



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

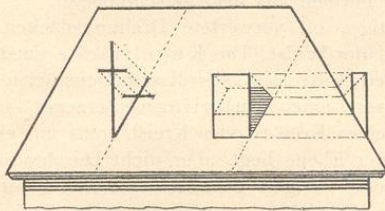
Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

V. Schatten auf gekrümmten Flächen. Allgemeine Lösung.

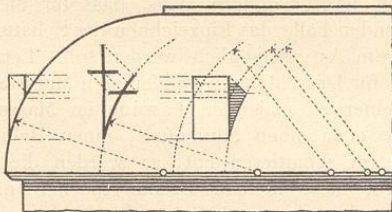
[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

giebt folgende Betrachtung, dass der Schatten dieser Vertikallinie eine gerade Linie wird mit derselben Neigung wie die der Ebene. Denkt man sich den Grundriss, so erscheint in diesem der Schlagschatten als Linie mit einem Winkel von 45° gegen die Vertikalebene wie gegen die Seitenebene, also symmetrisch zu diesen beiden Grundebenen. Die Projektion der im Raum schräg ansteigenden Schattenlinie muss also auf der Vertikalebene dieselbe Neigung darbieten wie auf der Seitenebene. Auf dieser fällt aber die Projektion der Schattenlinie zusammen mit derjenigen der Dachfläche, also muss auch die Vertikalprojektion der Schattenlinie dieselbe Neigung zeigen wie die Dachfläche in der Seitenprojektion, oder, was dasselbe ist, wie die Dachfläche im Raum.



Figur 26a.

Dieselbe Bemerkung gilt für eine gebrochene oder Mansardendachfläche; auf jeder Teilebene einer solchen erscheint der Schatten der vertikalen Geraden im Aufriss mit der Neigung, welche die Teilebene selbst hat. Ebenso ist der Schatten einer solchen Geraden auf einem cylindrischen Dach, das parallel zum Grundschnitt liegt, im Aufriss dieselbe gekrümmte Linie wie der Querdurchschnitt des Daches, also bei einem kreiscylindrischen Dach ein Kreisbogen vom gleichen Radius (Figur 26b). Horizontale Linien parallel zur Dachfirstlinie werfen immer einen horizontalen Schatten auf ein in der Längsansicht gezeichnetes Dach, sei es eben oder cylindrisch. Ein vertikalstehendes Kreuz wirft also den Schatten nach Figur 26a oder 26b. Diese Folgerungen sind hier hervorzuheben, weil viel dagegen gefehlt wird.

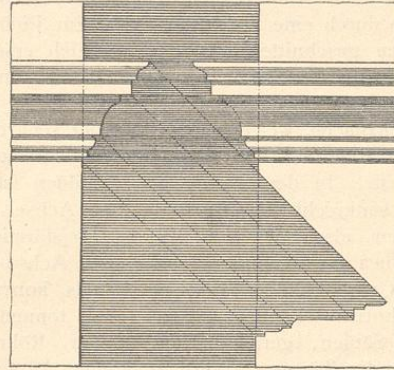


Figur 26b.

Aus der Symmetrie des Lichtstrahls gegen Vertikalebene und Seitenebene ergibt sich ferner, dass der Schatten einer vertikalen Kante auf einem in der Längsansicht gezeichneten Gesims dieselbe Linie bildet wie das Profil des Gesimses, nur nach links umgelegt und unterbrochen durch die fortlaufenden Streifen von Körper- und Schlagschatten des Gesimses. Bei der Gesimsverkröpfung, Fig. 26c, wirft die obere Wandkante einen

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

solchen Schatten, wogegen die Gesimsecke ihren Schatten tiefer wirft und nach Art. 13 zu behandeln war. Auch gegen diese Folgerung wird oft gefehlt. Wenn der Vorsprung der einen Mauer über die andere nur klein ist,



Figur 26c.

so greifen übrigens beide Schattenprofile übereinander; die Lösung wird dann komplizierter und verlangt die Benützung der Seitenprojektion, wofür die Figuren 25c und 25d Beispiele darbieten.

Die Benützung der Seitenprojektion anstatt des Grundplans ist — wie schon oben ausgesprochen — auch für andere Körper als Prismen und Cylinder parallel zum Grundschnitt möglich, und zwar können hiebei als Schnittebenen des beschatteten Körpers sowohl die seitlich projizierenden als die vertikal projizierenden Ebenen der Lichtstrahlen benützt werden. Doch liegt ein Grund zu dieser Abänderung der allgemeinen Lösung für Schatten auf eben begrenzten Körpern nur etwa dann vor, wenn das Gebilde nur durch die genannten zwei Projektionen, nicht auch durch einen Grundriss gegeben ist.

V. Schatten auf gekrümmten Flächen. Allgemeine Lösung.

Definitionen aus der darstellenden Geometrie 27. und Beispiele technischer Verwertung.

Mit den nun bekannten Konstruktionen lassen sich die Schattengrenzen bestimmen für alle diejenigen Fälle, in welchen ein Körper mit ebenen Flächen einen Schatten wirft auf die Grundebenen, oder auf einen andern Körper mit ebenen Flächen, oder auf sich selber. Nicht minder häufig als diese Schatten erscheinen in den Darstellungen technischer Gebilde solche auf gekrümmten Flächen, insbesondere auf Cylinderflächen, Kegelflächen und Drehungsflächen. Der früheren Ankündigung entsprechend sind die Definitionen für diese Flächen als Repetition der Grundlagen aus der darstellenden Geometrie kurz einzuschalten.

Eine Cylinderfläche entsteht, wenn eine Gerade längs einer gekrümmten Linie, die nicht in derselben

Ebene liegt, parallel fortschreitet; jede Lage der Geraden bildet eine Mantellinie oder Erzeugende des Cylinders; die gekrümmte Linie heisst die Leitlinie; in der Folge wird aber unter Leitlinie eines Cylinders nur diejenige gekrümmte Linie zu verstehen sein, nach welcher die Fläche durch eine Ebene senkrecht zur Richtung der Mantellinien geschnitten wird. Gewöhnlich erscheint in den technischen Gebilden der gerade Kreiscylinder, das heisst der Cylinder, dessen Leitlinie ein Kreis ist. Die ebene Grenzfläche, welche einen Cylinder senkrecht oder schief zur Richtung der Mantellinien begrenzt, heisst dessen Basis. In den technischen Gebilden ist sie gewöhnlich senkrecht zur Richtung der Achse und der Mantellinien, also beim Kreiscylinder kreisförmig. Jeder Schnitt eines Kreiscylinders schief zur Achse ist eine Ellipse. Cylinderflächen erscheinen teils konvex, teils konkav, horizontal oder vertikal, bei tonnenförmigen Dächern, Säulen, geraden Rundstangen, Röhren, Gesimsen, runden Türmen, Erkern, Balkonen, Aussenmauern und Innenräumen mit kreisförmigem Grundriss, Brückenpfeilern, Mauerbögen, Tonnengewölben u. s. f.

