



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

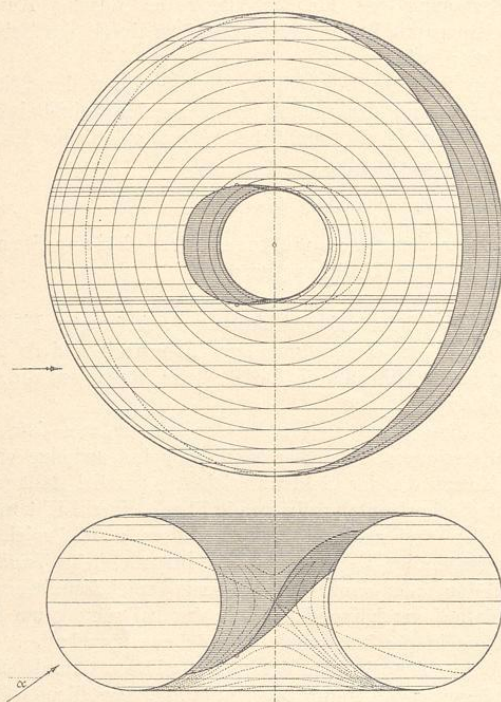
Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

VI. Schatten auf Cylinder- und Kegelflächen.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

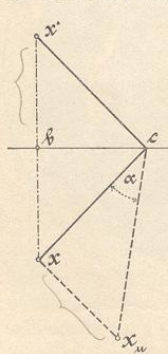
Figur 31c zeigt eine solche Umklappung der Projektion auf eine vertikale Lichtstrahlenebene in die horizontale Grundebene, wogegen in Figur 38a eine Wulst-



Figur 38 a.

fläche in solcher Projektion als Vertikalprojektion gezeichnet, mit andern Worten, die Vertikalgrundebene parallel zur Lichtrichtung angenommen ist.

Diese schräggestellten vertikalen Projektionen oder Umklappungen ersparen z. B. beim Schattieren von Kugelflächen — wie später auszuführen sein wird — das Zeichnen elliptischer Hilfslinien. In anderen Fällen gewähren sie oft einen besseren Einblick in den Verlauf und das

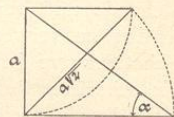


Figur 38 b.

Gesetz der Schattengrenzkurven, insbesondere in die Lage höchster oder tiefster oder anderer wichtiger Punkte, oder sie liefern erwünschte Proben, oder endlich sie führen zu einer schärferen Bestimmung der Kurven, wo etwa die anderen Projektionen durch spitzwinklige Durchschnitte oder ungünstige Häufung der Konstruktionslinien bemühen oder versagen.

Bei Durchführung einer Schattenkonstruktion in einer solchen Projektion auf die schräggestellte vertikale Ebene eines Lichtstrahls ist zu beachten, dass der Neigungswinkel der Lichtstrahlprojektion hier nicht ebenfalls gleich 45° ist, sondern gleich der wirklichen Neigung des Lichtstrahls im Raum, welche erst aus den zwei ursprünglichen Projektionen abzuleiten ist. Man erhält diesen Neigungs-

winkel, indem man (Figur 38b) auf einem durch den Grundschnitt gezogenen Lichtstrahl einen Punkt X annimmt und das horizontalprojizierende Dreieck des Lichtstrahls cxX in die Horizontalebene umklappt. Hierbei beschreibt der Raumpunkt X einen Viertelskreis und legt sich nach x_u , indem $xx_u = bx'$ wird; cx_u ist die Umklappung des Lichtstrahls und xcx_u oder a ist der gesuchte Winkel, den der Lichtstrahl als Raumlinie mit seiner Horizontalprojektion einschließt. Er erweist sich als der kleinere Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen vertikale Kathete gleich einem beliebigen Mass a und dessen horizontale Kathete die Diagonale eines Quadrats über a oder gleich $a\sqrt{2}$ ist. Die Rechnung ergibt $a = 35^\circ 15,9'$. Im folgenden wird die Ableitung dieses Winkels immer mit Figur 38c erscheinen.



Figur 38 c.

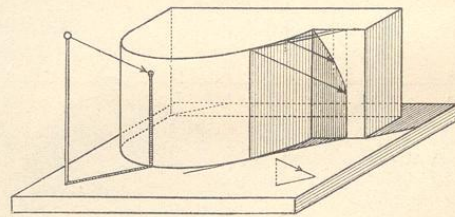
b) Was im vorhergehenden über die Benützung der Projektion auf die horizontalprojizierende (vertikalstehende) Lichtstrahlenebene gesagt worden ist, gilt auch von der vertikalprojizierenden.

Auch auf diese wird der Körper, auf dem die Schattengrenzen zu suchen sind, zuweilen projiziert gedacht und dann die Projektion in die Vertikalebene umgeklappt. Auch in dieser Umklappung bildet die Lichtstrahlprojektion mit der ursprünglichen Vertikalprojektion des Lichtstrahls den zuvor bestimmten Winkel $a = 35^\circ 15,9'$. Figur 65b bietet ein später näher zu erklärendes Beispiel.

VI. Schatten auf Cylinder- und Kegelflächen.

Cylinderflächen senkrecht zu einer Grundebene 39. behandelt wie Prismen.

Schatten auf Cylinderflächen, wenn diese vertikal oder senkrecht zur Vertikalebene oder parallel zum Grundschnitt gerichtet sind, wurden schon bei den prismatischen Flächen derselben Richtung mitbehandelt (Art. 22, 23 u. 25),

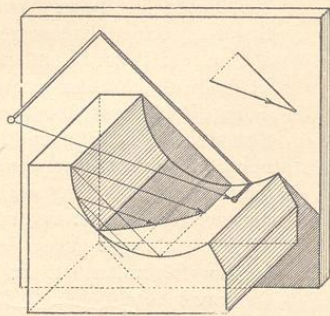


Figur 39 a.

indem Cylinderflächen in diesen Lagen aufgefasst werden können als Prismen mit sehr vielen Seitenflächen. Die hieraus entspringenden Lösungen sind zugleich besondere Formen der allgemeinen Lösung für Schatten auf gekrümmten Flächen, beziehungsweise ihrer Umkehrungen mit Vertauschung von Grundriss und Aufriss oder mit Ersatz des Grundplans durch die Seitenprojektion.

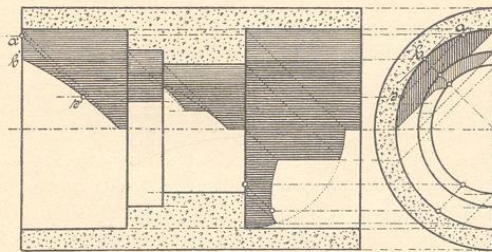
Die Figuren 39a und 39b bringen das Prinzip der Lösung für die zwei ersten Fälle perspektivisch zur An-

schaung; in Figur 39c ist als Beispiel für den dritten Fall eine kreisrunde Röhre mit Verengerungen im Längenschnitt, also eine Cylinderfläche parallel zum Grundschnitt



Figur 39b.

gezeichnet und der Schatten eines Randpunktes $a'a$ durch



Figur 39c.

das Parallelogramm $a'a's's'$ bestimmt ganz wie in Art. 25, ebenso die Körperschattengrenze im Aufriss durch Hinüberlinieren des Berührungspunktes b als Mantellinie im Aufriss.

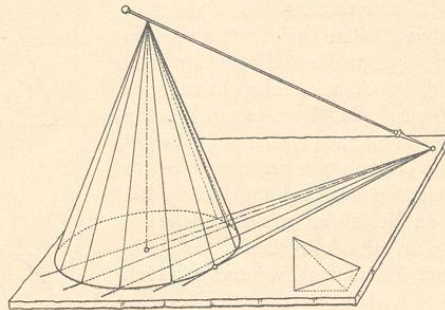
40. Verlassen der allgemeinen Lösung bei Kegel- und schiefgerichteten Cylinderflächen.

