikalprojektion jener Schnittpunkte. Wo sie getroffen wird vom Aufriss des Licht-



Figur 15a.

strahls, da ist der Aufriss des Schlagschattenpunktes s' ; der Grundriss findet sich durch Hinunterloten von s' auf den Grundriss des Lichtstrahls in s^h .

In Figur 15b ist der Gedanke dieser für die Schatten auf ebenbegrenzten Körpern immer wieder zu verwertenden Konstruktion perspektivisch zur Anschauung gebracht, und zwar erscheint sie in dieser Darstellung so, als ob ein volles Prisma die gegebene Figur auf die Horizontalebene projizieren würde.



Figur 15b.

Der Schatten des Punktes aa' hat sich innerhalb der Grenzlinien der gegebenen Figur gefunden. Ein zweiter Fall ist der, dass zwar der Schatten des Punktes bb' ausser-

halb der Figur fällt, dass aber doch die Vertikalebene des durch den Punkt gezogenen Lichtstrahls die Kanten der Figur unmittelbar schneidet, so dass die Lösung völlig dieselbe bleibt, wie im ersten Fall (Schattenpunkt r'' mit Grundriss in r''), und nur $x' y'$ zu verlängern ist.

Ein dritter Fall erscheint, wenn nicht nur der Schatten des Punktes cc' ausserhalb der Figur fällt, sondern auch die Vertikalebene des durch den Punkt gezogenen Lichtstrahls die Seiten der Figur nicht mehr unmittelbar schneidet. Man muss dann geeignete Seiten oder Diagonalen der Figur verlängern, bis zwei Schnitte mit der Horizontalprojektion des Lichtstrahls erhalten werden (in z und u). Diese Schnittpunkte lotet man wieder hinauf nach z' und u' , zieht $z' u'$ und erhält als Schnitt dieser Linie mit dem Aufriss des Lichtstrahls den Schattenpunkt t'' im Aufriss. Das Hinunterloten auf den Grundriss des Lichtstrahls giebt den Schattenpunkt im Grundriss t'' .

Ungenauere spitzwinklige Durchschnitte zwischen den Seiten der Figur und dem Grundriss des Lichtstrahls oder den Projektionsloten können immer durch bessere Durchschnitte ersetzt werden, indem man bestimmte andere Seiten der Figur verlängert oder bestimmte Diagonalen zieht. Auch die Unsicherheit, welche durch zu geringe Länge der Strecken xy oder zu hereinkommt, lässt sich auf diesem Weg umgehen.

Beim Aufzeichnen der Projektionen des Vielecks ist zu beachten, dass beliebig angenommene n Eckpunkte nur dann eine ebene Figur bilden, wenn die in Art. 8e genannte Bedingung erfüllt ist.

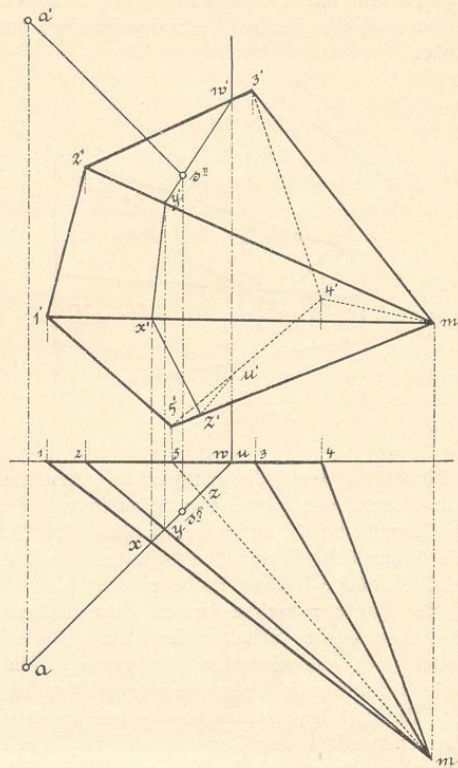
Ist der Schlagschatten eines Punktes auf einer ebenen Figur mit gekrümmter Umrisslinie zu bestimmen, so wählt man auf dieser Linie einige Punkte als Eckpunkte eines Vielecks und konstruiert den Schlagschattenpunkt auf diesem in der zuvor beschriebenen Weise.

16. Schlagschatten eines Punktes auf einem Vielflach.

Auf Grund der vorggeführten Konstruktion ist folgendes Problem lösbar: „Den Schatten eines Punktes auf einem Polyeder zu suchen.“ Man hat die Konstruktion nur auf die einzelne Grenzebene des Körpers anzuwenden.

Nicht immer, wenn der Schatten eines Punktes auf einem Polyeder zu suchen ist, weiss man nun aber zum voraus, auf welche der ebenen Grenzflächen des Körpers der Schatten fällt. Es ist daher meist notwendig, die Schnittlinie der lotrechten Lichtstrahlenebene nicht nur mit einer Körperfläche zu suchen, sondern mit mehreren, ja oft mit allen, die von ihr geschnitten werden, so dass eine gebrochene Schnittlinie, ein „Schnittpolygon“, an die Stelle der früheren geraden Schnittlinie tritt. Die Horizontalprojektionen der Eckpunkte der gebrochenen Schnittlinie sind sämtlich im Grundriss des Lichtstrahls und des Polyeders schon vorhanden und dürfen nur auf die Kanten der Vertikalprojektion des Körpers hinaufprojiziert werden. Wo der Lichtstrahl die gebrochene Schnittlinie schneidet, da ist der Schatten des Punktes auf dem Polyeder.

Es sei z. B. in Figur 16 der Schlagschatten des Punktes aa' auf der fünfseitigen Pyramide mit Basis in der Vertikalebene zu suchen. Nachdem die Lichtstrahl-



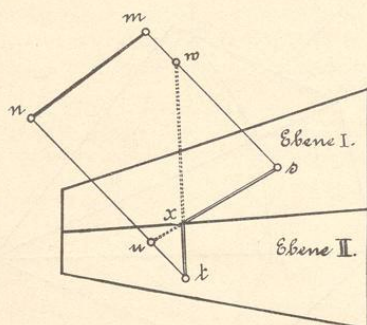
Figur 16.

projektionen gezogen sind, lotet man aus dem Grundriss die Schnittpunkte $uzxyw$ hinauf nach $u'z'x'y'w'$ und erhält hiedurch im Aufriss die gebrochene Schnittlinie $u'z'x'y'w'$. Sie wird vom Aufriss des Lichtstrahls im Punkt s'' getroffen; dieser ist Schlagschattenpunkt im Aufriss; sein Hinunterloten auf den Lichtstrahlgrundriss nach s^h giebt den Schlagschattenpunkt im Grundriss.