Eine Kegelfläche entsteht, wenn eine gerade Linie derart fortschreitet, dass sie einerseits immer durch denselben Punkt geht, andererseits an einer gekrümmten Linie gleitet, die mit dem Punkte nicht in derselben Ebene liegt. Der Punkt heisst die Spitze des Kegels; jede Lage der Geraden heisst eine Mantellinie. Eine ebene Grenzfläche, welche den Kegel abschliesst, heisst seine Basis. Gewöhnlich erscheint in den technischen Gebilden der gerade Kreiskegel, das heisst der Kegel, dessen Basis kreisförmig ist und dessen Spitze sich auf dem Lot im Mittelpunkt der Basis befindet. Das Lot heisst die Achse des Kegels. Der Schnitt eines Kreiskegels schief zur Achse liefert als Schnittlinie entweder eine Ellipse, oder eine Parabel, oder eine Hyperbel. Kegelflächen erscheinen in den technischen Gebilden teils konvex, teils konkav, mit vertikaler oder horizontaler Achse, bei runden Turmdächern, Umrahmungen von mittelalterlichen Fenstern und Thüren, bestimmten Gewölbformen, z. B. den sogenannten Stichkappen, Decken über kreisförmigen Räumen, Gesimsen auf cylindrischen Wandflächen, Gussteilen für Eisenkonstruktionen, bei zahlreichen kunstgewerblichen Gegenständen, bei runden Böschungen der Bahn- und Strassendämme oder Ufermauern und endlich bei vielen Formen im Maschinenbau.

Eine Drehungsfläche entsteht, wenn irgend eine gekrümmte oder gebrochene Linie um eine Gerade gedreht wird. Die Gerade heisst die Achse der Drehungsfläche. Jeder Punkt der gedrehten Linie beschreibt einen Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Drehungsachse steht und der ein Parallelkreis genannt wird. Legt man durch die Achse eine Anzahl Ebenen, so schneiden diese die Drehungsfläche nach gekrümmten oder gebrochenen Linien, die alle kongruent sind; jede solche Linie heisst ein Meridian der Drehungsfläche. Der Schnitt durch eine Ebene parallel oder schief zur Achse liefert im allgemeinen eine Kurve höherer Ordnung. — Drehungsflächen erscheinen in den technischen Gebilden teils konvex, teils konkav, teils mit konvexen Parallelkreisen bei

konkavem Meridian, teils mit konkaven Parallelkreisen bei konvexem Meridian. Die Achse steht entweder vertikal oder senkrecht zur Vertikalebene oder parallel zum Grundschnitt; schiefgerichtete Drehungsflächen liefern sehr zeitraubende Probleme, sind aber selten. Beispiele von Drehungsflächen bilden Säulenfüsse und Kapitäle, überhaupt Gesimse auf cylindrischen Wandflächen, Kuppeldächer und Kuppelräume, bogenförmige Umrahmungen von Fenstern und Thüren, bogenförmige Nischen, Masswerke der gotischen Hochfenster und Rosenfenster, Baluster und Kandelaber, verzierte Dachspitzen, gedrehte Knäufe und Rosetten, bogenförmige Röhren, Füsse und andere Stützenformen an Mobilien, überhaupt alle Arbeiten des Drehers, Vasen und Gefässe aller Art und zahlreiche Formen aus dem Maschinenbau.

Wichtige, oft verwertete Drehungsflächen sind die Kugel und der Wulst. Die Kugelfläche entsteht durch Drehung eines Kreises oder Kreisbogenstücks um einen Durchmesser; eine Wulstfläche erzeugt sich durch Drehung eines Kreises oder Kreisbogens um eine Achse, die in seiner Ebene liegt, aber nicht Durchmesser ist.

Von den übrigen gekrümmten Flächen sind es nur etwa noch Wendelflächen und Schraubenflächen, die in der Technik Verwertung finden, nicht nur bei Schraubengewinden flachgängig oder scharfgängig, sondern auch bei Wendeltreppen und überhaupt Treppen mit gekrümmtem Lauf; doch sind solche Gebilde selten ausführlich zu schattieren, abgesehen etwa von grossen Schrauben in Maschinenzzeichnungen. Konoidische Flächen erscheinen bei bogenförmiger Durchbrechung von kreisförmigen Mauern; Röhrenflächen und Rückungsflächen sind verwirklicht in Gesimsformen, Gewölbformen, kunstgewerblichen und maschinentechnischen Gebilden u. s. f. Die Definitionen dieser seltener verwerteten Flächen folgen später. Andere gesetzmässig gekrümmte Flächen als die genannten dürften an den technischen Gebilden nur sehr selten zu finden sein.

Der Zweck des Studiums der Schattenkonstruktionen ist nicht nur der, dass man die zur vollkommenen Darstellung nötigen Schatten auf solchen Flächen konstruieren lernt, sondern auch, dass für die häufiger vorkommenden Fälle das Einzeichnen der Schattengrenzen aus freiem Auge möglich werden soll. Letzteres gilt besonders für Darstellungen im kleineren Massstab. Wenn man an einer zu malenden Fassade im Massstab 1:50 oder 1:20 etwa einen Säulenfuss, einen Baluster oder eine Vase zu schattieren hat, so werden die Schattengrenzen für diese kleinen Drehungsflächen nicht konstruiert, sondern nur nach Schätzung eingetragen. Wer einige Uebung hat, der kann solche Schatten aus freiem Auge mit solcher Sicherheit einzeichnen, dass die graphische Konstruktion nur geringe Fehler nachweisen würde und die Schattierung für den Zweck der guten Anschaulichkeit, dem sie ja allein dienen soll, vollkommen genügt. Dazu gehört nur, dass man für wenige solcher Flächen die Schatten einmal wirklich konstruiert und das Resultat aufmerksam entstehen sehen hat. Diese Ausbildung des Gefühls für richtige Schattierung ist ein ebenso grosser Gewinn aus dem Studium der Schatten-

konstruktion, als das Wissen von den Verfahren, mit deren Hilfe man die Schattengrenzen finden kann. Dies zur Ermutigung, wenn sich in der Folge zeigen sollte, dass das Konstruieren der Schattengrenzen auf vielen gekrümmten Flächen unverhältnismässig viel Arbeit erfordert.

28. Allgemeine Lösung für Schatten auf gekrümmten Flächen.

Die Schatten auf gekrümmten Flächen sind wieder entweder Körperschatten oder Schlagschatten, geworfen von aussenstehenden Gebilden oder von Teilen des beschatteten Körpers selber.

Denkt man sich den Körper mit gekrümmter Oberfläche zunächst konvex, so wird eine Seite der Oberfläche von den Lichtstrahlen getroffen, die andere nicht. Zwischen beiden Flächenteilen muss eine Grenze bestehen, eben die Körperschattengrenze. Sie erscheint — wie schon früher ausgesprochen — bei runden Körpern dem Auge sehr verschwommen, indem der Uebergang von Licht zu Schatten durch zahllose feine Zwischenstufen vor sich geht, ist aber mathematisch betrachtet doch eine scharfe Linie. Sie bildet sich, wie leicht einzusehen — da, wo die Lichtstrahlen berührend am Körper vorbeistreichen; die Berührungspunkte sind eben die Punkte der Körperschattengrenze. Hierauf gründet sich die folgende Konstruktion dieser letzten:

Man schneidet den Körper durch eine Anzahl von Vertikalebene, die zur Lichtrichtung parallel stehen, also Lichtstrahlen enthalten und im Grundriss mit deren geradlinigen Projektionen zusammenfallen. Man sucht die gekrümmten Schnittlinien dieser Ebenen mit dem Körper in der Vertikalprojektion auf. Man zieht im Aufriss tangierende Lichtstrahlen an diese Schnittlinien, bestimmt die Berührungspunkte und verbindet sie durch eine stetige Kurve. Diese ist die Körperschattengrenze.