Bei Schatten auf schiefgerichteten Cylinderflächen und auf Kegelflächen in allen möglichen Lagen würden die Schnittebenen, welche die allgemeine Lösung für gekrümmte Flächen benützt, gekrümmte Schnittlinien mit den beschatteten Flächen ergeben, und zwar bei Kreiscylindern und Kreiskegeln elliptische, parabolische und hyperbolische Linien; die Lösung würde sich also sehr zeitraubend gestalten. Daher wird hier die Benützung der projizierenden Ebenen des Lichtstrahls als der Schnittebenen des beschatteten Körpers aufgegeben.

41. Schatten auf Kegelflächen.

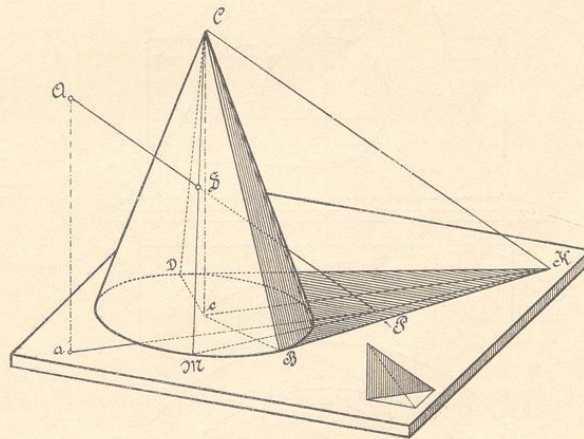
Bei Schatten auf Kegelflächen werden dafür Ebenen eingeführt, welche zwar ebenfalls dem Lichtstrahl parallel sind, aber alle durch die Kegelspitze gehen, so dass sie alle möglichen Neigungen annehmen. Solche Ebenen, wie sie in Figur 41a anschaulich gemacht sind, schneiden den Kegel nach Mantellinien, also nach geraden Linien, und es werden also auf diese Weise die gekrümmten Schnittlinien umgangen. Das Verfahren, gültig für alle Fälle, ist das folgende:

Man zieht (Figur 41b) durch die Spitze des Kegels C einen Lichtstrahl und sucht dessen Schnittpunkt K mit der erweiterten gedachten Basisebene des Kegels. Dieser Punkt K ist der Schlüssel zu allen Lösungen bei Schatten auf Kegelflächen. (In manchen Fällen muss man den Lichtstrahl rückwärts durch die Kegelspitze ziehen, um einen



Figur 41a.

Schnitt mit der Basisebene zu erhalten [etwa wenn der Kegel auf der Spitze steht]; in manchen Fällen ist die Basisebene eine Grundebene, in anderen nicht). Durch den gefundenen „Schlüsselpunkt“ legt man Sekanten und Tangenten KB und KD an die Kegelbasis. Die Mantellinien durch die Berührungspunkte B und D der Tangenten sind die Körperschattengrenzen auf der



Figur 41b.

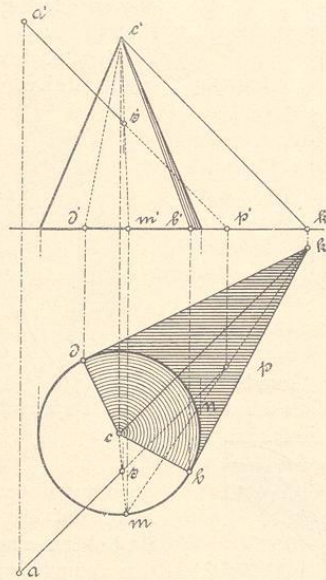
Kegelfläche. Die Mantellinien durch die Schnittpunkte jeder Sekante sind die Schnittlinien des Kegels mit einer Lichtstrahlenebene, welche durch die Sekante gelegt ist. Diese Schnittlinien benützt man bei Schlagschatten auf Kegelflächen ganz in derselben Weise, wie die Schnittkurven bei anderen gekrümmten Flächen, das heisst, wo eine solche Schnittlinie getroffen wird vom Lichtstrahl eines schattenwerfenden Punktes, der mit der Sekante in derselben Lichtstrahlenebene liegt, da ist der Schlagschatten des Punktes. Die zu einem schattenwerfenden Punkt A gehörige Sekante KM geht durch den Schnitt eines durch den Punkt gezogenen Lichtstrahls mit der Basisebene des Kegels (P).

Wenn die Kegelfläche keine Basisebene hat, das heisst, nicht durch eine ebene Kurve begrenzt ist, wie etwa in Figur 46b, so ist zum Zwecke der Anwendung der Lösung eine beliebige geeignete Schnittebene des Kegels als dessen Basisebene einzuführen.

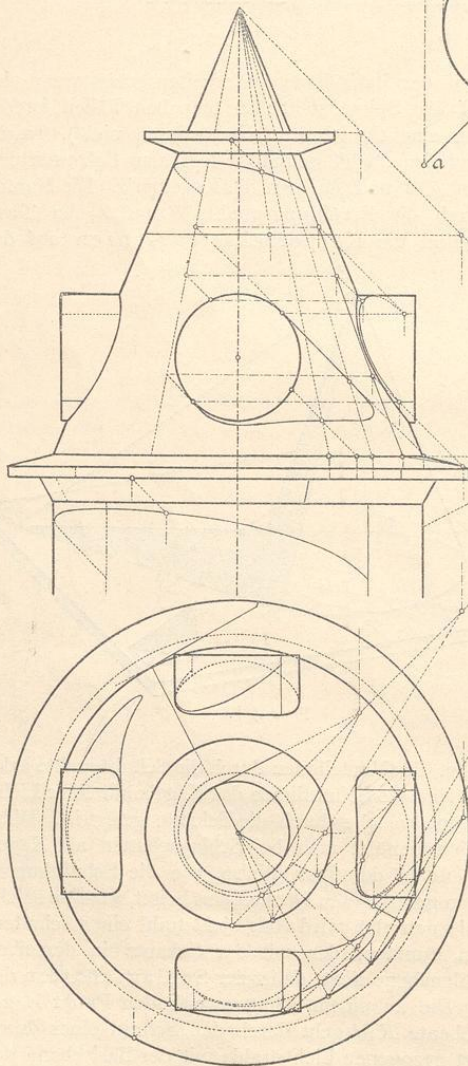
Noch ist hervorzuheben, dass es in besonderen Fällen zweckmässig sein kann, die gerade Kreiskegelfläche, voll oder hohl, mit Achse senkrecht zu einer Grundebene, als Drehungsfläche aufzufassen und zu schattieren. Dies gilt besonders dann, wenn das in Art. 61 für Schlagschatten auf Drehungsflächen beschriebene Verfahren mit Parallelkreisschnitten und den kongruenten Schatten auf deren Ebenen Anwendung finden

kann. So liesse sich z. B. der Schlagschatten auf der in Art. 45 behandelten, in die Vertikalebene vertieften Kreiskegelfläche in dieser Weise erhalten. Sogar der schiefe Kreiskegel kann nach diesem Verfahren schattiert werden; er ist dann als eine der in Art. 75 behandelten „Rückungsflächen“ aufgefasst. Die Konstruktion liefert aber in allen Fällen nur Schlagschattengrenzen, so dass die (einfache) Bestimmung der Körperschattengrenzen doch den zuvor angegebenen Weg einschlagen muss.