Schlagschatten einer geraden oder gekrümmten Linie auf einem Vielflach. Schlagschattenpunkte einer Linie auf einer andern.

Der nächste Schritt wird zu folgendem Problem führen: Den Schatten einer begrenzten geraden Linie auf einem Polyeder zu suchen. Man hat dabei zunächst zu suchen die Schatten der beiden Endpunkte der Geraden. Gewöhnlich werden sie auf zwei verschiedene, aber benachbarte Flächen des Körpers fallen, und man weiss dann zunächst über die Richtung der gebrochenen Schattenlinie nichts, wenn man auch die beiden Endpunkte derselben hat. Es ist daher notwendig, wenigstens für einen Endpunkt den Schatten auch auf der Erweiterung derjenigen Grenzebene zu bestimmen, die der andere Punkt beschattet. Um den Schatten eines

Punktes auf der Erweiterung einer Grenzfläche zu erhalten, darf man nur die auf dieser befindliche Strecke der gebrochenen Schnittlinie bis zum Schnitt mit der Vertikalprojektion des Lichtstrahls verlängern. Verfährt man in dieser Weise für beide Endpunkte, so hat man eine Probe.



Figur 17 a.

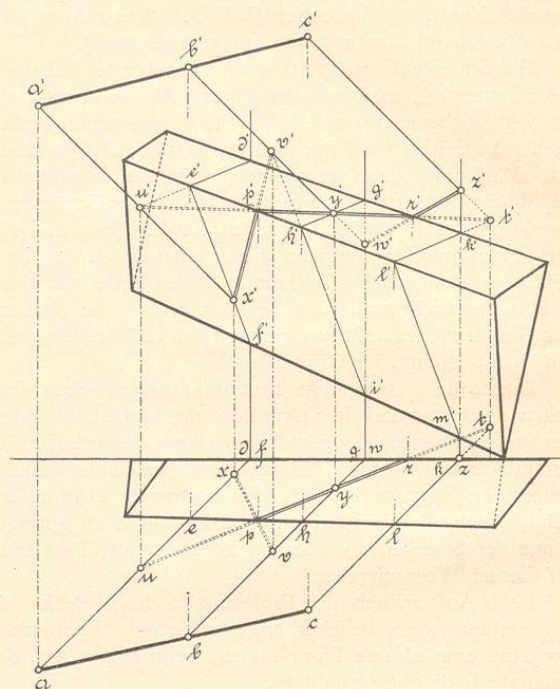
In Figur 17a werfe der Endpunkt m den Schatten s auf die Grenzfläche I und den Schatten w auf die erweiterte Grenzfläche II, ferner Endpunkt n den Schatten t auf die Grenzfläche II und den Schatten u auf die erweiterte Grenzfläche I. Zur Probe müssen sich su und tw auf der Kante zwischen beiden Grenzflächen in x schneiden; sxt ist der Schatten der Geraden mn .

Verteilt sich der Schatten der geraden Linie auf mehr als zwei Grenzflächen des Körpers, so ist jede getroffene Grenzfläche erweitert zu denken und der Schatten jedes Endpunktes der Geraden auf der Erweiterung zu bestimmen. Die graphische Konstruktion ist dabei zunächst dieselbe wie bei den vorhergehenden Problemen; man bestimmt zuerst die gebrochenen Schnittlinien der beiden lotrechten Lichtstrahlenebenen mit dem Körper und verlängert jede Strecke der Schnittlinien, die auf einer beschatteten Grenzfläche liegt, bis zum Schnitt mit beiden Lichtstrahlprojektionen.

Oft fällt ein Teil des Schattens der Geraden auf die Grundebenen, der andere auf den Polyeder; doch macht dies für die Lösung der Aufgabe keinen wesentlichen Unterschied, sondern man behandelt die Grundebene, als ob sie eine Grenzfläche des Polyeders wäre. Zur vollständigen Lösung gehört das Hinunterloten der Schattenpunkte und das Ziehen der Schattenlinien in der Horizontalprojektion.

Beispiel. Die gerade Linie abc in Figur 17b werfe ihren Schatten teils auf das schräge Prisma, teils auf die Vertikalebene. Die gebrochenen Schnittlinien der drei durch die Punkte abc gehenden vertikalen Lichtstrahlenebenen, erhalten wie zuvor in Art. 16, seien $d'e'f'$, $g'h'i'$, $k'l'm'$. Unmittelbar werden als Schnitte dieser Linien mit den drei Lichtstrahlen erhalten die Schattenpunkte $x'y'z'$. Durch Verlängerung von $d'e'$ wird erhalten u' als Schatten von a' auf der erweiterten oberen Grenzfläche; durch Verlängerung von $i'h'$ wird erhalten v' als Schatten von b' auf der erweiterten unteren Grenzfläche; durch Verlängerung von $l'k'$ wird erhalten t' als Schatten

von c' auf der erweiterten oberen Grenzfläche, und durch Ziehen von $g'i'$ wird erhalten w' als Schatten von b' auf der Vertikalebene. Nun sind zu ziehen die Linien $x'v'$



Figur 17 b.

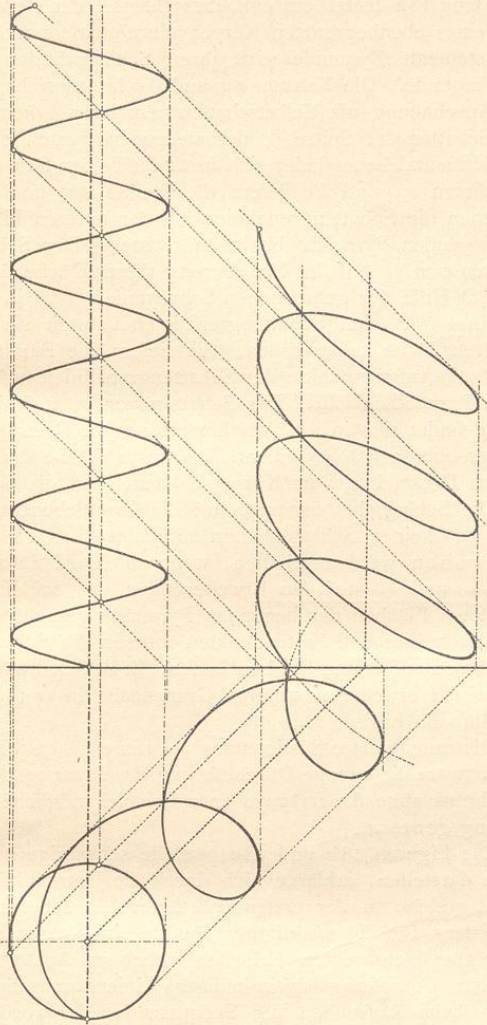
$u'y't'w'z'$; zur Probe muss $u'y't'$ eine Gerade werden und die Schnittpunkte der drei Linien p' und r' müssen auf die Kanten fallen. Die gebrochene Linie $x'p'y'r'z'$ ist der Schlagschatten von $a'b'c'$. Durch Hinunterloten ihrer Punkte auf die Lichtstrahlprojektionen und Kanten in den Grundriss findet sich in diesem die Schattenlinie $xpyrz$.

