



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

VII. Schatten auf Drehungsflächen.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

VII. Schatten auf Drehungsflächen.

55. Erstes Verfahren für Körper- und Schlagschattengrenzen: Drehungsflächen mit Achse senkrecht zu einer Grundebene nach der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen behandelt.

Diejenigen Lagen der Drehungsflächen, bei welchen die Achsen vertikal, oder senkrecht zur Vertikalebene, oder parallel zum Grundschnitt gerichtet sind, wurden schon in Art. 30 u. 31 als Fälle der Anwendbarkeit der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen behandelt. Dieses erste Verfahren für beide Arten von Schattengrenzen ist aber im allgemeinen nicht nur zeitraubender, sondern auch wegen der in Art. 35 beschriebenen Mängel minder zweckmässig als die im folgenden unter Art. 56, 57 und 61 beschriebenen.

Bei Drehungsflächen mit kreisförmigen oder kegelschnittförmigen Meridianen lassen sich die Körperschattengrenzen nach Art. 56 u. 57 mit voller Bestimmtheit erhalten; für andere Meridianlinien sind zwar auch bei diesen Verfahren die Berührungspunkte von Tangenten schätzungsweise einzutragen, was noch immer eine Unsicherheit mit sich bringt; diese ist aber geringer als bei der allgemeinen Lösung.

Für Schlagschattengrenzen ist das in Art. 61 beschriebene Verfahren, das leider fast nur in denjenigen Fällen rasch fördert, in welchen ein Parallelkreis als Kante den Schatten wirft, in erster Linie gebräuchlich. Wo ein berührender Lichtstrahlencylinder die Schattengrenze erzeugt, da hat für diese meist die allgemeine Lösung einzutreten, die ja für die Schlagschattengrenzen minder unsicher ist als für Körperschatten. Die schärfere Bestimmung der letzteren nach den Verfahren in Art. 56 und 57 kommt hiebei auch der genaueren Konstruktion der Schlagschattengrenze zu gut, da diese den Schatten der Körperschattengrenze darstellt, so z. B. in der Beschattung und Selbstbeschattung nach Figur 37. In bestimmten Fällen ist auch die Schlagschattenbestimmung nach Art. 62 zweckmässig.

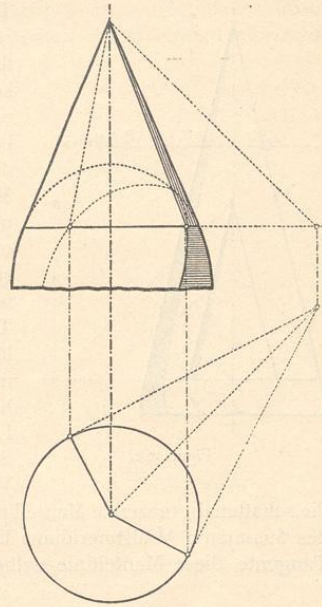
56. Zweites Verfahren für Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe von berührenden Kreiskegeln.

Wenn man sich (Figuren 56a u. 56b) an irgend einen Meridian einer Drehungsfläche eine Tangente gezogen denkt und diese mit dem Meridian um die Achse dreht, so beschreibt der Berührungspunkt einen Parallelkreis und die Tangente selber eine Kegelfläche, deren Spitze in der Drehachse liegt. Diese Kegelfläche hat eine unendlich niedere Zone gemeinschaftlich mit der Drehungsfläche, und wo die Schattengrenze auf dieser Zone als einem Bestandteil des Kegels liegt, da muss sie auch liegen, wenn man die Zone als Bestandteil der Drehungsfläche betrachtet. Wenn man also nach bekanntem Verfahren die Schattengrenze auf dem Kegel konstruiert und zusieht, wo die schattenabgrenzende Mantellinie den Par-