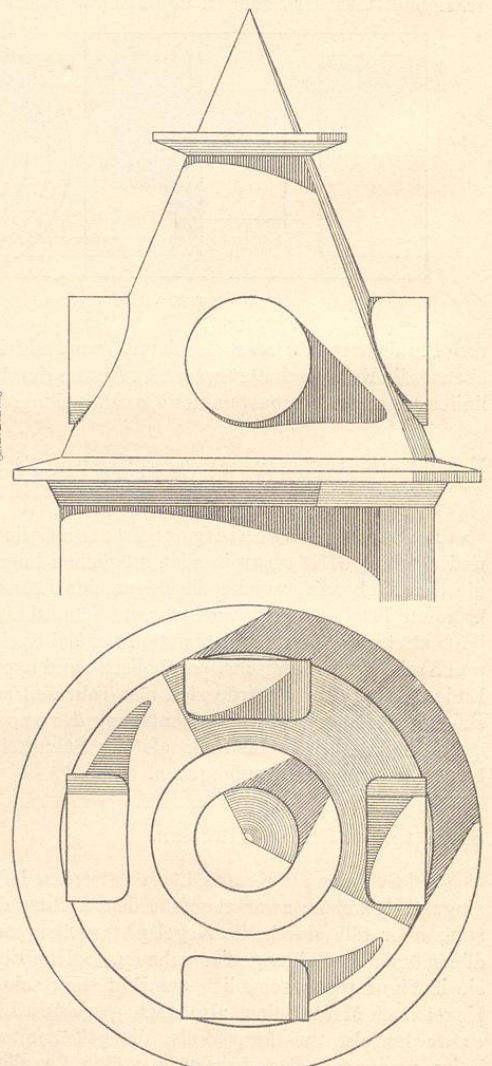
Im folgenden ist die Anwendung des zuvor beschriebenen, für alle Arten von Schattengrenzen und Kegelflächen brauchbaren Verfahrens auf einige besondere Fälle erklärt, und zwar ist je



Figur 42 a.



Figur 42 b.



Figur 42 c.

die Körperschattengrenze und der Schlagschatten eines äusseren Punktes oder eines Randpunktes gesucht.

42. Der vertikale Kreiskegel mit Spitze nach oben.

Figur 42a. Durch Ziehen des Lichtstrahls aus der Kegelspitze cc' bis zum Schnitt mit der erweiterten Basisebene, hier der horizontalen Grundebene, erhält man den Schlüsselpunkt k , ebenso durch Ziehen des Lichtstrahls aus dem schattenwerfenden Punkt aa' bis zur erweiterten Basisebene den Punkt p im Grundriss. Aus k zieht man im Grundriss die zwei Tangenten an die Kegelform; die Mantellinien durch die Berührungspunkte cb und cd sind mit dem gegen k gerichteten Stück db der Basislinie die Körperschattengrenze im Grundriss; das Hinaufloten von b und d nach b' und d' liefert die schattenabgrenzenden Mantellinien auch im Aufriss. — Die Sekante kp im Grundriss liefert als Schnittpunkte mit der Kegelform m und n und dadurch die Mantellinien cm und cn im Grundriss und Aufriss. Nur die erste ist dem Lichtstrahl zugewendet; wo sie getroffen wird vom Lichtstrahl, nämlich in ss' , da ist der Schlagschatten des Punktes aa' . Die zweite Mantellinie cn bleibt ohne Verwendung; sie enthält den Punkt, in dem der verlängert gedachte Lichtstrahl den Kegel wieder verlassen würde.

Probe: Die beiden Projektionen des Schlagschattenpunktes s und s' müssen vertikal übereinander liegen.

(Zuweilen kann man auch anstatt des Punktes p den Schnittpunkt benutzen, den die Verbindungslinie der Kegelspitze und des schattenwerfenden Punktes mit der Basisebene liefert. Durch diesen Punkt ist dann die Sekante zu ziehen; sie ist identisch mit derjenigen durch p . Meist fällt jedoch dieser neue Hilfspunkt zu fern.)

Die Figuren 42b und 42c bieten ein Beispiel für die oftmalige Anwendung der zuvor beschriebenen Konstruktion. Ein Punkt der Schnittlinie zwischen einem der horizontalen Cylinder und dem Kegeldach wird erhalten, indem man in beliebiger Höhe einen Horizontalschnitt geführt denkt. Der Punkt erscheint dann zuerst im Grundriss als Schnitt eines Parallelkreises der Kegelfläche mit einer Mantellinie des Cylinders.

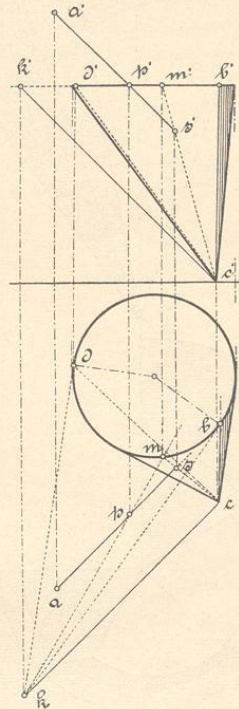
Die Bestimmung des Schlagschattens, welchen die Cylinderrandlinie auf die Kegelfläche wirft, ist aus den eingezeichneten Konstruktionslinien deutlich und nur die Wiederholung des mit Figur 42a Erklärten.

Um den Schlagschatten des Kegeldaches auf den in der Seitenansicht und Oberansicht erscheinenden Cylinderflächen zu bestimmen, ist die Vorderansicht des mittleren Cylinders als Seitenprojektion des rechts liegenden aufgefasst und die Körperschattengrenze des Kegels dieser Seitenprojektion beigelegt (in der Mantellinie links von der Achse). Die Konstruktion gestaltet sich hierauf ganz wie in Art. 25; einige der Parallelogramme sind eingezeichnet.

43. Der schiefe Kreiskegel mit Spitze nach unten.

Figur 43a. Der Lichtstrahl durch die Kegelspitze cc' ist hier rückwärts zu ziehen, um im Aufriss als Schnitt

mit der verlängerten Projektion der Basis den Punkt k' und durch dessen Hinunterloten auf die Lichtstrahlprojektion im Grundriss den Schlüsselpunkt k zu erhalten. Die Berührungspunkte b und d der im Grundriss aus k gezogenen Tangenten an den Basiskreis liefern die körperschattenabgrenzenden Mantellinien cb und cd , die durch



Figur 43 a.

Hinaufloten in den Aufriss übertragen werden. Der schattenwerfende Punkt aa' liefert als Schatten auf der erweiterten Basisebene den Punkt pp' und dadurch die Sekante kp , welche den Basiskreis zuerst in m schneidet. Wo die Mantellinienprojektionen cm und $c'm'$ von den Lichtstrahlprojektionen getroffen werden, erscheinen die Projektionen des Schlagschattenpunktes ss' , die zur Probe wieder vertikal übereinander liegen müssen.

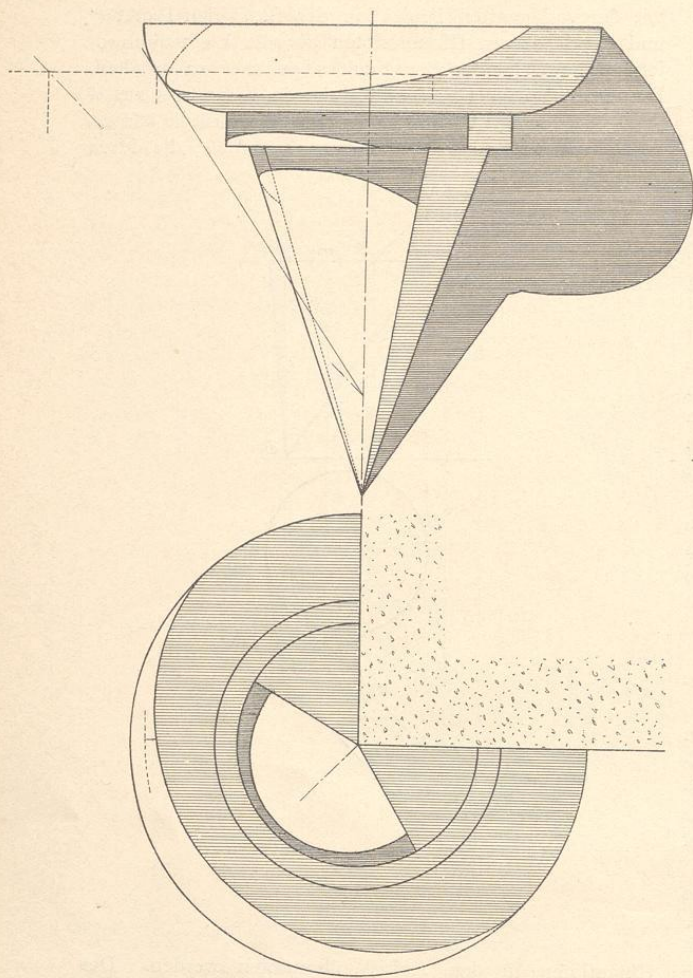
In Figur 43b ist ein Beispiel für die Anwendung der Konstruktion auf den geraden Kegel gezeichnet.