Ein zweites, mittelbar bestimmendes Verfahren ist das Aufsuchen des Schlagschattens der Geraden und der Schlagschatten der Kanten des Vielfachs auf einer Grundebene. Wo der Schlagschatten der Geraden den Schlagschatten einer Kante schneidet, da ist der Schlagschatten desjenigen Punktes, in welchem die auf dem Vielfach zu suchende Schlagschattenlinie über die Kante weggeht; ein rückwärts durch den Schattenpunkt auf der Grundebene gezogener Lichtstrahl führt also zu dem Schattenpunkt auf der Kante. Hat man auf allen beschatteten Kanten solche Punkte bestimmt, so führt deren geradlinige, in richtiger Reihenfolge vollzogene Verbindung ebenfalls zu der gesuchten gebrochenen Schlagschattenlinie. Dieses Verfahren kann zuweilen rascher zum Ziel führen als das erstbeschriebene; auch bei dem zuvor betrachteten Beispiel würde dies zutreffen.

Der Schlagschatten einer gekrümmten Linie auf einem Vielfach findet sich dadurch, dass man die Schatten einer genügenden Zahl von Punkten der Linie auf dem Vielfach aufsucht und stetig verbindet. Zur schärferen Bestimmung des Verlaufs der gebrochenen Schattenkurve,

insbesondere der Eckpunkte, die sie auf den Kanten des Körpers bildet, ist es zu empfehlen, für jedes Schattenkurvenstück auch noch ein Stück weit die beiden Verlängerungen auf der Erweiterung der beschatteten Grenzebene aufzusuchen.

Wenn etwa nur die Schlagschattenpunkte auf den Kanten des Vielfachs verlangt sind, so lassen sich diese Punkte rascher dadurch erhalten, dass man die Schlag-



Figur 17c.

schatten der Kanten des Vielfachs und diejenigen der Kurve auf einer Grundebene aufsucht. Der Schnittpunkt der hiedurch erhaltenen Schattenkurve mit dem Schatten einer Kante ist der Schatten desjenigen Punktes der Kante, auf welchen die gegebene Kurve ihren Schatten wirft.

Eine in der praktischen Schattenkonstruktion kaum selbständig vorkommende Aufgabe: „Den Schlagschattenpunkt oder die Schlagschattenpunkte einer geraden oder gekrümmten Linie auf einer anderen solchen Linie zu suchen“, kann immerhin als Bestandteil zusammengesetzter

Aufgaben Bedeutung gewinnen, etwa wenn es sich darum handelt, wichtige Punkte der Schlagschattengrenzen unabhängig von der übrigen Lösung scharf zu bestimmen. Diese Aufgabe löst sich dadurch, dass man die Schlagschatten beider Linien auf einer Grundebene sucht. Wo sich die hiedurch erhaltenen Schattenlinien schneiden, da ist der gemeinschaftliche Schlagschattenpunkt derjenigen zwei Linienpunkte, die einander in Schatten setzen, und die zuweilen als „Fixpunkte“ beider Linien bezeichnet werden. Ein rückwärts gezogener Lichtstrahl führt also zu beiden. Eine naheliegende Aufgabe: „Es sind die Punkte der Selbstbeschattung einer Schraubenlinie aufzusuchen“ ist in Figur 17c behandelt.

Schlagschatten eines Vielfachs auf einem an- 18.
dern Vielfach und Selbstbeschattung von
Körpern mit ebenen Flächen. Schatten im
Innern hohlgedachter ebenbegrenzter Kör-
per.

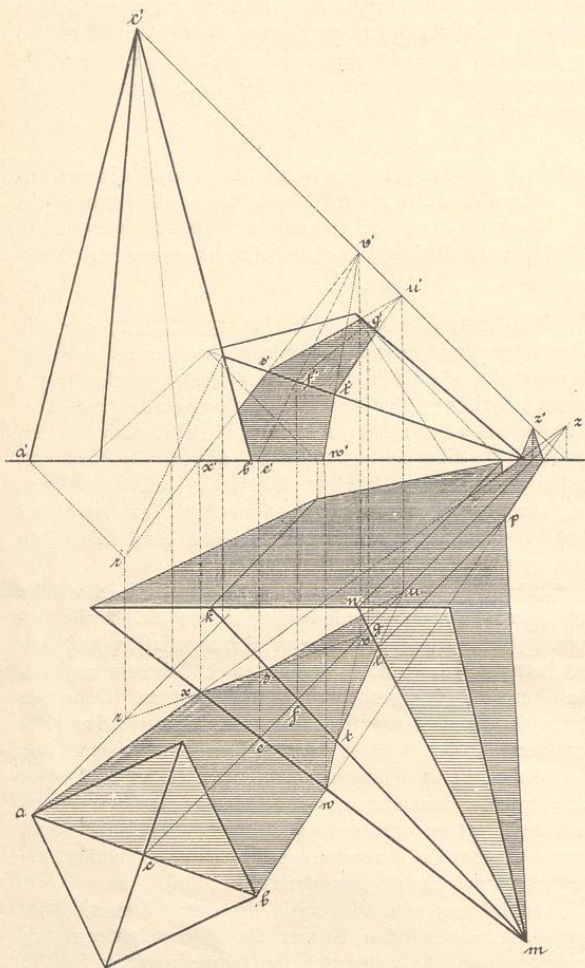
Mit den Konstruktionen in Art. 15, 16 u. 17 sind die Grundlagen gewonnen, auf denen das weitest gehende Problem für ebenbegrenzte Körper gelöst werden kann: „Den Schlagschatten eines ebenbegrenzten Körpers auf einem andern solchen Körper zu suchen.“ Eingeschlossen ist in diesem Problem das andere: „Die Selbstbeschattung eines ebenbegrenzten Körpers zu bestimmen.“ Man hat hiebei nur den schattenwerfenden Teil und den beschatteten wie zwei getrennte Körper zu behandeln.