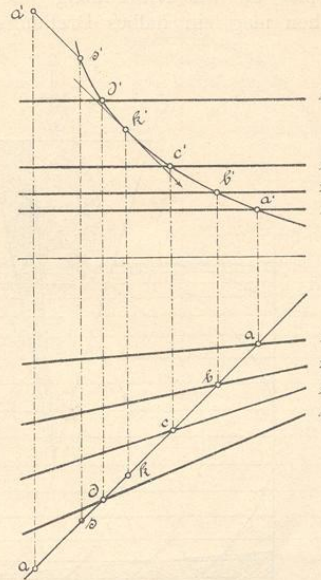
Ist der Schlagschatten eines äusseren Punktes auf einer gekrümmten Fläche zu suchen, so zieht man einen Lichtstrahl durch den Punkt, betrachtet die vertikale Ebene dieses Lichtstrahls und sucht die gekrümmte Schnittlinie dieser Ebene mit dem Körper im Aufriss auf. Wo der Aufriss des Lichtstrahls diese Kurve schneidet, da ist der Schlagschatten des Punktes. Diese Lösung ist nichts anderes als die Uebertragung der früher für Polyeder vorgeführten Konstruktion auf die runden Körper.

Das Aufsuchen der gekrümmten Schnittlinien im Aufriss gestaltet sich verschieden je nach der Art der beschatteten Fläche und ist nur durch Wahl bestimmter Arten von Flächen zu erklären.

29. Anwendung auf Regelflächen.

Ist die beschattete Fläche eine Regelfläche (das heisst durch irgend eine Bewegung einer geraden Linie erzeugt), so hat man nur die erzeugende Gerade in einer genügenden Zahl ihrer Lagen zu zeichnen und die Schnittpunkte jeder Schnittebene mit jeder Geraden aus dem Grundriss in den Aufriss hinaufzuloten. Sind in Fig. 29a

in den Geraden 1 2 3 4 vier Lagen der erzeugenden Geraden gezeichnet, so hat der im Grundriss gezeichnete Lichtstrahl die vier Schnittpunkte $a b c d$; deren Hinaufloten in den Aufriss nach $a' b' c' d'$ ergibt die Schnittkurve der Fläche mit der Lichtstrahlenebene; der Berührungspunkt k' des als Tangente im Aufriss gezogenen



Figur 29a.

Lichtstrahls ist ein Punkt der Körperschattengrenze im Aufriss; sein Hinunterloten auf den Lichtstrahlgrundriss nach k giebt den entsprechenden Punkt der Körperschattengrenze im Grundriss. Wirft ein äusserer Punkt aa' seinen Schatten auf die Fläche, so liefert nach Konstruktion der Schnittkurve der im Aufriss durch a' gezogene Lichtstrahl den Schlagschattenpunkt s' und dessen Hinunterloten auf den Lichtstrahlgrundriss den zugehörigen Grundrisssschlagschattenpunkt s .

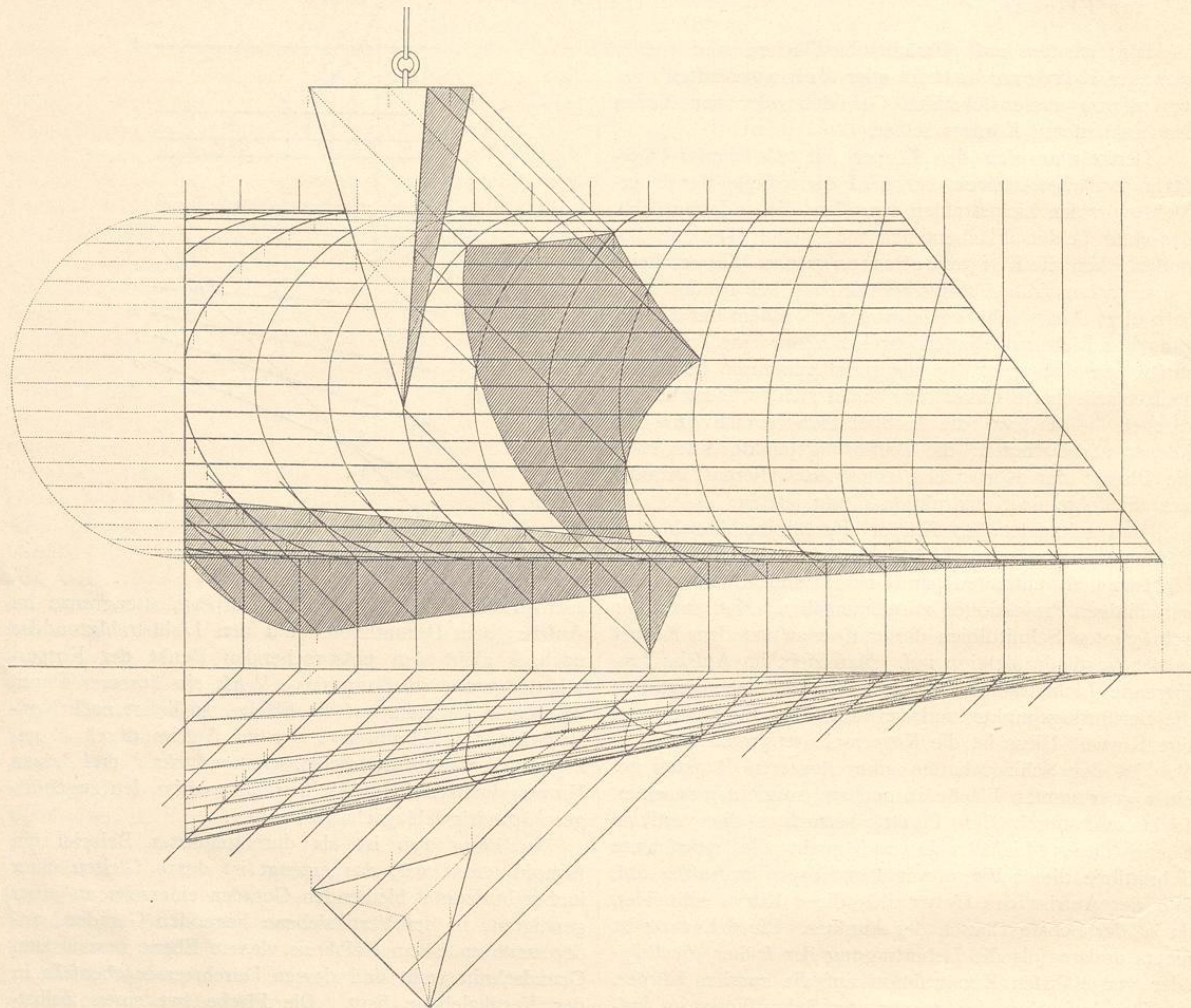
In Figur 29b ist als durchgeführtes Beispiel ein Konoid gezeichnet, das erzeugt ist durch Gleiten einer immer horizontal bleibenden Geraden einerseits an einer geneigten, in der Vertikalebene liegenden Geraden, andererseits an einem Halbkreis, dessen Ebene normal zum Querschnitt steht und dessen Durchmesser ebenfalls in der Vertikalebene liegt. Die Fläche hat einen Selbstschatten und ist von aussen durch eine hängende Pyramide beschattet. Die Konstruktion erklärt sich durch die eingezeichneten Lichtstrahlen und Schnittkurven. Die Entfernungen der ersten im Grundriss wurden gleich gross angenommen; dies musste zur Folge haben, dass auch im Aufriss alle Mantellinien der Fläche durch die Schnittkurven in gleiche Teile geteilt wurden. Waren also zwei entfernte dieser Kurven durch Hinaufloten aus dem Grundriss abgeleitet, so mussten nur die zwischenliegenden Mantellinienstücke in gleiche Teile eingeteilt werden, um die Punkte der zwischenliegenden Schnittkurven zu erhalten.