Der vertikalstehende hohle Kegel.

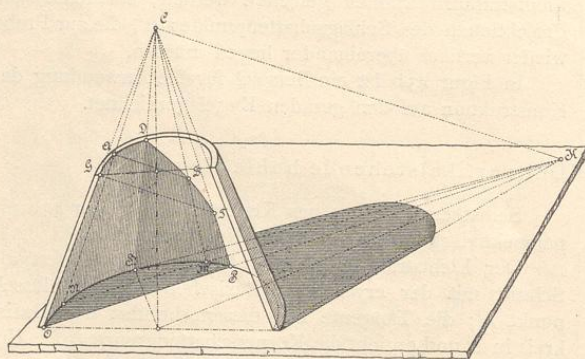
44.

Selbstbesattung eines Kegelrumpfes; Figur 44a als perspektivische Darstellung der Konstruktion.

Der Lichtstrahl durch die Kegelspitze C liefert als Schnitt mit der erweiterten Basisebene den Schlüsselpunkt K ; die Tangente aus diesem berührt den Basiskreis in B und ergibt die Körperschattengrenze BD . Um die Schlagschattengrenze der Selbstbesattung zu erhalten, zieht man die Sekanten KN , KO u. s. w. samt den Mantellinien durch die Basisschnittpunkte CM , CN , CP u. s. f. Der Lichtstrahl durch A liefert den Schatten-

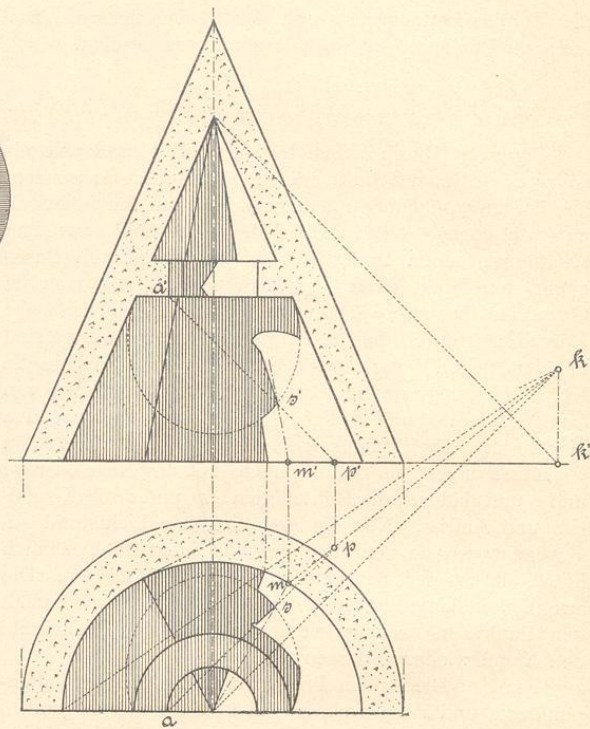


Figur 43 b.

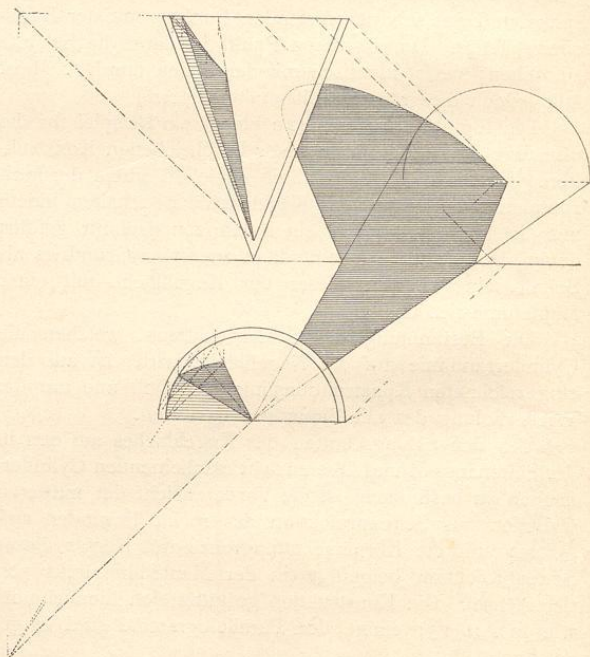


Figur 44 a.

punkt S , der Lichtstrahl durch G den Schattenpunkt T u. s. f. Der Rand GO wirft als Schatten den Schnitt seiner



Figur 44 b.



Figur 44 c.

Lichtstrahlenebene COK mit dem Kegelmantel und der Basis, das heisst die Linien TP und PO .

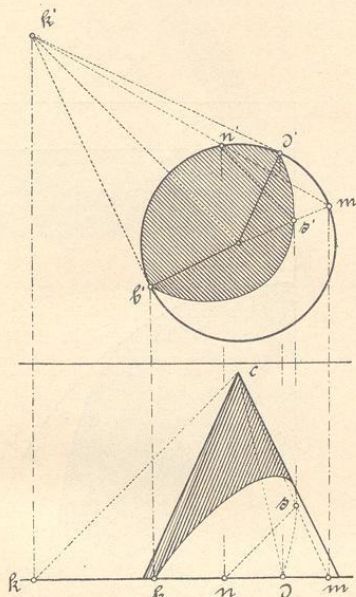
Figur 44 b bietet ein schwierigeres hierher gehöriges

Beispiel mit Spitze des Kegels nach oben, Figur 44c ein einfacheres mit Spitze nach unten.

45. Der gerade Kreiskegel senkrecht zur Vertikalebene, vertieft in die Vertikalebene.

Gesucht die Selbstbeschattung; Figur 45.

Der Lichtstrahl durch cc' ist hier rückwärts zu ziehen, um den Schnittpunkt mit der Basisebene kk' zu erhalten. Aus k' sind die Tangenten an den Basiskreis gezogen; die Berührungspunkte b' und d' liefern die schattenabgrenzenden Mantellinien $c'b'$ und $c'd'$ im Aufriss; Hin-



Figur 45.

unterloten der Punkte b' und d' liefert sie im Grundriss. Um den Schlagschatten des Randpunktes nn' zu erhalten, zieht man aus k' die Sekante durch diesen Randpunkt bis zum zweiten Schnitt mit der Kegelbasis in m' . Der Schattenpunkt s' erscheint als Schnitt des Lichtstrahls durch n' mit der Mantellinie $c'm'$. Das Hinunterloten der Punkte n' und m' liefert s im Grundriss samt der in den früheren Fällen erwähnten Probe.

Eine zweite Lösung für die Schlagschattengrenze ist oben am Schluss von Art. 41 erwähnt.

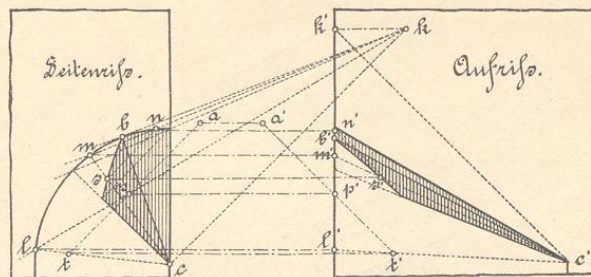
46. Die hohle Kegelfläche mit Achse parallel zum Grundschnitt.

Eine gerade hohle Kreiskegelfläche mit Achse parallel zum Grundschnitt erscheint im Längenschnitt. Gesucht die Selbstbeschattung. Figur 46a.

Schon zur unzweideutigen Darstellung der Fläche ist die Seitenprojektion notwendig; man braucht sie wie bei Cylindern parallel zum Grundschnitt auch für die Schattenkonstruktion. Der Lichtstrahl durch die Kegelspitze cc' ist

rückwärts zu ziehen, um den Schnitt kk' mit der Kegelbasisebene zu liefern. Aus k in der Seitenprojektion ist die Tangente an die Kegelbasis zu ziehen, woraus die schattenabgrenzende Mantellinie bc erhalten wird, ferner durch den schattenwerfenden Randpunkt n der Basis die Sekante km . Der Schnitt des durch n gezogenen Lichtstrahls mit der Mantellinie cm liefert den Schattenpunkt s . Hinüberlinieren in den Aufriss ergibt die Punkte n' , m' , s' und die Probe für ss' , indem beide Punkte gleich hoch liegen müssen.