Indem die gebrochene oder Streifpolygonlinie, welche auf dem schattenwerfenden Körper die Selbstschattengrenze darstellt, ihren eigenen Schlagschatten auf den beschatteten Körper wirft, erzeugt sie auf diesem zugleich die Grenzlinie des gesuchten Schlagschattens. Denn die längs der Streifpolygonlinie den schattenwerfenden Körper berührenden Lichtstrahlen bilden ein Prisma; nur ausserhalb dieses Prismas kann der beschattete Körper Lichtstrahlen aufnehmen; was von seiner Oberfläche innerhalb liegt, ist im Schatten, und zwar im Schlagschatten, soweit es dem Licht zugewendet, im Körperschatten, soweit es vom Licht abgewendet ist.

Die Lösung wird also darin bestehen, dass man auf dem schattenwerfenden Körper die Selbstschattengrenze bestimmt und die Schlagschatten ihrer geraden Stücke auf den Grenzebenen des beschatteten Körpers nach Art. 17 aufsucht.

Diese Selbstschattengrenze kann in vielen Fällen oft schon nach der Anschauung festgestellt werden; ein Fehler in dieser Richtung macht sich später im Resultat meist von selbst bemerklich und hat nur ein wenig vergebliche Arbeit zur Folge. Wo die Entscheidung schwieriger ist, bestimmt man das genannte Streifpolygon etwa mit Hilfe des Schlagschattens, den der schattenwerfende Körper auf eine Grundebene wirft, unter Anwendung des in Art. 12 ausgesprochenen Satzes für die Selbstschattengrenze. Häufig fällt ohnehin ein Teil des Schlagschattens auf die Grundebene. Oder man macht von den in Art. 12, zweiter Teil, genannten Schnittpolygonen auch für die

Selbstschattengrenze auf dem schattenwerfenden Körper Gebrauch, wie es für den beschatteten ohnehin nahe liegt. Denn die geraden oder gebrochenen Schnittlinien, die auf diesem zur Bestimmung der Schlagschattenspunkte dienen, sind ja Bestandteile der Schnittpolygone, mit welchen seine Körperschattengrenze bestimmt werden kann, und können also, genügend weit fortgesetzt, auch in dieser zweiten Richtung verwertet werden.



Figur 18a.

Ein besonderer Fall der Selbstbeschattung ebenbegrenzter Körper erscheint im Innern von solchen, wenn man ihre Oberfläche als dünne Schale auffasst, wie sie etwa in einem Papier- oder Blechmodell geboten ist. Die Selbstschattengrenze, von bestimmten Kanten als „Streifpolygon“ gebildet, ist für das Innere eines solchen Hohlkörpers ganz dieselbe wie für das Äussere; die Lichtflächen des Äusseren erscheinen im Innern als die Körperschattenflächen, da sie vom Licht abgewendet sind; die Körperschattenflächen des Äusseren sind im Innern dem Lichte zugewendet, aber durch die andern Flächen

verdeckt; sie sind also durchaus Schlagschattenflächen. Erst wenn ein Teil der Grenzflächen weggebrochen wird, kann ein Teil dieser dem Lichte zugewendeten inneren Flächen beleuchtet werden; die Grenzlinie zwischen diesem inneren Licht und dem inneren Schlagschatten hat für das Äussere keine Bedeutung, wie es auch äussere Selbstbeschattung geben kann, ohne dass deren Grenzlinien auf den Lichtflächen für das Innere etwas bedeuten.

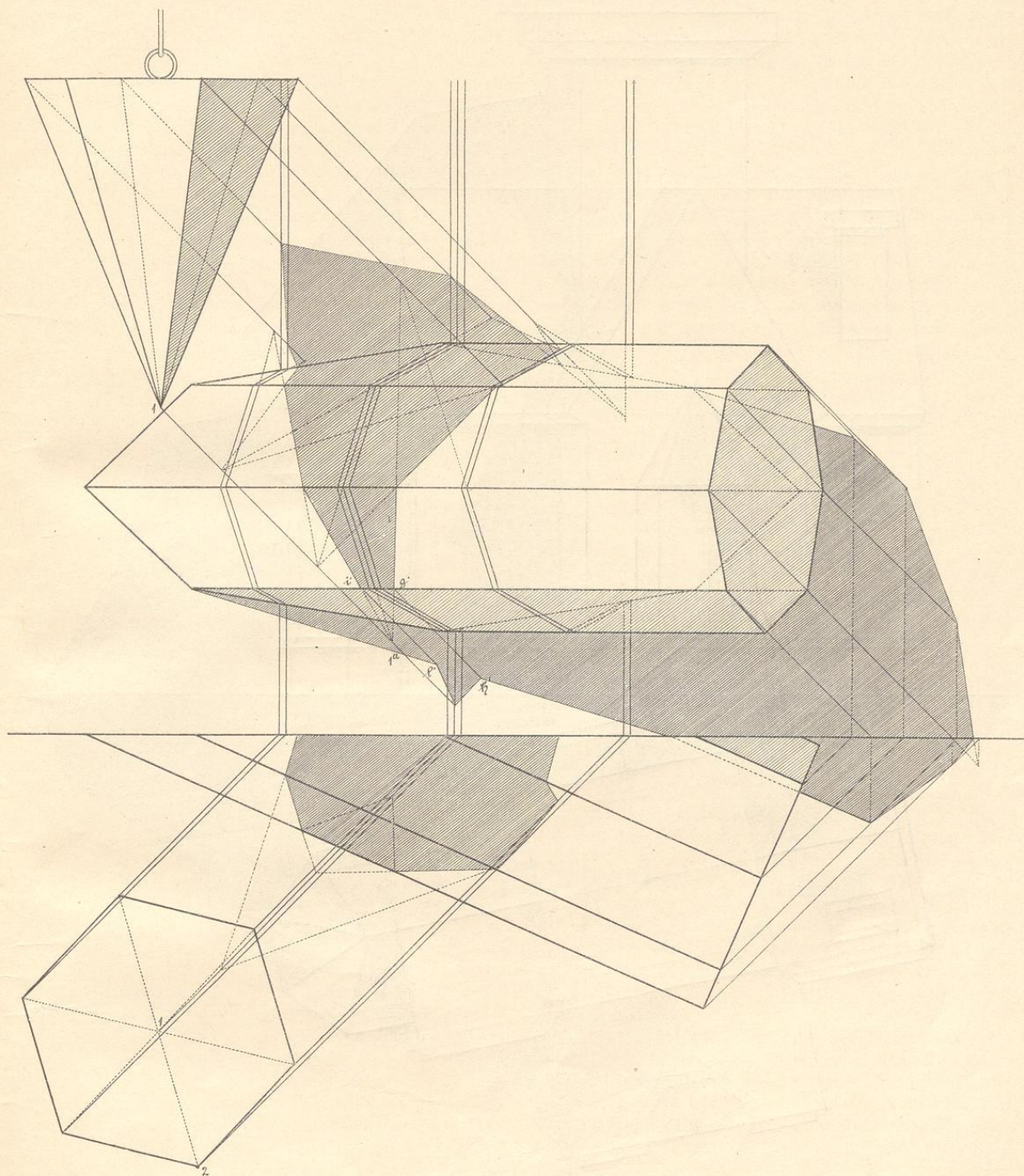
Figur 18a bietet ein einfaches Beispiel der Beschattung eines ebenbegrenzten Körpers durch einen andern; eine stehende Pyramide wirft ihren Schlagschatten auf eine liegende. Die Kanten ac und bc lassen sich nach der Anschauung als Selbstschattengrenzlinien erkennen. Der Schatten der Spitze cc' der stehenden Pyramide auf der Horizontalebene findet sich in z ; die beiden Schattengrenzlinien az und bz liefern die Punkte xx' und ww' , an denen die Schattengrenzlinien auf der unteren Fläche der liegenden Pyramide beginnen müssen. Der Schlagschatten von cc' auf der Erweiterung dieser Fläche findet sich mit Hilfe der gebrochenen Schnittlinie $e'f'g'$ in vv' ; $x'v'$ und $w'v'$ sind Schattengrenzlinien, soweit sie auf die Grenzfläche selber fallen. Sie liefern die Punkte s' und t' als Anfangspunkte der Schattengrenzlinien auf der oberen Pyramidenfläche. Der Schatten von cc' auf dieser Fläche findet sich in uu' ; dorthin müssen die Grenzlinien auf der oberen Fläche laufen. Die dritte Fläche der liegenden Pyramide ist im Körperschatten, weil die Kante mn die Schlagschattengrenze auf die Grundebene wirft, kann also keinen Schlagschatten aufnehmen.