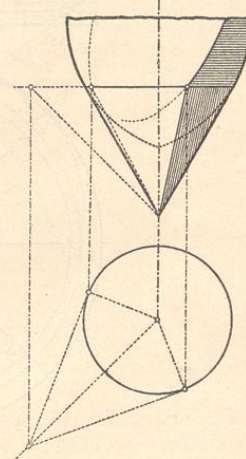
allekreis schneidet, so hat man im erhaltenen Schnittpunkt zugleich einen Punkt der Körperschattengrenze auf der Drehungsfläche. Wo die Tangente am Meridian parallel wird zur Achse, da geht die Kegelfläche in eine Cylinderfläche über, und es ist auch auf dieser die schattenabgrenzende Mantellinie in bekannter Weise zu suchen. Zu beachten ist, dass für die konvexen Drehungsflächen konvexe Kegel, für die hohlen Drehungsflächen Hohlkegel beizuziehen sind. Die Grenzlinien der Schatten sind zwar für beide Fälle dieselben; aber die Lichtfläche des einen Falls wird im andern zur Schattenfläche.

Bei Anwendung dieses Verfahrens findet sich, dass die Kegelspitzen und ihre Schatten meist in zu grosse Ferne und über das Zeichenblatt hinausfallen. Man kann aber in diesen Fällen die Konstruktion trotzdem durchführen, indem man die zu grossen Kegel auf die Hälfte oder einen anderen Bruchteil ihrer Basis verkleinert, dann den Schattenpunkt in diesem kleineren Massstab konstruiert und endlich den erhaltenen Abstand von der Drehachse im gleichen Verhältnis wieder vergrössert. Fig. 56c soll diese Hilfskonstruktion anschaulich machen. Die Mantellinien für den Kegelschatten sind nicht wirklich zu ziehen, da man ja nur ihren Fusspunkt braucht; andere umständlich mit Worten darzulegende Vereinfachungen der am besten neben der Hauptfigur nur in kleinem Massstab und mit einem einzigen Kreis als Basis für alle Kegel auszuführenden Hilfskonstruktion ergeben sich bei mehrmaliger Ausführung von selbst.

Nach dem vorbeschriebenen Verfahren lassen sich für alle Drehungsflächen, besonders aber für solche mit kreisförmigen Meridianstücken, rasch einige wichtige Punkte der Schattenkurve konstruieren, welche die Lage und Form dieser Kurve schon für viele Fälle genügend einzeichnen gestatten. Bei einem Wulst mit vertikaler Drehachse (Figur 56d) lassen sich z. B. 8 Punkte ohne eingehende Konstruktion leicht auffinden. Denkt man

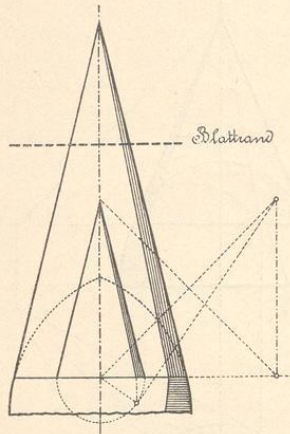


Figur 56a.



Figur 56b.

sich eine Tangente, gegen oben die Achse schneidend, unter 45° an den äussersten Meridian rechts gezogen, so ist der Berührungspunkt a' der Endpunkt des sichtbaren Teils der Körperschattenkurve. Denn der mit dieser



Figur 56 c.