Zur Bestimmung des Schlagschattens eines äusseren Punktes aa' ist in jeder Projektion der Lichtstrahl durch aa' gezogen, dessen Schnittpunkt mit der Basisebene im Aufriss p' hinüberliniert auf den Seitenriss des Licht-



Figur 46a.

strahls nach p , die Sekante kp bis zum Schnitt mit der Basislinie in l gezogen und nach l' hinüberliniert. Die Schnittpunkte der durch aa' gezogenen Lichtstrahlprojektionen mit den Mantellinienprojektionen cl und $c'l'$ geben die Projektionen des Schlagschattenpunktes tt' .

In Figur 46b ist als hieher gehöriges Beispiel aus der praktischen Baukunst ein Stichkappengewölbe mit kegelförmiger Leibung, einschneidend in ein Tonnengewölbe, im Längenschnitt und in der Vorderansicht gezeichnet. Die Leibung oder Mantelfläche der Kappe ist erzeugt gedacht durch eine Gerade, die an dem halbkreisförmigen Stirnbogen ef gleitet und immer durch einen in der Achse des Bogens liegenden äusseren Punkt c geht. Zeichnet man eine beliebige Lage der Geraden im Längenschnitt und in der Vorderansicht, so erscheint ihr Schnittpunkt mit der cylindrischen Gewölblfläche unmittelbar im Längenschnitt und kann von dort auf die Vorderansicht der Geraden hinüberliniert werden, womit ein Punkt der gewundenen Schnittlinie beider Gewölblflächen auch in der zweiten Projektion gefunden ist.

Zur Schattenkonstruktion nimmt man eine beliebige, zur Stirnbogenebene parallele Ebene gh als Basisebene der Kegelfläche an (auch die Stirnbogenebene selbst könnte als solche angenommen werden). In der Vorderansicht erscheint dann der Viertelskreis $g'h'$ als Basislinie. Nachdem wie bei Figur 46a der Schlüsselpunkt k' bestimmt ist, gestaltet sich die Konstruktion des Schlagschattens, den ein Randpunkt aa' auf die Kappenfläche selber wirft, ganz wie in früheren Fällen. Die Mantellinie durch aa' schneidet den Viertelskreis $g'h'$ in einem Punkt. Durch diesen ist eine Sekante aus k' gezogen, die den Viertelskreis zum zweitenmal schneidet. Auf der Mantellinie durch

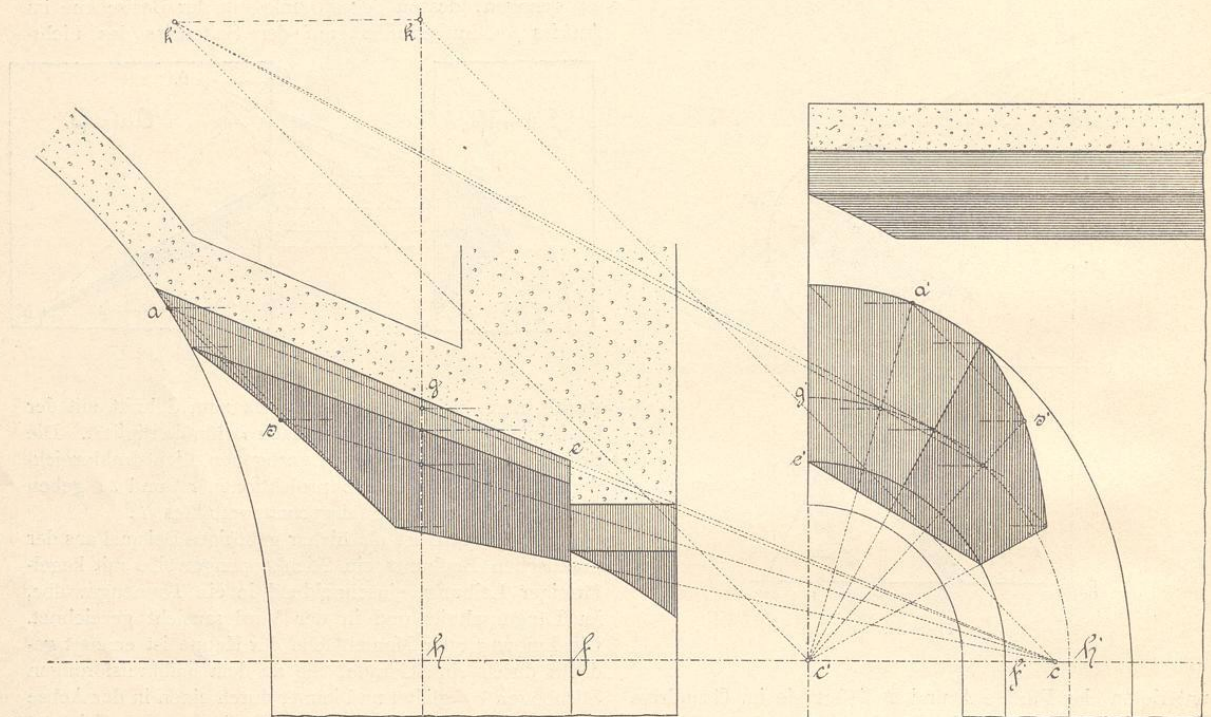
diesen zweiten Schnittpunkt liegt der Schattenpunkt ss' . Eine Probe ergibt sich, indem s und s' auf einer Horizontalen liegen müssen.

47. Die beliebig gerichtete Kegelfläche mit beliebig gestalteter, schiefergerichteter Basis.

Figur 47. Bei der gegebenen Stellung der Fläche ist der Lichtstrahl durch die Kegelspitze cc' rückwärts zu ziehen, um einen Schnitt mit der Basisebene zu erhalten. Da sich die Basis weder im Aufriss noch im Grundriss als gerade Linie projiziert, so gestaltet sich das Aufsuchen

des Punktes f seinen Schlagschatten t wirft. Die Kante fc wirft ihren Schlagschatten auf tc , welche Linie also der Schlagschattengrenze der Selbstbeschattung angehört; für das gekrümmte Stück Schattengrenze zwischen b und t finden sich Zwischenpunkte durch weitere Sekanten aus k zwischen b und f . Alle Punkte können auch unmittelbar im Aufriss erhalten werden durch Ziehen der Tangenten und Sekanten aus k' , wodurch Proben in dem vertikalen Uebereinanderliegen der zwei Projektionen jedes Schattenpunktes erwachsen.

Um den Schlagschatten eines aussenliegenden Punktes aa' auf der Kegelfläche zu erhalten, ist der Schnittpunkt



Figur 46b.