Proben werden erhalten, wenn noch die Schatten von aa' und bb' auf den Erweiterungen der beiden beleuchteten Flächen der liegenden Pyramide gesucht werden; nach diesen Schattenpunkten müssen die Schattengrenzlinien auf diesen Flächen laufen. Z. B. Schatten von aa' auf der erweiterten unteren Grenzfläche in rr' ; dorthin läuft die Linie $v'r'$.

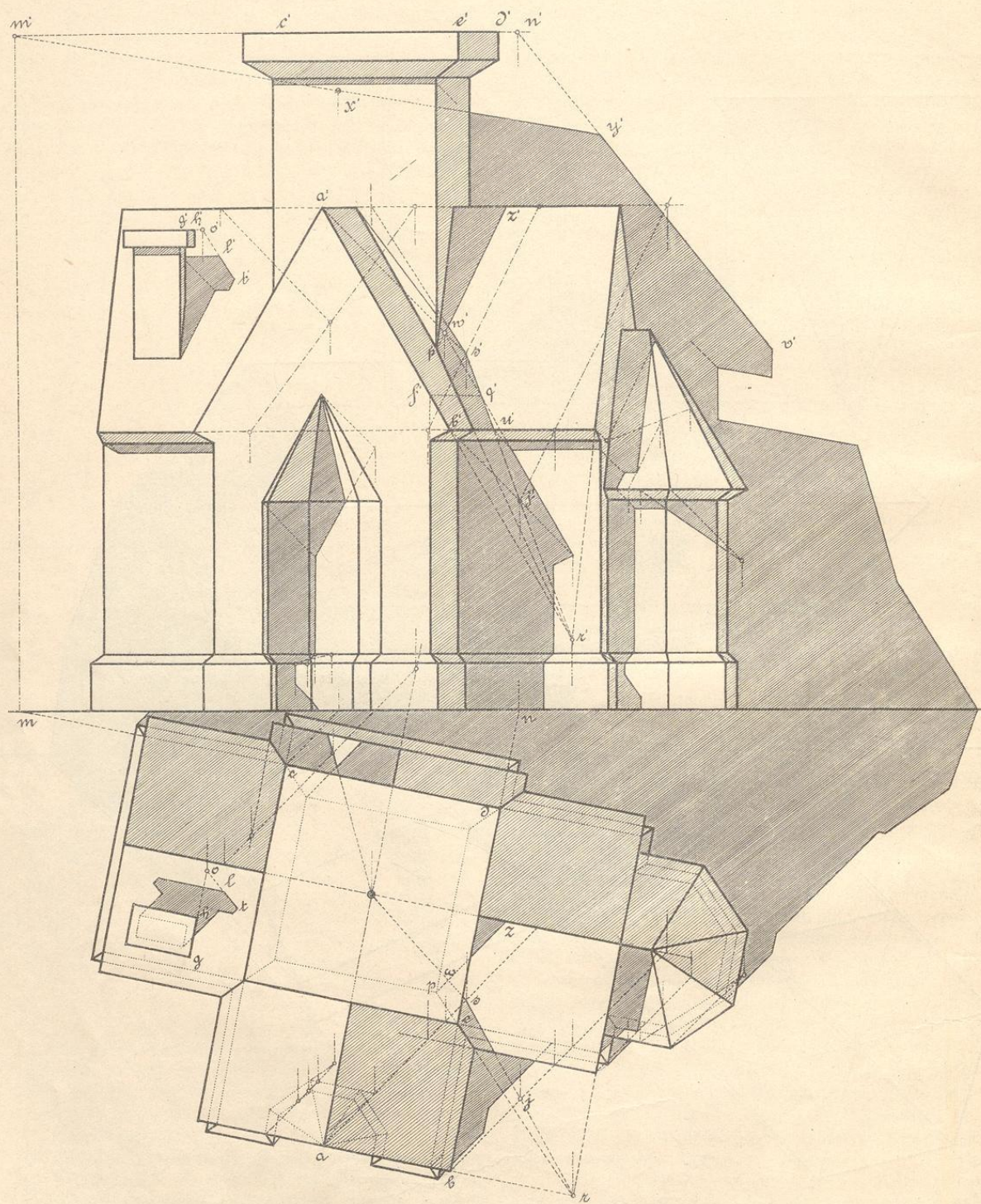
Die unmittelbare Bestimmung der Linie $r'v'$ mit Hilfe von rr' wäre die strenge Durchführung des zuvor erklärten Verfahrens ohne die im gegebenen Beispiel mögliche Abkürzung gewesen.