Ein weiteres hierher gehöriges Beispiel, das zugleich die Selbstbeschattung einer Regelfläche darbietet, ist die Schraubenfläche in Figur 70.

30. Anwendung auf Drehungsflächen.

Als Beispiel für die Anwendung der Lösung auf Drehungsflächen mag ein halbes Drehungsellipsoid mit

punkte 1, 2, 3, die im Grundriss zwischen Lichtstrahl und Parallelkreisen sich ergeben, lotet man hinauf auf die Parallelkreisprojektionen im Aufriss und verbindet die hiedurch erhaltenen Punkte. Die entstehende Kurve ist ein Ellipsenstück, würde aber bei anderen Drehungsflächen eine Linie höherer Ordnung sein. An dieser Schnittkurve ist in k' ein tangierender Lichtstrahl möglich; k' ist also ein Punkt der Körperschattengrenze; er



Figur 29 b.

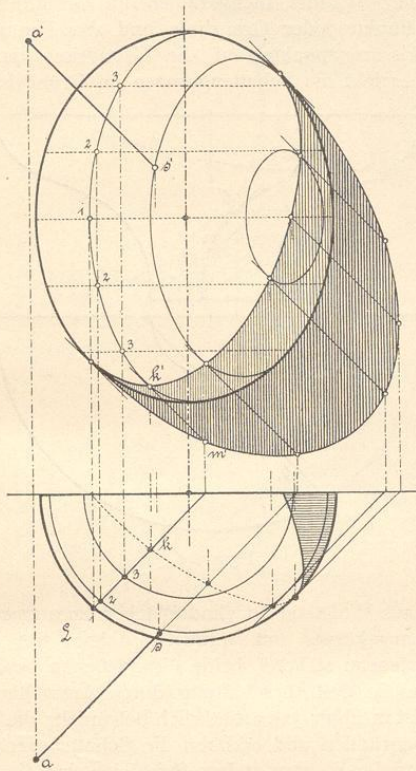
vertikaler Achse dienen, das aus der Vertikalebene vorragt. (Das Drehungsellipsoid entsteht, wenn man eine Ellipse um eine ihrer Achsen dreht; in Figur 30a ist die in der Vertikalebene liegende vertikale Achse die Drehachse.) Um die Schnittkurve der vertikalstehenden Ebene eines Lichtstrahls L mit dem Körper zu erhalten, zeichnet man im Grund- und Aufriss einige Parallelkreise 1, 2, 3 etc.; sie projizieren sich im Grundriss als konzentrische Kreise, im Aufriss als Horizontallinien. Die Schnitt-

ist auf den Grundriss des Lichtstrahls nach k hinunterzuloten. Weitere Lichtstrahlen ergeben weitere solche Punkte.

Um den Schlagschatten eines äusseren Punktes aa' auf dem Ellipsoid zu bestimmen, zieht man seinen Lichtstrahl und konstruiert für diesen die Schnittkurve wie für die andern. Der Aufriss, des Lichtstrahls schneidet die Schnittkurve in s' ; dieser Punkt ist der Schlagschatten im Aufriss; durch sein Hinunterloten auf den Lichtstrahl-

grundriss wird auch die Horizontalprojektion des Schlagschattenpunktes s erhalten.

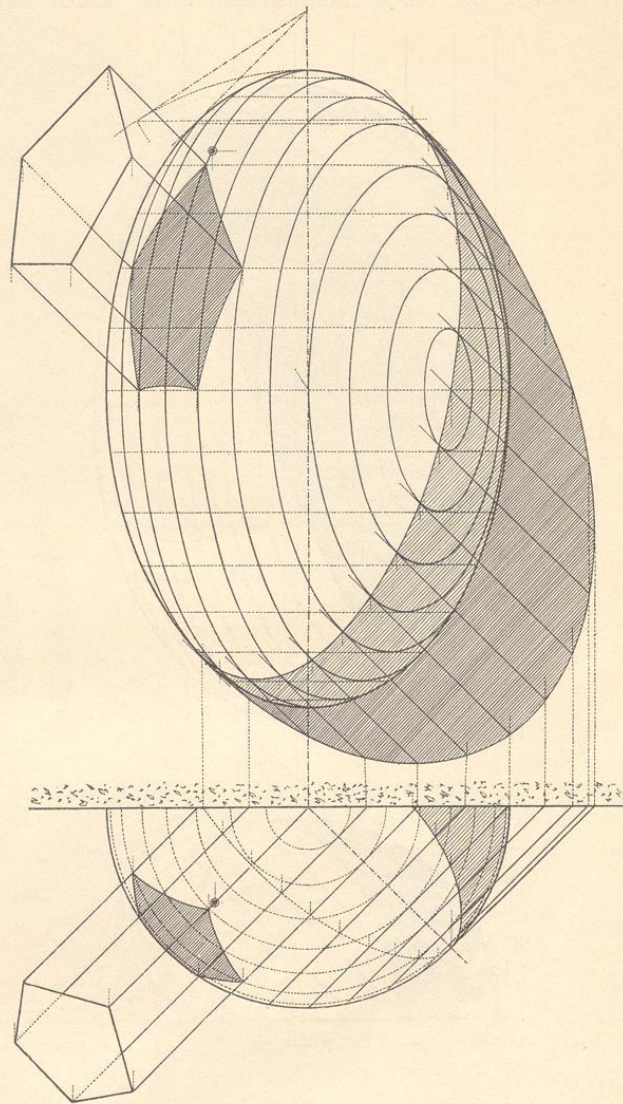
Wo die Tangenten, die in der Vertikalprojektion gezogen wurden, die Grundebene schneiden, da erscheinen die Punkte (m' u. s. w.) der Grenze des Schlagschattens, den das halbe Ellipsoid auf die Grundebene wirft. Wäre etwa statt der Grundebene eine andere Ebene vorhanden,



Figur 30 a.

so wäre der Schnittpunkt jeder Tangente mit dieser andern Fläche ein Punkt der Grenze des Schlagschattens, den das halbe Ellipsoid werfen würde.

In Figur 30b ist die Konstruktion mit thunlichster Vollständigkeit unter Beschattung des Ellipsoids durch eine äussere ebene Figur zur Anschauung gebracht.



Figur 30b.