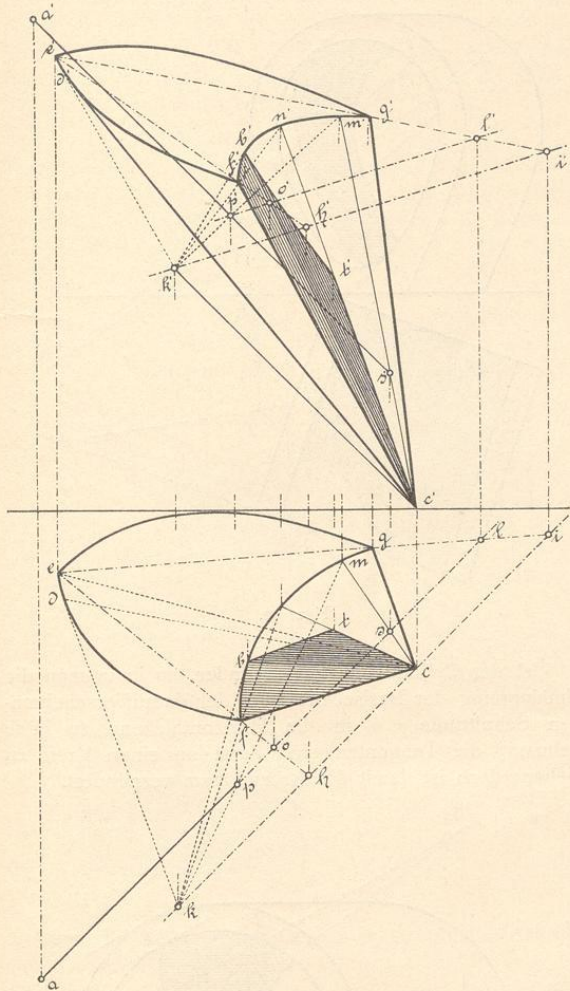
des Schnittpunktes minder einfach als in den früheren Fällen. Man zieht auf der gegebenen Basis zwei geeignete gerade Linien eg und ef , welche im Grundriss den durch c gezogenen Lichtstrahl in i und h schneiden. Das Hinaufloten dieser Punkte auf die Vertikalprojektionen der beiden Geraden nach k' und i' liefert in der Linie $i'h'$ die Schnittlinie der erweiterten Basisebene mit der vertikalen Ebene des durch c gezogenen Lichtstrahls. Wo diese Schnittlinie getroffen wird vom Aufriss des durch c' gezogenen Lichtstrahls, da ist der Schnittpunkt dieses Lichtstrahls mit der Basisebene k' ; das Hinunterloten auf den Grundriss des Lichtstrahls liefert den Schlüsselpunkt k im Grundriss, welcher zu benutzen ist wie in den früheren Fällen. Die Berührungspunkte b und d der aus k gezogenen Tangenten liefern wieder die körperschattenabgrenzenden Mantellinien; die Sekante durch f liefert den Schnittpunkt n und damit die Mantellinie, auf welche

pp' des Lichtstrahls durch diesen Punkt mit der Basisebene ganz in derselben Weise zu suchen wie für die Kegelspitze cc' . Der Grundriss des Lichtstrahls durch a schneidet die beiden auf der Basisebene gezogenen Hilfslinien ef und eg in o und l ; das Hinaufloten dieser Punkte giebt die Linie $l'o'$, die vom Aufriss des durch a' gezogenen Lichtstrahls in p' geschnitten wird. Die Sekanten aus k und k' durch p und p' gezogen liefern die Schnittpunkte m und m' , auf deren Mantellinien die Projektionen des Schattenpunktes s und s' liegen müssen.

Schatten auf schiefergerichteten Cylinderflächen. 48.

Bei den schiefergerichteten Cylinderflächen werden anstatt der auf die Grundebenen projizierenden Ebenen des Lichtstrahls solche Schnittebenen eingeführt, welche sowohl zu den Mantellinien als zu den Lichtstrahlen parallel

sind, also wieder den Cylinder nicht nach Kurven, sondern nach Mantellinien schneiden oder berühren. Die Lösung des Problems, auf einer schiefergerichteten Cylinderfläche die Selbstschattengrenzen und den Schlagschatten



Figur 47.

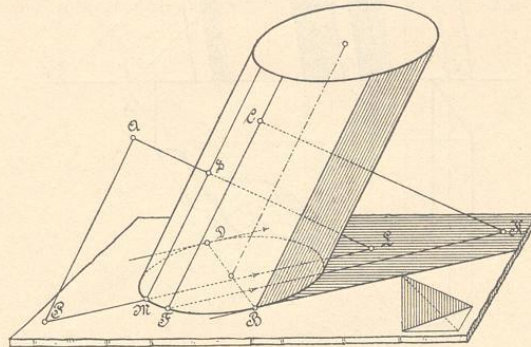
eines äusseren Punktes zu suchen, gestaltet sich hienach allgemein wie folgt:

Man zieht (Figur 48) durch einen beliebigen Punkt C einer beliebigen Mantellinie einen Lichtstrahl bis zum Schnitt mit der erweitert gedachten Basisebene des Cylinders und verbindet den Schnittpunkt K mit dem Fusspunkt der Mantellinie F . Die Verbindungslinie FK ist die Schnittlinie der Basisebene mit der durch die Mantellinie gehenden Lichtstrahlenebene. Für die durch weitere Mantellinien gelegten Lichtstrahlenebenen würden sich parallele Schnittlinien auf der Basisebene ergeben, so dass die erhaltene Schnittlinie auch aufgefasst werden kann als eine Projektion der Lichtrichtung auf die Basisebene mit der Richtung des Cylinders als Projektionsrichtung.

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

Auch mit einem äusseren Punkt A anstatt des Mantellinienpunktes C lässt sich die Richtung erhalten, indem man durch den Punkt einen Lichtstrahl AL und eine Parallele AP zu den Mantellinien bis zum Schnitt mit der Basisebene zieht. PL ist wieder die Lichtrichtung in der Basisebene.

Diese Lichtstrahlrichtung auf der Basisebene bildet bei allen Aufgaben über schiefergerichtete Cylinderflächen den Schlüssel zur Lösung (ähnlich wie bei den Kegelflächen der Schnittpunkt des Lichtstrahls durch die Kegelspitze mit der Basisebene); sie wird benützt wie der gewöhnliche Lichtstrahlgrundriss beim vertikalen Kreiscylinder.



Figur 48.

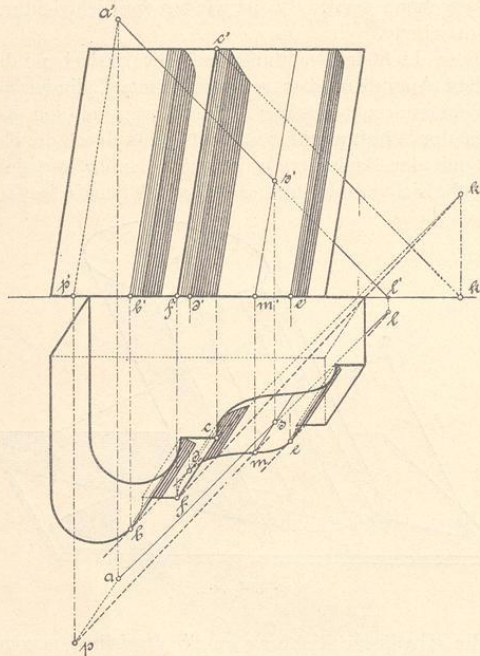
Wo die mit dieser Richtung an die Basislinie gezogenen Tangenten diese berühren, da sind die Fusspunkte B und D der körperschattenabgrenzenden Mantellinien. Wirft ein äusserer Punkt A einen Schlagschatten auf den Cylinder, so zieht man durch den Punkt eine Parallele zu den Mantellinien bis zum Schnitt P mit der Basisebene, mit andern Worten, man projiziert den schattenwerfenden Punkt in gleicher Weise auf die Basisebene, wie zuvor den Lichtstrahl selbst. Durch den erhaltenen Punkt zieht man eine Sekante PL in die Basislinie mit der in der Basisebene gültigen Lichtrichtung und erhält in dem Schnittpunkt zwischen Sekante und Basis den Fusspunkt M der Mantellinie, auf welcher der Schlagschattenpunkt S liegt.

Im folgenden, Art. 49 bis 54, sind einige besondere Fälle des schiefergerichteten Cylinders behandelt.

Der beliebig schiefergerichtete Cylinder mit Basis 49. in einer Grundebene.

In Figur 49 schneidet der Lichtstrahl durch den Mantellinienpunkt cc' die Basisebene, zugleich horizontale Grundebene, in k . Die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Fusspunkt der Mantellinie, fk im Grundriss, giebt die Richtung der Schnittlinien zwischen der Basisebene und den parallel zu den Mantellinien gelegten Lichtstrahlenebenen, mit andern Worten, die in der Basisebene gültige Lichtrichtung. Die drei Tangenten dieser Richtung geben in bb' , dd' und ee' die Fusspunkte der schattenabgrenzenden Mantellinien. Durch den schlagschattenwerfenden Punkt aa' ist die Parallele zu den

Mantellinien gezogen bis zum Schnitt mit der Basisebene in pp' . Die Sekante pm parallel fk liefert in mm' den Fusspunkt der Mantellinie, auf welcher der Schlagschattenpunkt ss' liegen muss. Das vertikale Uebereinanderliegen



Figur 49.