Die Figuren 18b und 18c, welche schwierigere Beispiele darstellen, erklären sich durch die Konstruktionslinien, welche in der ersten vollständig, in der zweiten wenigstens für die wichtigeren Punkte eingetragen sind. Figur 18c bietet einen Fall der früher in Art. 15 erwähnten Umgehung spitzwinkliger Liniendurchschnitte, indem beim Aufsuchen des Schattens ss' der vorderen Giebelspitze aa' auf der langseitigen Dachfläche nicht die steile Kehllinie zwischen beiden Dächern, sondern die Verlängerung der langseitigen Trauflinie benützt ist. Ebenso ist beim Aufsuchen des Schattens jj' der unteren Giebelecke bb' auf der Erweiterung der langseitigen Dachfläche nicht die steile Randlinie der letzteren, sondern die Verlängerung ihrer Firstlinie benützt.

Selbstverständlich wird man die in Figur 18b zu grösserer Anschaulichkeit vollständig gezeichneten Schnittpolygone in der praktischen Verwertung des Verfahrens nur bruchstückweise, soweit sie sich als notwendig vermuten lassen, in die Zeichnung aufnehmen.



Figur 18 b.



Figur 18 c.

19. Die Umkehrung der in Art. 18 erklärten allgemeinen Lösung.

Alle Lösungen, die bisher für Schatten auf ebenen Figuren und Körpern mit ebenen Flächen gezeigt wurden, lassen sich auch in der Weise durchführen, dass zum Schneiden des beschatteten Gebildes nicht die vertikale Ebene des Lichtstrahls gewählt wird, sondern die unter 45° geneigte, die ihn auf die vertikale Grundebene projiziert (die sogenannte vertikalprojizierende Ebene). Man erhält dann die Schnittpolygone im Grundriss anstatt im Aufriss, und der Schattenpunkt erscheint zuerst im Grundriss. Diese Lösung ist nichts anderes als eine Umkehrung des allgemeinen Verfahrens mit Vertauschung von Horizontal- und Vertikalprojektion; sie ist etwa vorzuziehen, wenn man die Schatten nur im Grundriss braucht. Da jedoch weitaus in den meisten Fällen die Benützung der vertikalen Schnittebenen näher liegt, so mag die Lösung mit diesen auch fernerhin als die „allgemeine“ für Schatten auf Polyedern bezeichnet werden.

Noch eine zweite Abänderung der allgemeinen Lösung erscheint in der Benützung der später zu erklärenden Seitenprojektion anstatt des Grundplans und der seitlich projizierenden Ebenen der Lichtstrahlen anstatt der vertikalen. Diese Lösung wird beizuziehen sein, wenn etwa das zu schattierende Gebilde nur durch Aufriss und Seitenprojektion gegeben ist, so dass die allgemeine Lösung das Zeichnen eines Grundplans erfordern würde. Ein weiterer Fall ist geboten bei prismatischen und cylindrischen Körpern parallel zum Grundschnitt, worüber auf Kap. IV zu verweisen ist.

20. Schlagschatten eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche auf einem Vielflach.

Man bestimmt in später zu erklärender Weise die Kurve, welche auf dem schattenwerfenden Körper die Grenze von Lichtfläche und Körperschattenfläche darstellt. Der nach Art. 17 zu konstruierende Schlagschatten dieser Kurve auf dem Vielflach ist zugleich die Grenze des Schlagschattens, den der Körper auf das Vielflach wirft.

21. Hilfssätze für die Schatten auf Körpern mit ebenen Flächen.

Beim Aufsuchen der Schattengrenzen auf Polyedern (und zum Teil auch andern Körpern) gelangen fortwährend folgende Sätze zur Verwertung, indem sie entweder als Konstruktionsmittel dienen oder Proben liefern. Eines Beweises bedürfen sie nicht.

a) Was im Schatten ist, kann keinen Schatten werfen. In keiner Schattengrenze kann ein Punkt oder eine Kante als schattenwerfend auftreten, der oder die ringsum von Körperschatten oder Schlagschatten umgeben ist.

b) Punkte und Kanten, die ringsum von Lichtflächen umgeben sind, können ebenfalls keine Schatten werfen. Nur die Grenzlinien zwischen Licht- und Körper-

schatten erscheinen als schattenwerfend in den Schlag-schattengrenzen.

c) Der Schatten einer geraden (oder gekrümmten) Linie auf einer Ebene (oder anderen Fläche) beginnt da, wo die Linie mit der Fläche zusammentrifft. Dieser selbstverständliche Satz bietet willkommene Proben besonders dann, wenn der Schnittpunkt nicht unmittelbar am Gebilde vorliegt, sondern Linie und Fläche räumlich getrennt liegen, in welchem Fall das Gerichtetsein der Linie nach dem Schnittpunkt nicht unmittelbar aus dem Bild herausgeföhlt wird.

So läuft z. B. in Figur 18c der Schatten der Kante cd auf der Vertikalebene, $x'y'$ nach dem Punkte m' , der den Schnittpunkt dieser Kante mit der Vertikalebene darstellt; ebenso läuft $v'y'$ nach n' , dem Schnittpunkt von $e'd'$ mit der Vertikalebene. Am Körper selbst läuft $z'w'$ nach p' und $s'u'$ nach r' , dem Schnittpunkt der Kante $a'b'$ mit der langseitigen Dachfläche. Für den Schatten des Kamins auf der Dachfläche bestimmt sich leicht oo' als Schnittpunkt der Kante gh mit der Dachfläche; nach diesem Punkt muss in Grundriss und Aufriss der Schatten dieser Kante tl laufen.

d) Der Schatten einer Geraden auf jeder ihr parallelen Ebene ist eine Parallellinie. So ist z. B. in Figur 18c der Schatten der Giebelkante $a'b'$ auf der Langwand dieser Kante parallel; die linke geneigte Kante der Nische in der Giebelwand hat auf der vertikalen Rückwand der Nische einen parallelen Schatten und ebenso die rechte Giebelkante der langseitigen Dachfläche auf der ersten Chor-Dachfläche einen parallelen Schatten in Grundriss und Aufriss.