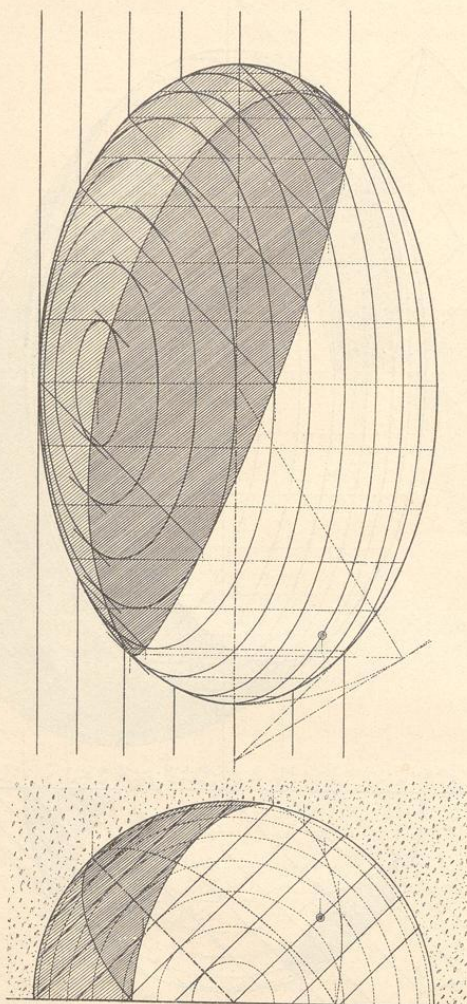
31. Selbstbeschattung gekrümmter Flächen.

Es gibt zwei Arten von äusserer Selbstbeschattung gekrümmter Flächen, diejenige durch Kanten oder Grenzlinien einerseits und Beschattung durch Auswölbung andererseits. Ein einfachstes Beispiel der ersten Art erhält man, wenn man das halbe Ellipsoid nicht als Vollkörper, sondern in die Vertikalebene vertieft annimmt. Die Lösung bleibt im wesentlichen dieselbe wie beim konvexen Ellipsoid. Man konstruiert auch hier (Figur 31a) die Schnittkurven mit Hilfe der Parallelkreise. Ein Teil der Schnittkurven öffnet sich gegen die Vertikalebene und findet seine Fortsetzungen in lotrechten Schnittlinien auf

der Vertikalebene. Die oberen Endpunkte der meisten dieser Kurven, aufgefasst als äussere Punkte und wie solche behandelt, ergeben Schlagschattenpunkte auf dem Innern der Kurve; die Verbindungslinie dieser Schlagschattenpunkte giebt die Grenze von Licht und Schlagschatten.

Selbstbeschattung durch Kanten bietet auch Figur 70.

Der zweite Fall der Selbstbeschattung, diejenige durch Auswölbung, ist geboten, wenn die streifenden Lichtstrahlen zuerst die Fläche berühren und dann schneiden. Diese Tatsache gelangt in der Form der Schnittkurven zum Ausdruck (Figur 31b). Es entstehen hier Schnittkurven, die von den Lichtstrahlen zuerst berührt und

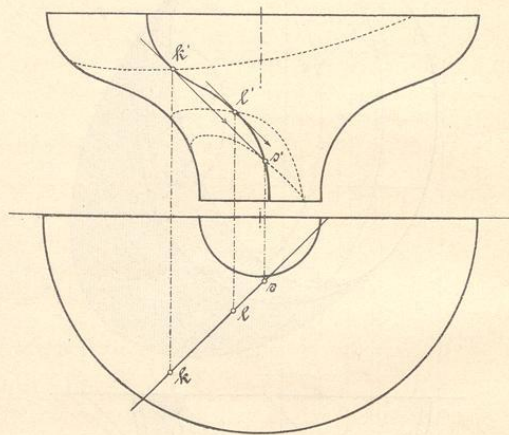


Figur 31a.

dann geschnitten werden. Meist ist auch noch eine zweite Tangente mit der Lichtrichtung an jede solche Schnittkurve möglich, deren Berührungspunkt einer Grenzlinie zwischen Körperschatten und Schlagschatten angehört.

In Figur 31b liefert der im Grundriss gezogene Lichtstrahl die im Aufriss gezeichnete Schnittkurve. An dieser sind zwei Tangenten parallel zur Lichtrichtung möglich; die erste giebt den Berührungspunkt k' und den Schnittpunkt s' , die zweite den Berührungspunkt l' . Oberhalb k' ist die Kurve, als Grenzlinie der Schnittfläche aufgefasst, dem Lichtstrahl zugewendet; von k' bis l' ist sie vom Lichtstrahl abgewendet; von l' bis s' ist sie wieder

dem Licht zugewendet, aber zugleich durch das mittlere Stück $k'l'$ dem Licht verdeckt. Daher ist oberhalb k' Licht, von k' bis l' Körperschatten, von l' bis s' Schlagschatten, unterhalb s' wieder Licht. Also ist k' ein Punkt der Grenze zwischen Licht und Körperschatten, l' ein Punkt der Grenze zwischen Körperschatten und Schlagschatten, s' ein Punkt der Grenze zwischen Schlagschatten und Licht. Weitere Lichtstrahlen im Grundriss liefern weitere Punkte jeder Grenzlinie und das Hinunterloten der Aufrissgrenzpunkte auf die Grundrisse der Lichtstrahlen ergibt die Schattengrenzen im Grundriss.