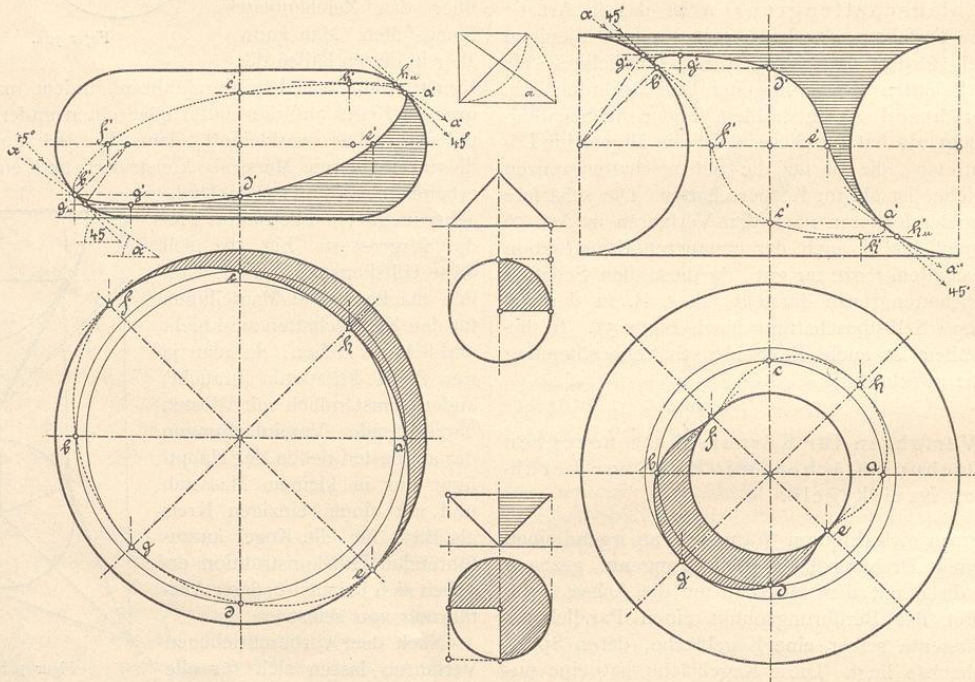
Tangente gedachte Berührungskegel der Wulstfläche ist ein Drehungskegel, dessen Mantellinien unter 45° geneigt sind, und bei einem solchen liegen die schattenabgrenzenden Mantellinien im Grundriss parallel zum Grundriss und senkrecht zum Grundriss, so dass die Schattenfläche genau der vierte Teil des Mantels ist. Dies leuchtet sofort ein, wenn man den Kegel für sich herauszeichnet und die Lage des Schattens seiner Spitze betrachtet (Fig. 56 e).

Weil nun auf dem Kegel die schattenabgrenzende Mantellinie in der vertikalen Ebene des äussersten Wulstmeridians liegt, so ist die gezogene Tangente diese Mantellinie selber, und ihr Berührungspunkt

b' liefert (Figur 56 f zeigt den Hilfskegel für sich). Da ferner auf dem Wulst alle Schattierung symmetrisch zu der vertikalen Ebene sein muss, die durch die Achse unter 45° zum Grundriss gelegt und die „Hauptmeridiane“ genannt wird, so finden sich leicht die weiteren Punkte c' und d' gleichhoch liegend mit a' und b' auf der vertikalen Mittelachse der Figur. Im Grundriss müssen $a b c d$ auf demselben Parallelkreis liegen.

Auf dem grössten Horizontalkreis des Wulstes müssen die Schattenpunkte da liegen, wo die schattenabgrenzenden Mantellinien eines vertikalen Cylinders mit diesem Kreis als Basis liegen würden. So finden sich durch einen unter 45° geneigten Durchmesser dieses Kreises die Schattenpunkte ee' und ff' .

Noch zwei weitere Punkte, und zwar der tiefstliegende und höchstliegende Punkt, ergeben sich durch Betrachtung der vertikalen Ebene, die durch die Achse unter 45° zum Grundriss gelegt wird. Diese Lichtstrahlen-ebene schneidet den Wulst nach Meridianen; wo der Lichtstrahl diese Meridiane berührt, da liegen die gesuchten Punkte. Denkt man sich diese Ebene um die Achse gedreht, bis sie parallel zur Vertikalebene steht, so erscheinen die Grenzlinien der Figur als Umklappung der Meridiane. Es sind also nur an die äussersten Meridiane zwei Tangenten mit derjenigen Richtung zu ziehen, welche der Lichtstrahl in seiner eigenen Vertikalebene



Figur 56 d, e, f, g.

punkt mit dem Meridian ein Punkt der Schattenkurve. Aus a' findet sich leicht der zugehörige Grundrisspunkt a .