e) Die Schattenstücke einer Geraden auf zwei verschiedenen Ebenen treffen sich auf der Schnittlinie dieser Ebenen. Auch dieser Satz, selbstverständlich wenn die Ebenen am Gebilde selbst sich schneiden, liefert oft willkommene, nicht sofort in die Augen springende Proben, wenn die Ebenen räumlich getrennt liegen. In Figur 18c ist z. B. $f'q'$ die Schnittlinie der vertikalen Langwand mit der langseitigen Dachfläche. Die Giebelkante $a'b'$ wirft getrennte Schattenstücke auf diese beiden Ebenen. Dasjenige auf der vertikalen Wand muss verlängert nach q' als dem Schnittpunkt von $f'q'$ und $s'u'$ laufen.

f) Wenn der Schatten einer Geraden am Rand einer Ebene aufhört, um auf einer anderen getrennt liegenden Ebene sich fortzusetzen, so liegen die Endpunkte beider Schattenstücke auf einem Lichtstrahl. Das heisst sie liegen in beiden Projektionen auf einer Linie von 45° Neigung. So liegen z. B. in Figur 18a die Punkte l und p , in Figur 18b die Punkte g' und h' , ferner i' und l' auf einem Lichtstrahl, und besonders häufig findet sich die genannte Probe in Figur 18c, wofür mehrere Linien eingezeichnet sind.

g) Der Schatten einer senkrecht zur Vertikalebene gerichteten Geraden auf einem Vielflach (und auf jedem andern Körper) fällt im Aufriss mit der Lichtstrahlprojektion zusammen, ist also immer eine gerade Linie von 45° Neigung.

Ebenso fällt der Schatten einer Vertikallinie auf jedem Körper im Grundriss mit der Lichtstrahlprojektion zusammen.

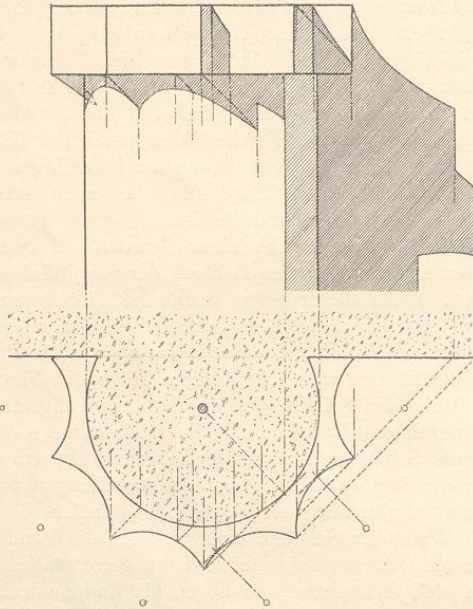
h) Eine gerade Linie parallel zum Grundschnitt hat auf jeder Ebene parallel zum Grundschnitt einen horizontalen Schatten im Grundriss und Aufriss. (Besonderer Fall von d.)

i) Eine vertikale Gerade wirft auf jede vertikalstehende Ebene einen vertikalen Schatten. Der Schatten einer Geraden, die senkrecht zur Vertikalebene steht, ist auf jeder zur Vertikalebene senkrecht stehenden Ebene ebenfalls senkrecht zur Vertikalebene. (Besondere Fälle von d.)

k) Der Schatten einer parallel zum Grundschnitt liegenden Geraden auf einer Ebene normal zum Grundschnitt ist unter 45° geneigt.

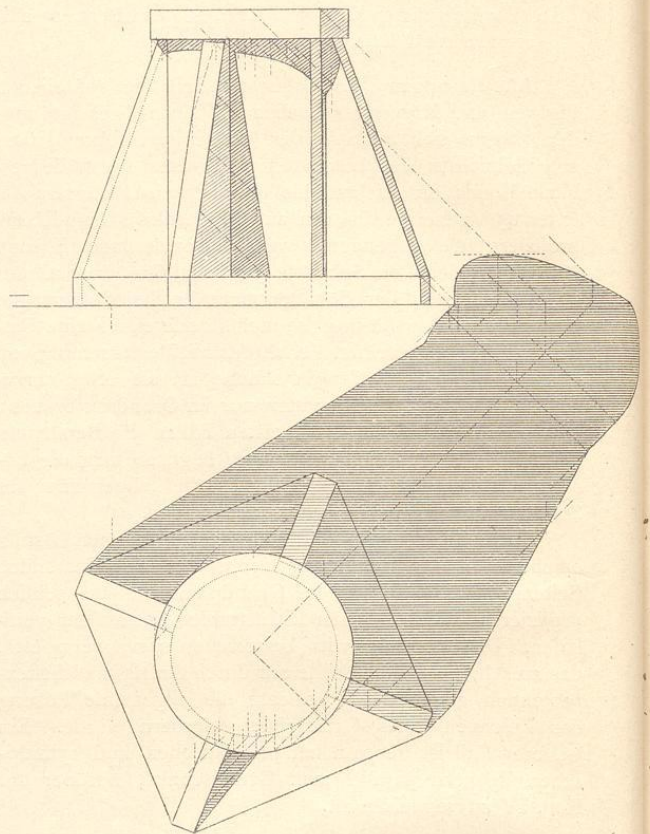
22. Schatten auf vertikalstehenden prismatischen und cylindrischen Flächen.

Die Anwendung der in Art. 18 beschriebenen allgemeinen Lösung für Schatten auf ebenbegrenzten Körpern auf diesen besonderen Fall gestaltet sich sehr einfach, indem für jeden schattenwerfenden äusseren Punkt die Schnittlinie der Vertikalebene des Lichtstrahls mit der be-

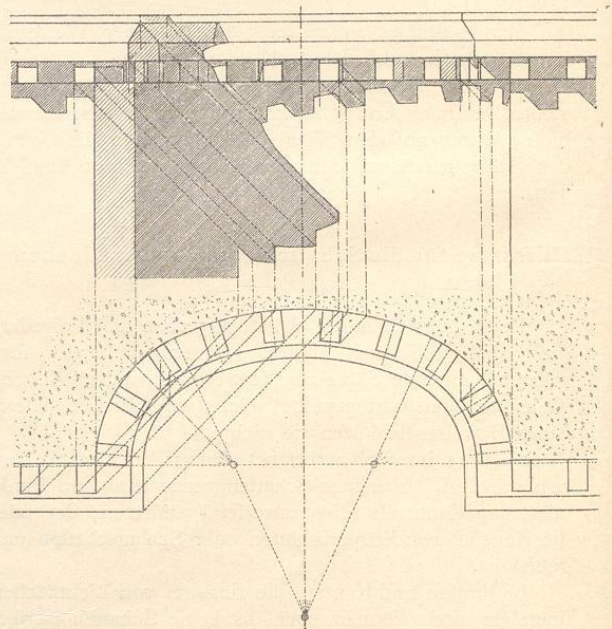


Figur 22 a.

schatteten Fläche eine vertikale Gerade wird, die im Grundriss als ein Punkt vorhanden ist, sobald die Lichtstrahlprojektionen gezogen sind. Cylindrische Flächen, obgleich gekrümmt, können hier einbezogen werden, indem der Cylinder als ein Prisma von sehr vielen kleinen Seiten aufgefasst wird und als Schnittlinie mit der Vertikalebene des Lichtstrahls ebenfalls eine vertikale Gerade, nämlich eine Mantellinie des Cylinders, erscheint. Die Körperschattengrenze auf dem Cylinder ist die Mantellinie durch den Berührungspunkt des als Tangente am Cylinder im Grundriss gezogenen Lichtstrahls.