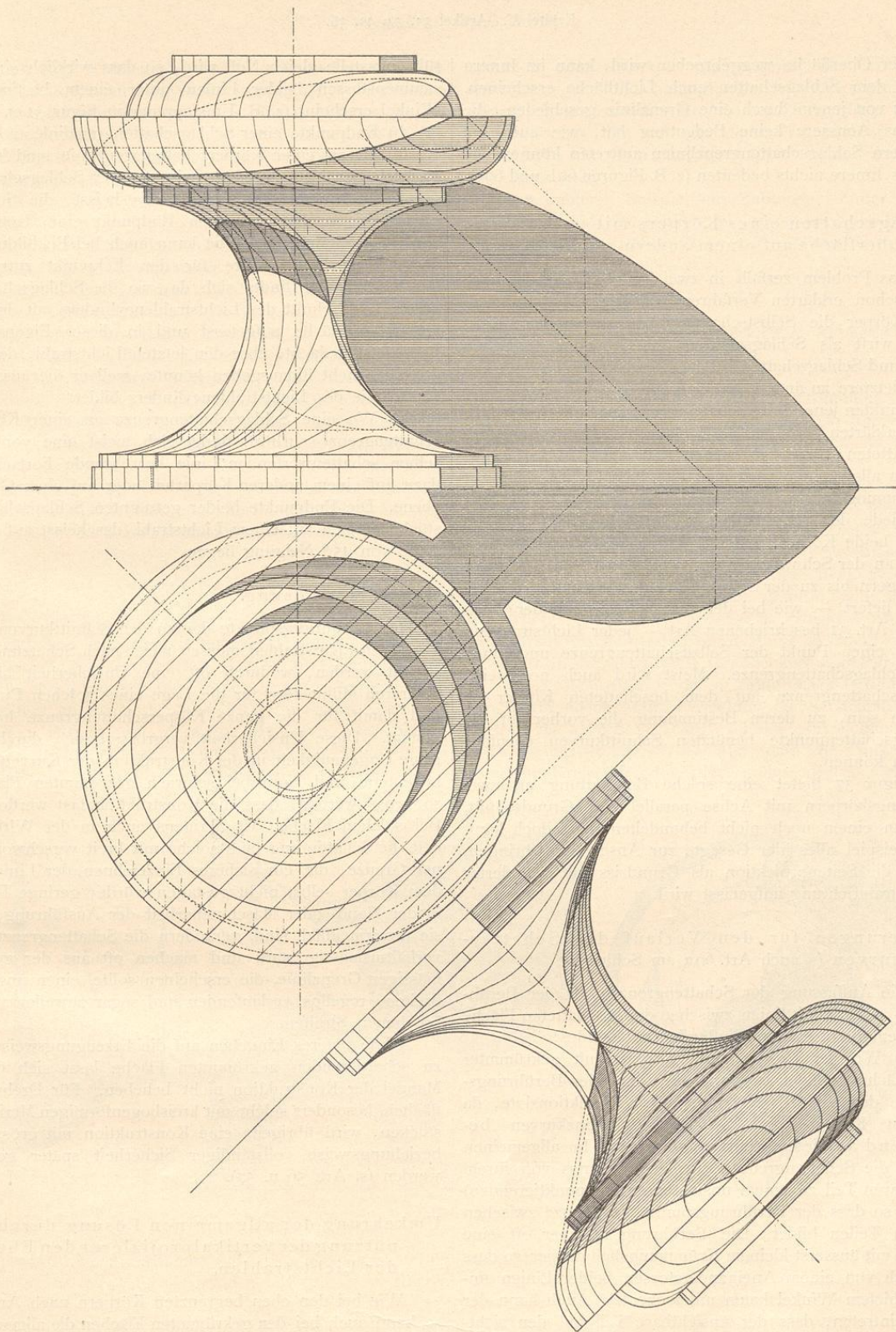


Figur 31b.

Ein aus Wulst- und Cylinderflächen zusammengesetzter Drehungskörper mit vertikaler Achse, frei auf der Horizontalebene stehend, beide Grundebenen beschattend und ebenfalls Selbstbeschattung durch Auswölbung darbietend, ist in Figur 31c ausführlich behandelt; die Schnittkurven begründen und erklären die Schattengrenzen. In diesem und den meisten andern Beispielen sind die Schnittkurven der beschatteten Flächen ganz gezeichnet, weil dies die Lösungen anschaulicher macht und vollständiger erklärt. In der praktischen Verwertung der Verfahren genügt es aber, nur kleine Stücke der Schnittkurven zu zeichnen, deren Lage und Ausdehnung nach Schätzung entsprechend der etwa zu erwartenden Lage der gesuchten Schattengrenze gewählt wird. Mit einiger Uebung kann diese Schätzung dem Ergebnis der Konstruktion sehr nahe kommen.

Schatten im Innern hohler Körper mit gekrümmter Oberfläche. 32.

Ein letzter besonderer Fall der Selbstbeschattung krummflächiger Körper erscheint im Innern von solchen, wenn ihre Oberfläche als papierdünne Schale aufgefasst wird. Die Körperschattengrenzlinie gilt für das Innere ganz ebenso wie für das Aeußere; nur wird im Innern zur Körperschattenfläche, was am Aeußern Lichtfläche ist, und was am Aeußern Körperschattenfläche ist, wird im Innern durchaus Schlagschatten, weil es dem Lichte zugewendet und zugleich verdeckt ist. Erst wenn ein



Figur 31c.

Teil der Oberfläche weggebrochen wird, kann im Innern neben dem Schlagschatten auch Lichtfläche erscheinen. Sie ist von jenem durch eine Grenzlinie geschieden, die für das Äussere keine Bedeutung hat, wie auch am Äusseren Schlagschattengrenzlinien auftreten können, die für das Innere nichts bedeuten (z. B. Figuren 69b und 69c).

33. Schlagschatten eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche auf einem andern solchen Körper.

Das Problem zerfällt in zwei Teile. Zuerst ist nach dem schon erklärten Verfahren auf dem schattenwerfenden Körper die Selbstschattengrenze zu suchen; denn diese wirkt als Schlagschatten die Grenzlinie zwischen Licht und Schlagschatten auf dem beschatteten Körper. Um diese letztere zu finden, hat man für eine genügende Zahl von Punkten jener Selbstschattengrenze nach dem ebenfalls oben erklärten Verfahren die Schlagschattenpunkte auf dem beschatteten Körper zu suchen und stetig zu verbinden.

Im allgemeinen wird man dieselben Lichtstrahlen zur Bestimmung beider Grenzlinien benützen; das heisst, man wird jede der angenommenen vertikalen Schnittebenen durch beide Körper zugleich führen und dann die Tangente an der Schnittkurve des schattenwerfenden Körpers verlängern bis zu der Schnittkurve des beschatteten. Hiedurch liefert — wie bei der Selbstbeschattung der zweiten in Art. 31 beschriebenen Art — jeder Lichtstrahl zugleich einen Punkt der Selbstschattengrenze und einen der Schlagschattengrenze. Meist wird auch noch eine Selbstschattengrenze auf dem beschatteten Körper zu suchen sein, zu deren Bestimmung die vorher für die Schlagschattenpunkte benützten Schnittkurven ebenfalls dienen können.

Figur 37 bietet eine solche Beschattung an zwei Drehungskörpern mit Achse parallel zum Grundschnitt, also an einem noch nicht behandelten Fall; doch kann das Beispiel alles hier Gesagte zur Anschauung bringen, wenn die Seitenprojektion als Grundriss mit geänderter Lichtstrahlrichtung aufgefasst wird.

34. Folgerungen für den Verlauf der Schattengkurven (s. auch Art. 69a am Schluss).

Die Auffassung der Schattengrenzen als der Berührungs- oder Schnittlinien zwischen der beschatteten Fläche und dem Lichtstrahlencylinder lehrt folgendes:

a) Wo der Umriss eines Körpers mit gekrümmter Oberfläche gebildet ist durch die Reihe der Berührungspunkte der am Körper tangierenden Projektionslote, da müssen Körper- und Schlagschattengrenzkurven berührend an diesem Umriss ankommen. Im allgemeinen gehen die Schattengrenzen an diesem Umriss von ihrem sichtbaren Teil zu einem unsichtbaren (zu punktierenden) über, so dass der Berührungspunkt die Grenze zwischen beiden Teilen bildet. Die Berührung ist aber oft eine solche mit äusserst kleinem Krümmungshalbmesser, so dass sie sich von einem Aneinanderstossen beider Linien unter schiefer Winkel kaum unterscheidet. Auch kann der Fall eintreten, dass der unsichtbare Teil auf den sichtbaren fällt, also der Krümmungshalbmesser an der Be-

rührungsstelle gleich Null wird, so dass wirklich ein Zusammenstossen beider Linien unter einem bestimmten Winkel erscheint (z. B. Umklappung in Figur 31c).

b) Endpunkte einer Schlagschattengrenzlinie an deren Anstossen an einer Körperschattengrenzlinie sind häufig zugleich Berührungspunkte zwischen der Schlagschattengrenze und einem Lichtstrahl, das heisst, die Schlagschattengrenze hat an ihrem Endpunkt eine Tangente von 45° Neigung. Dasselbe kann auch bei Eckbildungen der Schlagschattengrenze für den Eckpunkt zutreffen. Die Erscheinung findet sich da, wo die Schlagschattengrenze, als Schnitt des Lichtstrahlencylinders mit der gekrümmten Fläche aufgefasst und in dieser Eigenschaft fortgesetzt gedacht, über den letzten Lichtstrahl, den sie erreicht, nicht hinausgehen könnte, weil er die äusserste Mantellinie des Lichtstrahlencylinders bildet.

c) Wo eine Schlagschattengrenze an einer Körperschattengrenze aufhört, findet sich meist eine von derselben schattenwerfenden Linie herrührende Fortsetzung dazu auf einem anderen Körperteil oder auf einer Grundebene. Die Endpunkte beider getrennten Schlagschattenstücke müssen auf einem Lichtstrahl, das heisst auf einer Linie von 45° Neigung liegen.