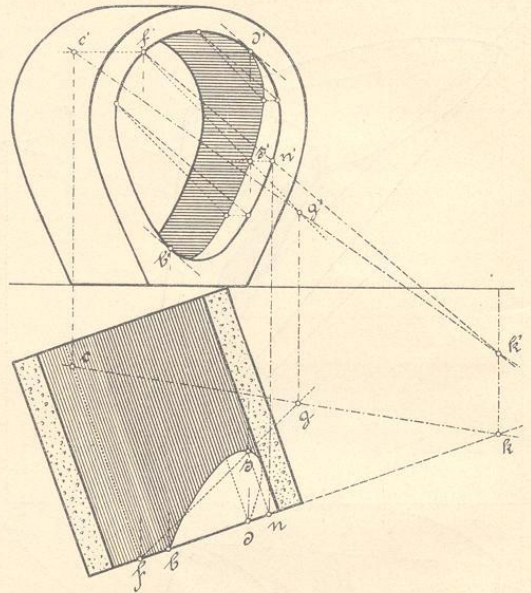
der Punkte s und s' giebt eine Probe. — Anstatt durch cc' hätte man auch durch aa' allein einen Lichtstrahl bis ll' und eine Parallele zu den Mantellinien bis pp' ziehen können, um in pl die Lichtrichtung in der Basisebene zu erhalten.

50. Der horizontale gerade Cylinder schief gerichtet (wagrecht liegende Röhre).

In Figur 50 liegt ein schiefgerichteter Cylinder, als Röhre beliebigen Querschnitts gedacht, auf der Horizontalebene. Selbstbeschattung und Körperschattengrenzen bestimmen sich wie folgt:

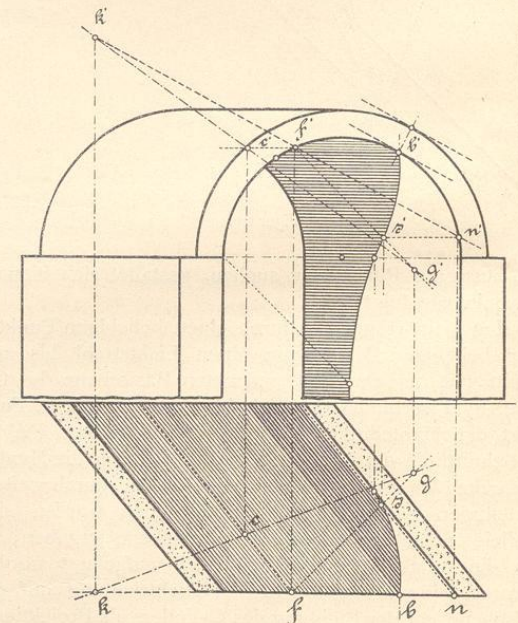
Man zieht durch einen schattenwerfenden Randpunkt ff' eine Mantellinie und einen Lichtstrahl, nimmt auf jeder dieser Linien einen beliebigen Punkt an und zieht die Verbindungslinie dieser Punkte cg bis zum Schnitt mit der (vertikalen) Basisebene des Cylinders in k , woraus im Aufriss auf $c'g'$ der Punkt k' erhalten wird. $f'k'$ ist im Aufriss die in der Basisebene gültige Lichtrichtung. Diese Linie schneidet die Basislinie in einem zweiten Punkt n' . Wo die Mantellinie durch n' getroffen wird vom Aufriss des Lichtstrahls durch f' , da ist der Schlagschatten s' des Punktes f' . Der zugehörige Grundrisspunkt s findet sich durch Hinunterloten auf den Lichtstrahl fg ; das Zeichnen der Mantellinie durch n auch im Grundriss liefert eine Probe. Für weitere Randpunkte ist immer nur eine Sehne parallel $f'n'$ zu ziehen, um die Mantellinie für den Schlag-

schatten des ausgewählten Randpunktes zu erhalten. Die Körperschattengrenzen sind die Mantellinien durch die Berührungspunkte b' und d' der Tangenten, die parallel zu $f'k'$ an beide Basislinien gezogen werden.



Figur 50.

Ist der Cylinder ein Kreiscylinder, so kann man die Umklappung der Basisebene samt der darauf erscheinenden Schnittlinie $f'k'$ in die Horizontalebene zu Hilfe nehmen; die Tangenten sind dann an einen Kreis zu ziehen; doch ist damit die Arbeit kaum vermindert.



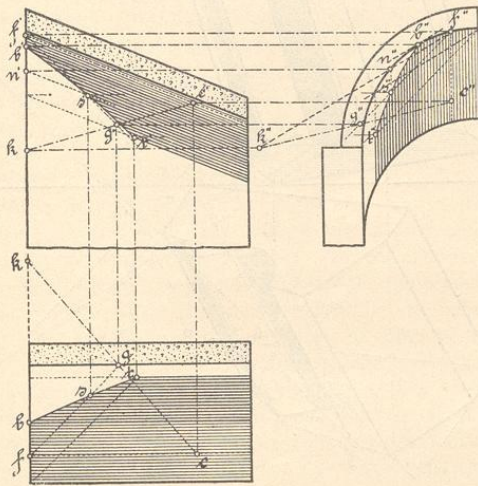
Figur 51.

51. Der horizontale Cylinder schief abgeschnitten (schiefes Tonnengewölbe).

Die Konstruktion der Schattengrenzen, die auf die cylindrische Leibungsfläche des Gewölbs fallen, ist ganz mit denselben Worten, angewendet auf Figur 51, beschrieben wie in Art. 50. Ein Teil des Schattens der Stirnbogenlinie fällt auf die vertikale Leibungsebene des Widerlagers und bestimmt sich einfach nach Art. 22.

52. Der schiefgerichtete Cylinder parallel zur Vertikalebene, vertikal und gerade abgeschnitten (steigendes Tonnengewölbe im Längenschnitt).

Man zeichnet (Figur 52) die Seitenprojektion des Gewölbes, wie sie ja schon zu dessen unzweideutiger Darstellung notwendig ist. (Hier ist sie als Ansicht von der rechten Seite der Aufrissfigur dargestellt, wobei der Licht-



Figur 52.

strahl in der Seitenprojektion von rechts oben nach links unten gerichtet ist.)

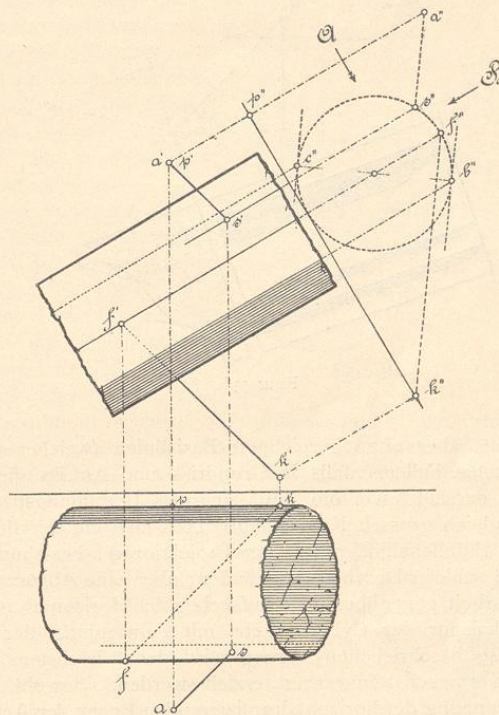
Auch für diese Lösung gilt im übrigen ganz derselbe Wortlaut angewendet auf Figur 52, wie für den horizontalen Cylinder in Art. 50; nur sind die dort beschriebenen Operationen immer zugleich in der Seitenprojektion durchgeführt, welche in der Linie $f''k''$ die in der Basisebene gültige Lichtstrahlrichtung anstatt der Aufrissfigur darbietet.

53. Cylinderfläche parallel zur Vertikalebene ohne Basis, aber mit bekanntem Normalschnitt.

In Figur 53a sind die Körperschattengrenzen und der Schlagschatten eines äusseren Punktes auf einem in gerader Ansicht gezeichneten steigenden Kreiscylinder bestimmt, ohne dass elliptische Projektionen zu Hilfe genommen wurden.