Figur 22 b.

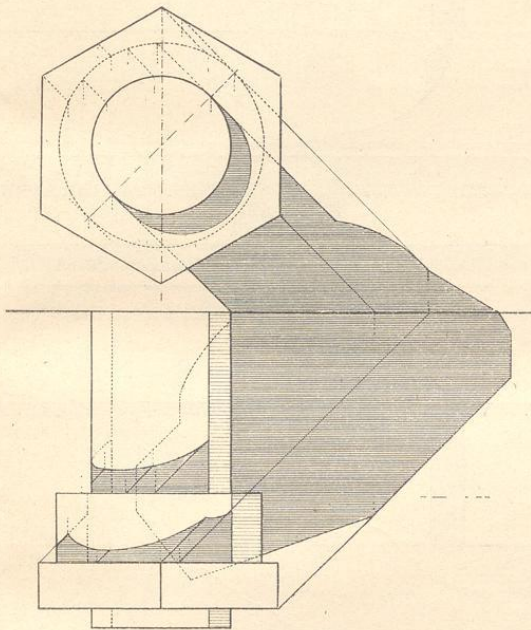


Figur 22 c.

Die 3 Beispiele, Figuren 22a, 22b, 22c, erklären sich durch die für einige Schlagschattenpunkte und die Körperschattengrenzen eingezeichneten Lichtstrahlen.

23. Schatten auf prismatischen und cylindrischen Flächen senkrecht zur Vertikalebene.

Wenn man die allgemeine Lösung für Schatten auf eben begrenzten Körpern auf diesen besonderen Fall anwendet, so findet sich, dass im Aufriss die Schnittlinien, welche die Vertikalebenen des Lichtstrahls mit den Grenzflächen bilden sollen, mit dem Umriss des beschatteten Körpers zusammenfallen. Man erhält nun zwar trotzdem die Schattenpunkte im Aufriss und kann sie auf den Lichtstrahl im Grundriss hinunterloten; doch wird dieses Verfahren einfacher erklärt als die in Art. 19 beschriebene Umkehrung der allgemeinen Lösung, entstanden durch Vertauschung von Horizontal- und Vertikalprojektion, wo-



Figur 23.

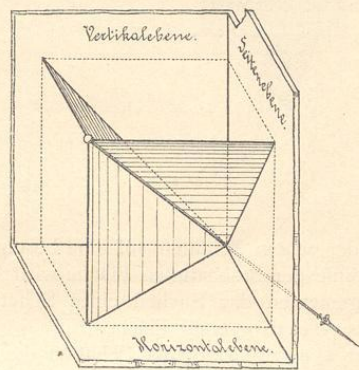
nach die vertikalprojizierenden Ebenen der Lichtstrahlen als Schnittebenen des beschatteten Körpers auftreten. Auch die hiehergehörigen Probleme lösen sich äusserst einfach; Figur 23 erklärt sich durch die Lichtstrahlen, die für einige Schlagschattenpunkte und die körperschattenabgrenzenden Mantellinien der Cylinder gezogen sind.

IV. Schatten auf prismatischen und cylindrischen Flächen parallel zum Grundschnitt.

24. Grundlagen aus der darstellenden Geometrie.

Als neues Element aus der darstellenden Geometrie erscheint für die hieher gehörigen Lösungen die „Seiten-

projektion“ der Körper, auch „Seitenriss“ und „Kreuzriss“ genannt. Ausser den früher besprochenen Projektionen auf eine horizontale und vertikale Grundebene benützt nämlich die darstellende Geometrie zuweilen auch die Projektion auf eine dritte Grundebene, welche senkrecht zum Grundschnitt steht, eben die Seitenprojektion oder Seitenansicht der Körper. Sie zeigt den Körper so, wie er von der Seite, entweder von der linken oder von der rechten Seite, aus unendlicher Entfernung gesehen erscheinen würde; im ersten Fall denkt man sich die Seitenebene rechts vom Körper, im zweiten links. Die Projektionslote sind dabei parallel zum Grundschnitt. In der Seitenprojektion müssen alle Punkte gleich hoch liegen wie im Aufriss, und mit denselben horizontalen Entfernungen voneinander auftreten, die sie im Grundriss in der Richtung senkrecht zum Grundschnitt darbieten. Es geht aus dieser Definition hervor, dass die Projektion des Lichtstrahls auch auf der Seitenebene unter 45° geneigt ist, und zwar ist sie in einer Ansicht des Körpers von der



Figur 24.

rechten Seite nach rechts unten geneigt. Figur 24 zeigt einen Lichtstrahl mit seinen drei projizierenden Ebenen perspektivisch: dabei ist die Seitenebene rechts angenommen.

Die allgemeine Lösung nicht der kürzeste Weg. 25. Benützung der Seitenprojektion.

Die zuletzt behandelte allgemeine Lösung für Schlagschatten von Polyedern auf Polyedern ist zwar auch möglich für den besonderen Fall, dass der beschattete Körper prismatisch oder cylindrisch und parallel zum Grundschnitt ist. Aber die allgemeine Lösung bildet nicht den kürzesten Weg für diesen besonderen Fall, indem die Schnittlinie der vertikalen Ebene des Lichtstrahls mit der beschatteten Fläche eine gebrochene Linie oder Kurve, mit einer andern Schnittebene dagegen weit einfacher wird. Daher folgende bessere Lösung: Man zeichnet die Seitenprojektion der beiden Körper, zieht durch jeden schattenwerfenden Punkt einen Lichtstrahl im Aufriss und in der Seitenprojektion und betrachtet die unter 45° geneigte Ebene, die den Lichtstrahl auf die Seitenebene projiziert. Die Schnittlinie dieser Lichtstrahlenebene mit der beschatteten