Mängel der Lösung.

35.

Die Berührungspunkte der an den Schnittkurven tangierenden Lichtstrahlen müssen meist nach Schätzung bestimmt werden, wodurch oft eine Unsicherheit bis zu mehreren Millimetern für die Lage eines solchen Punktes und damit für die ganze Körperschattengrenze hereinkommt. Diese Unsicherheit vergrössert sich durch geringe Ungenauigkeit in der Konstruktion der Kurven sehr bedeutend und kann bei schwach gekrümmten Flächen so gross werden, dass die Konstruktion fast wertlos ist. Bei solchen Flächen ist übrigens auch in der Wirklichkeit die Schattierung eine solche mit breit verschwommener Grenze, die ein sicheres Einzeichnen der Linie auf dem Körper selbst nicht gestatten würde; geringe Fehler in der Hand- oder Maschinenarbeit der Ausführung, wie sie unvermeidlich sind, verändern die Schattengrenze unverhältnismässig stark und machen oft aus der gesetzmässigen Grenzlinie, die erscheinen sollte, einen ungleich breiten, regellos verlaufenden und sogar zuweilen unterbrochenen Streifen.

Ohne tieferes Eingehen auf die Erzeugungsweise der zu schattierenden gekrümmten Fläche lässt sich dieser Mangel der Konstruktion nicht beheben. Für Drehungsflächen, besonders solche mit kreisbogenförmigen Meridianstücken, wird übrigens eine Konstruktion mit grösserer, beziehungsweise vollständiger Sicherheit später gezeigt werden (s. Art. 56 u. 57).

Umkehrung der allgemeinen Lösung durch Benutzung der vertikalprojizierenden Ebenen der Lichtstrahlen.

Wie bei den eben begrenzten Körpern nach Art. 19, so kann auch bei den gekrümmten Flächen die allgemeine Lösung häufig derart umgekehrt werden, dass die vertikal-

projizierenden Ebenen des Lichtstrahls anstatt der horizontalprojizierenden verwendet werden. Bei bestimmten Arten und Lagen der Körper ist dieser Weg sogar der bessere. So liegt er z. B. bei Drehungskörpern mit Achse senkrecht zur Vertikalebene näher; die Lösung gestaltet sich dann ganz wie bei vertikalstehenden Drehungskörpern nach Art. 30; nur erscheinen Grundriss und Aufriss vertauscht.

In andern Fällen kann ein Grund für die Umkehrung der allgemeinen Lösung darin liegen, dass die Schattengrenzen nur im Grundriss, in dem sie dann zuerst erscheinen, verlangt sind.

In bestimmten Fällen empfiehlt es sich, vertikalstehende und vertikalprojizierende Schnitte nebeneinander zu verwenden, indem etwa für einen Teil der Schattenkurve jene, für einen andern Teil diese letzten ein schärferes Resultat geben oder sich rascher zeichnen, oder die einen eine willkommene Probe für das Resultat aus den andern liefern. So werden z. B. für die Selbstbeschattungsgrenze des verdrehten Stabs in Figur 107 oben besser die vertikalstehenden, unten besser die vertikalprojizierenden Schnittebenen verwendet.

37. Zuhilfenahme der Seitenprojektion.

Wie bei den ebenbegrenzten Körpern, so sind auch bei manchen solchen mit gekrümmten Flächen Aufriss und Seitenprojektion anstatt Aufriss und Grundriss zu benützen; sei es, dass die Fläche nur mit Hilfe der Seitenprojektion unzweideutig darstellbar, oder ohne Grundriss gegeben ist; sei es, dass die Benützung der Seitenprojektion den kürzeren Weg bildet. Als Schnittebenen des Körpers treten dann im allgemeinen die seitlich pro-

scheinen zwei solche Drehungskörper, die einander in Schatten setzen und mannigfaltige Selbstbeschattung darbieten. Eine Erklärung der Konstruktion würde nur die Wiederholung des für die allgemeine Lösung Ausgesprochenen mit Ersatz des Grundplans durch die Seitenprojektion sein.

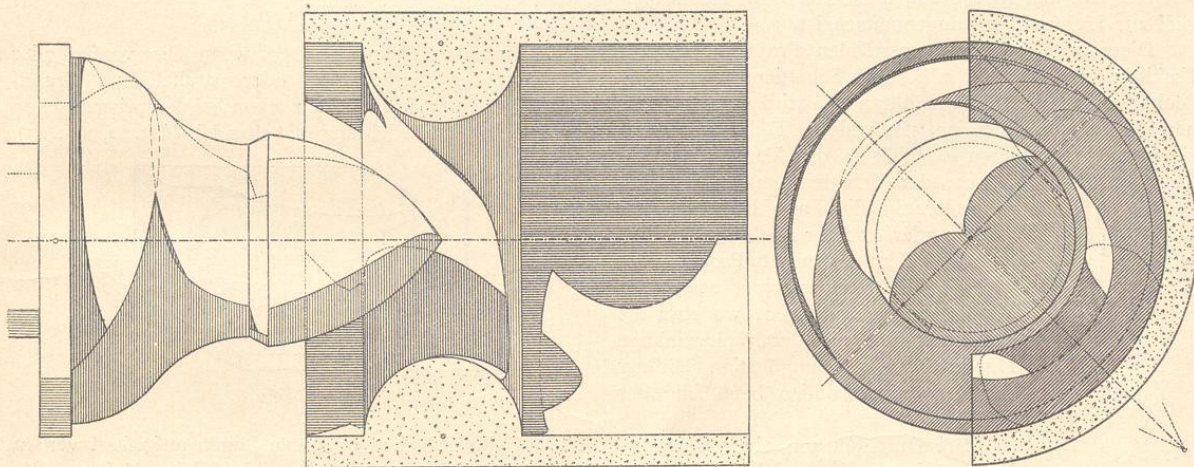
Ein weiteres Beispiel der Zuhilfenahme der Seitenprojektion und der seitlich projizierenden Schnittebenen ist in Figur 73 (Röhrenfläche mit veränderlicher Erzeugenden) gezeichnet.

Zuhilfenahme von weiteren Projektionsebenen 38. und von Umlappungen.