Ganz dieselbe Betrachtung ergibt, dass eine an den linken äussersten Meridian unter 45° gezogene nach unten gerichtete Tangente den linken Endpunkt der Kurve

darbietet. Diese Richtung ist flacher als 45° ; sie findet sich nach Art. 38 ausgedrückt durch den Winkel $\alpha = 35^\circ 15,9'$ oder durch die Richtung der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen vertikale Kathete gleich einem beliebigen Mass a und dessen horizontale Kathete

gleich $a\sqrt{2}$, das heisst gleich der Diagonale eines Quadrats über a . Die Berührungspunkte dieser zwei Tangenten seien g'_n und h'_n ; durch das Zurückklappen dieser Punkte in ihre ursprüngliche Meridianebene findet sich die Lage der Körperschattengrenzpunkte gg' und hh' , die um so wichtiger sind, als die horizontalen Parallelkreise im Aufriss, die zum Zurückklappen dienen, zugleich Tangenten an der Grenzkurve in diesen Punkten darstellen. In den Grundrisspunkten g und h hat die Grenzkurve im Grundriss eine kurze Symmetralachse, wogegen der senkrechte Durchmesser ef eine grosse Symmetralachse darstellt.

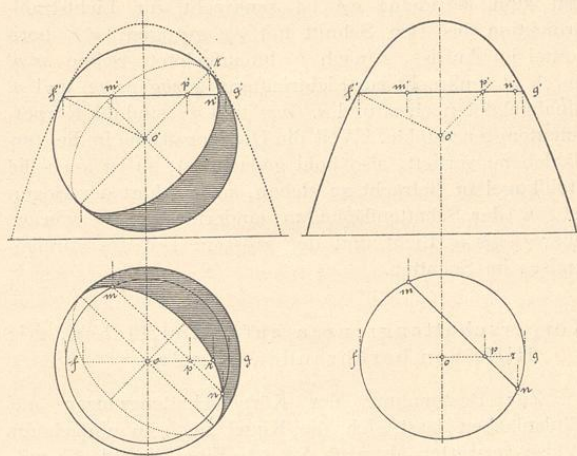
Ganz dieselbe Betrachtung führt zu den 8 Punkten der Wulstfläche mit konkavem Meridian, Fig. 56g. Wie bei diesen Wulstflächen, so lassen sich für alle anderen Drehungsflächen die wichtigsten Punkte der Körperschattengrenze rasch bestimmen. Auch für die Schlag-schattengrenze, die bei Drehungsflächen mit Selbstbeschattung hintritt, führt die Betrachtung der vertikalen Lichtstrahlenebene, die durch die Achse geht, und die Erwägung der Symmetrie der ganzen Schattierung in Beziehung auf diese Ebene zu einigen Schlüssen, so dass sich im Zusammenhang mit Art. 34 über den Verlauf der Schattengrenzen auf Drehungsflächen mit vertikaler Achse die in Art. 63 gegebenen Sätze zusammenstellen lassen. Die Anpassung dieser Sätze an die Lagen der Drehungsachsen senkrecht zur Vertikalebene und parallel zum Grundriss bedarf keiner Erklärung.

57. Drittes Verfahren für Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe von berührenden Kugeln.

Der Anschauung vielleicht minder leicht zugänglich, aber in der Ausführung einfacher und raumsparender ist ein drittes Verfahren zur Bestimmung der Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, nämlich dasjenige mit berührenden Kugeln. Jede Drehungsfläche kann aufgefasst werden als umhüllt von Kugeln verschiedener Grösse, deren Mittelpunkte auf der Achse der Drehungsfläche liegen und von denen jede die Fläche nach einem Parallelkreis berührt, längs welchem jeder Kugelradius normal zum zugehörigen Meridian der Fläche gerichtet ist. Einen solchen Parallelkreis ($f'g'$ in Figur 57a) kann man ebenso als eine sehr niedrige Zone der Kugel wie der Drehungsfläche auffassen, und wo die Schattengrenze darauf erscheint als auf einer Zone der Kugel, da muss sie auch liegen als Bestandteil der Schattengrenze der Drehungsfläche.