Man denkt sich den Cylinder auf eine zu seiner Achse senkrechte Ebene projiziert und diese (kreisförmige)

Projektion in die Vertikalebene umgeklappt. Durch einen beliebigen Punkt ff' einer Mantellinie zieht man einen Lichtstrahl fk bis zu der vertikalen Ebene der äussersten Mantellinie (oder einer beliebigen andern parallelen Ebene). Diesen Lichtstrahl projiziert man ebenfalls auf die umzuklappende Ebene, indem man k' nach k'' projiziert und $f''k''$ zieht. Diese Linie bedeutet in der Umklappung zugleich eine Ebene, die durch die Mantellinie f'' und den Lichtstrahl gelegt ist und giebt damit die für die umgeklappte Normalschnittebene des Cylinders gültige Lichtstrahlrichtung, welche zu benutzen ist wie in den früheren Fällen. Beim Zurücktragen der Mantellinien b'' und d'' in die andern Projektionen ist nur zu beachten, dass der



Figur 53 a.

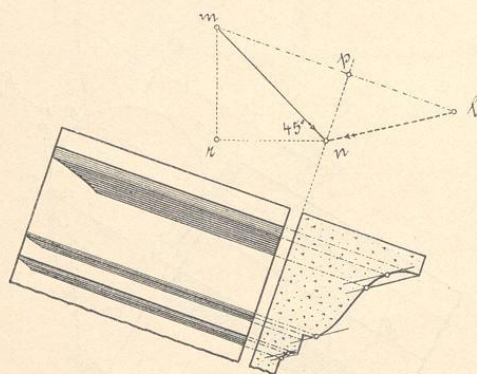
Grundriss einer Ansicht des Cylinders von A aus, der Aufriss einer solchen von B aus entspricht. Der äussere schattenwerfende Punkt aa' wird ebenfalls auf die Normalschnittebene projiziert und mit ihr umgeklappt, indem $p''a'' = pa$ gemacht wird. Der Lichtstrahl $a''s''$ parallel $f''k''$ liefert s'' und damit leicht s' und s .

Die Lösung ist auch ohne Grundriss durchführbar, wofür in Figur 53b ein Beispiel mit beliebigem Normalschnitt der Cylinderfläche gezeichnet ist. Die Hilfsfigur über dem Gesims zeigt die Bestimmung der Lichtstrahlrichtung ln , die in der umgeklappten Ebene der Normalschnittlinie zu benutzen ist. Durch den Punkt n der Fusslinie der Umklappung ist ein Lichtstrahl Mn gezogen gedacht. Der obere Endpunkt M dieses Lichtstrahls liegt vor seiner Projektion m um das Mass $Mm = mr = rn$. Wird dieser Lichtstrahl in der Richtung

der Mantellinien, das heisst rechtwinklig auf die ursprüngliche Normalschnittebene projiziert, so fällt der Punkt L , die Projektion von M , ebensoweit vor p , als Punkt M von m absteht. Wird also die Normalschnittebene samt ihrer Lichtstrahlprojektion in die Vertikalebene umgeklappt, so erscheint $lp = Lp = Mm = mr$, und ln ist die umgeklappte, für die Normalschnittfigur gültige Lichtstrahlrichtung.

Eine Verwertung der Konstruktion für gekrümmte Röhrenflächen, die parallel zur Vertikalebene stehen, ist in Art. 72 erklärt.

Auch für den beliebig schief gerichteten Kreiscylinder oder anderen Cylinder mit bekanntem Normal-



Figur 53 b.

schnitt, aber ohne gezeichnete Basislinien (welcher sich im ersten Fall ebenfalls in Grundriss und Aufriss gleich breit darstellt, wie die Auffassung als Umhüllungsfläche von gleich grossen Kugeln lehrt) lässt sich ein Verfahren ohne Zuhilfenahme elliptischer Projektionen, beziehungsweise schiefer Durchschnitte finden; aber eine Abkürzung der Arbeit gegenüber dem Aufsuchen der Horizontal- oder Vertikalspur der Cylinderfläche mit Anwendung der in Art. 49 beschriebenen Lösung wird damit höchstens für die Körperschattengrenzen erzielt werden. Sowohl die Umklappung der horizontalprojizierenden Ebene der Achse als diejenige der Normalschnittebene in die horizontale Grundebene sind dabei zu Hilfe zu nehmen. Auch würde die Lösung selten praktisch zu verwerten sein.

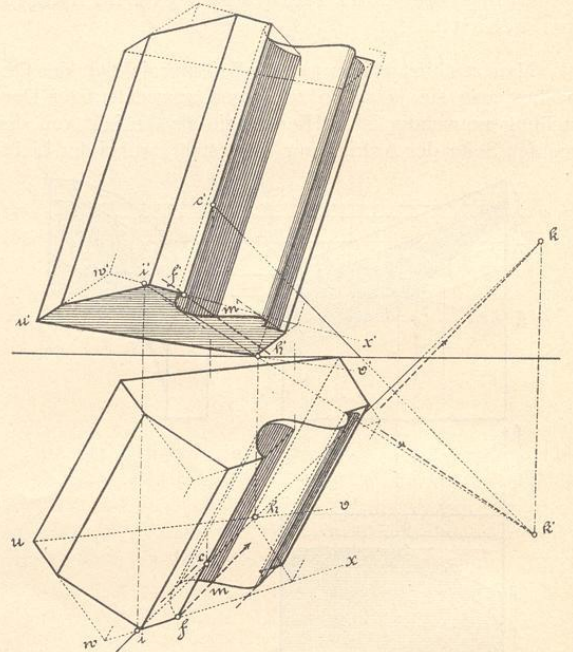
54. Der beliebig schief gerichtete Cylinder mit beliebig geformter schiefstehender Basis.

Durch einen Punkt cc' einer Mantellinie (Figur 54) zieht man einen Lichtstrahl. Um dessen Schnitt mit der Basisebene zu finden, zieht man auf dieser zwei geeignete gerade Linien uv und wx , welche den Lichtstrahlgrundriss in h und i schneiden; diese Punkte lotet man hinauf in den Aufriss nach h' und i' und hat dann in $h'i'$ die Schnittlinie der Vertikalebene des Lichtstrahls mit der erweiterten Basisebene. Wo diese Schnittlinie getroffen wird vom Aufriss des Lichtstrahls, da ist der Schnittpunkt des Lichtstrahls mit der Basisebene k' im Aufriss.

Das Hinunterloten (hier Hinaufloten) auf den Lichtstrahlgrundriss giebt dort k .

Die Verbindungslinie von kk' mit dem Fusspunkt der Mantellinie ff' ergibt in Grundriss und Aufriss die Projektionen $f'k$ und $f'k'$ der Schnittlinie der Basisebene mit einer durch die Mantellinie cm gelegten Lichtstrahlenebene. Diese auf die Basisebene mit der Richtung der Cylinderfläche projizierte Lichtstrahlrichtung ist zu benutzen wie in allen früher behandelten Fällen des schiefgerichteten Cylinders.

Wirft ein äusserer Punkt aa' einen Schlagschatten auf den Cylinder, so ist dieser Punkt in der Richtung



Figur 54.

der Cylinderachse auf die Basisebene zu projizieren. Dies geschieht, nachdem durch a und a' die projizierenden Parallelen zu den Mantellinien gezogen sind, ganz auf demselben Weg, der zuvor für das Aufsuchen des Schnittpunktes k' angegeben worden ist. Da dieses Projizieren aber ziemlich zeitraubend ist, so wird man bei vielen schlagschattenwerfenden Punkten mit Aufsuchen der Horizontalspur der Cylinderfläche unter Anwendung von Art. 49, oder auch mit der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen, d. h. mit Hilfe der Schnittkurven vertikaler Lichtstrahlenebenen, rascher zum Ziel kommen, da ja jene Schnittkurven alle kongruent sind und einmal konstruiert durch Rücken eines Pausblattes mit Durchstechen der Punkte rasch erhalten werden können.