Bei der Schattenkonstruktion auf gekrümmten Flächen bestimmter Art nimmt man zuweilen noch andere Projektionen zu Hilfe als die bisher betrachteten auf die drei Grundebenen.

a) Man denkt sich z. B. den Körper, auf dem die Schattengrenzen zu suchen sind, projiziert auf eine vertikale Ebene, die der Lichtstrahlrichtung parallel steht (also selbst die horizontalprojizierende Ebene eines Lichtstrahls darstellt), und zeichnet entweder diese neue Projektion als selbständige Figur neben die ursprüngliche Vertikalprojektion, oder denkt sich die neue Projektionsebene mit der darauf erscheinenden Figur durch Drehung um ihre Fusslinie in die horizontale Grundebene umgelegt.

Eine solche in eine der ursprünglichen Grundebenen umgelegte ebene Figur bezeichnet die darstellende Geometrie als „Umlappung“. Beim Aufzeichnen einer Umlappung ist nur zu beachten, dass alle Punkte beim Umlegen Kreisbögen um die Fusslinie der umzuklappen-



Figur 37.

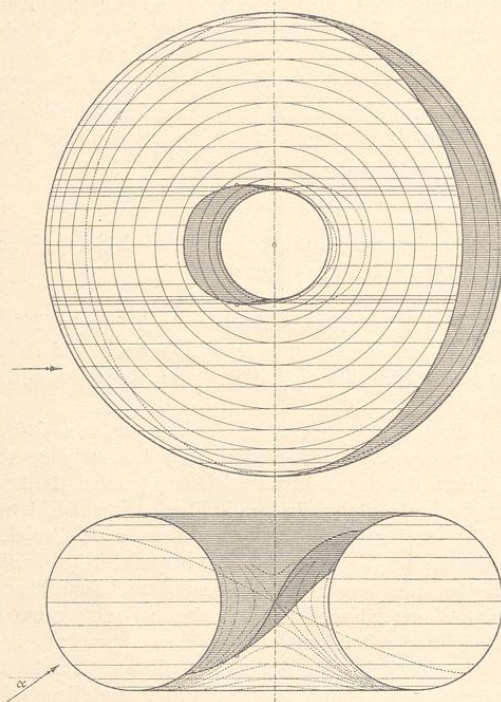
jizierenden Lichtstrahlebenen auf; doch können auch hier zuweilen die vertikalprojizierenden mit grösserem Nutzen verwendet werden.

Die nächstliegenden Beispiele bilden Drehungsflächen mit Achse parallel zum Grundschnitt. In Figur 37 er-

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

den Ebene beschreiben, und dass sich diese Kreisbögen als gerade Linien senkrecht zur Fusslinie oder Umlappungsachse projizieren, endlich dass in der Umlappung deren Radien und alle Masse und Winkel der Figur in ihrer wahren Grösse erscheinen.

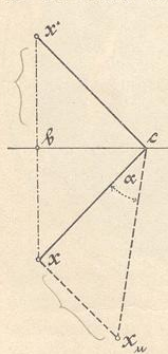
Figur 31c zeigt eine solche Umklappung der Projektion auf eine vertikale Lichtstrahlenebene in die horizontale Grundebene, wogegen in Figur 38a eine Wulst-



Figur 38 a.

fläche in solcher Projektion als Vertikalprojektion gezeichnet, mit andern Worten, die Vertikalgrundebene parallel zur Lichtrichtung angenommen ist.

Diese schräggestellten vertikalen Projektionen oder Umklappungen ersparen z. B. beim Schattieren von Kugel- flächen — wie später auszuführen sein wird — das Zeichnen elliptischer Hilfslinien. In anderen Fällen gewähren sie oft einen besseren Einblick in den Verlauf und das

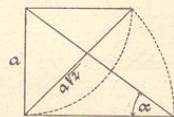


Figur 38 b.

Gesetz der Schattengrenzkurven, insbesondere in die Lage höchster oder tiefster oder anderer wichtiger Punkte, oder sie liefern erwünschte Proben, oder endlich sie führen zu einer schärferen Bestimmung der Kurven, wo etwa die anderen Projektionen durch spitzwinklige Durchschnitte oder ungünstige Häufung der Konstruktionslinien bemühen oder versagen.

Bei Durchführung einer Schattenkonstruktion in einer solchen Projektion auf die schräggestellte vertikale Ebene eines Lichtstrahls ist zu beachten, dass der Neigungswinkel der Lichtstrahlprojektion hier nicht ebenfalls gleich 45° ist, sondern gleich der wirklichen Neigung des Lichtstrahls im Raum, welche erst aus den zwei ursprünglichen Projektionen abzuleiten ist. Man erhält diesen Neigungs-

winkel, indem man (Figur 38b) auf einem durch den Grundschnitt gezogenen Lichtstrahl einen Punkt X annimmt und das horizontalprojizierende Dreieck des Lichtstrahls cxX in die Horizontalebene umklappt. Hierbei beschreibt der Raumpunkt X einen Viertelskreis und legt sich nach x_u , indem $xx_u = bx'$ wird; cx_u ist die Umklappung des Lichtstrahls und xcx_u oder a ist der gesuchte Winkel, den der Lichtstrahl als Raumlinie mit seiner Horizontalprojektion einschließt. Er erweist sich als der kleinere Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen vertikale Kathete gleich einem beliebigen Mass a und dessen horizontale Kathete die Diagonale eines Quadrats über a oder gleich $a\sqrt{2}$ ist. Die Rechnung ergibt $a = 35^\circ 15,9'$. Im folgenden wird die Ableitung dieses Winkels immer mit Figur 38c erscheinen.



Figur 38 c.

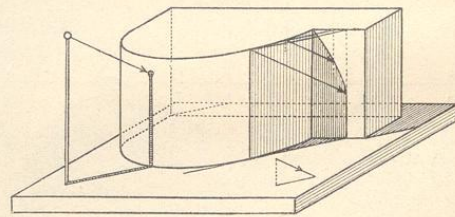
b) Was im vorhergehenden über die Benützung der Projektion auf die horizontalprojizierende (vertikalstehende) Lichtstrahlenebene gesagt worden ist, gilt auch von der vertikalprojizierenden.

Auch auf diese wird der Körper, auf dem die Schattengrenzen zu suchen sind, zuweilen projiziert gedacht und dann die Projektion in die Vertikalebene umgeklappt. Auch in dieser Umklappung bildet die Lichtstrahlprojektion mit der ursprünglichen Vertikalprojektion des Lichtstrahls den zuvor bestimmten Winkel $a = 35^\circ 15,9'$. Figur 65b bietet ein später näher zu erklärendes Beispiel.

VI. Schatten auf Cylinder- und Kegelflächen.

Cylinderflächen senkrecht zu einer Grundebene 39. behandelt wie Prismen.

Schatten auf Cylinderflächen, wenn diese vertikal oder senkrecht zur Vertikalebene oder parallel zum Grundschnitt gerichtet sind, wurden schon bei den prismatischen Flächen derselben Richtung mitbehandelt (Art. 22, 23 u. 25),



Figur 39 a.

indem Cylinderflächen in diesen Lagen aufgefasst werden können als Prismen mit sehr vielen Seitenflächen. Die hieraus entspringenden Lösungen sind zugleich besondere Formen der allgemeinen Lösung für Schatten auf gekrümmten Flächen, beziehungsweise ihrer Umkehrungen mit Vertauschung von Grundriss und Aufriss oder mit Ersatz des Grundplans durch die Seitenprojektion.

Die Figuren 39a und 39b bringen das Prinzip der Lösung für die zwei ersten Fälle perspektivisch zur An-