Hier ist voranzunehmen, was erst später (in Art. 66) ausgeführt wird, aber eines Beweises nicht bedarf, nämlich dass die Körperschattengrenze auf der Vollkugel ein Grosskreis senkrecht zur Lichtrichtung ist. Im Grundriss und Aufriss der Kugel (Figur 57a) projiziert sich dieser Grosskreis als eine Ellipse, deren grosse Achse ein Durchmesser der Kugelprojektion senkrecht zur Lichtstrahlprojektion ist. Die grosse Achse der einen Projektion projiziert sich in der andern Projektion horizontal. Wo diese Ellipse im Grundriss oder Aufriss geschnitten wird

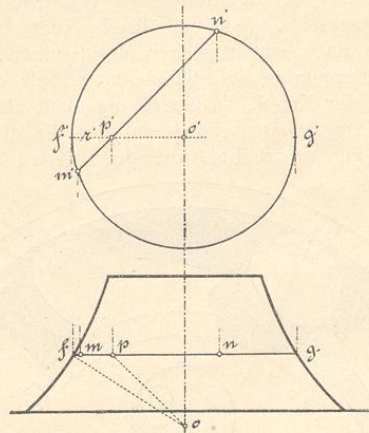
von der Projektion eines der zuvor genannten Parallelkreise $f'g'$, da ist ein Schattenpunkt auch für die Drehungsfläche. Die Grosskreisebene schneidet — wenn die Drehachse vertikal vorausgesetzt wird — die horizontale Parallelkreisebene nach einer gemeinschaftlichen Sehne mn , die wie die Grosskreisebene selbst normal zur Licht-



Figur 57 a, b.

richtung steht, also im Grundriss normal zur Lichtstrahlprojektion erscheint.

Sobald der Parallelkreis $f'g'$ in Aufriss und Grundriss der Drehungsfläche gezeichnet und die Normale der Meridianlinie $f'o'$ (als Kugelradius gedacht) gezogen ist,



Figur 57 c.

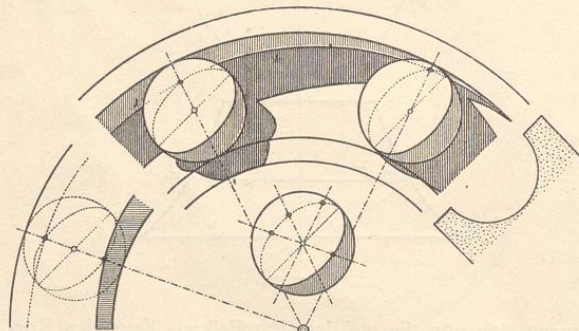
lassen sich nun die auf dem Parallelkreis liegenden Körperschattengrenzpunkte m und n rasch bestimmen, ohne dass die Kugelprojektionen und die Ellipsen gezeichnet werden müssten. Man zieht (Figur 57b) im Aufriss $o'p'$ senkrecht zur Lichtstrahlprojektion und im Grundriss den Radius or horizontal, lotet p' in den Grundriss auf or nach p , zieht durch p die Sehne senkrecht zur Lichtstrahlprojektion, erhält dadurch auf dem Parallelkreis m und n und lotet diese Punkte hinauf nach m' und n' . mm' und nn' sind Körperschattengrenzpunkte der Drehungsfläche.

Anwendung des Verfahrens mit den Berührungskugeln auf eine Drehungsfläche mit Achse senkrecht zur Vertikalebene vertieft in diese; Figur 57c.

fg sei der Parallelkreis, auf welchem die Körperschattengrenzpunkte zu suchen sind, im Grundriss; der Kreis um o' sei dessen Aufriss. fo im Grundriss ist normal zum Meridian; op ist senkrecht zur Lichtstrahlprojektion bis zum Schnitt mit fg gezogen, $o'r'$ horizontal im Aufriss, p nach p' hinaufgelotet; Sehne $m'n'$ durch p' senkrecht zur Lichtrichtung gezogen; m' und n' hinabgelotet nach m und n . mm' und nn' sind die Körperschattengrenzpunkte. Weil die Drehungsfläche in die Vertikalebene vertieft, also hohl gedacht ist, so ist auch die Hohlkugel in Betracht zu ziehen, also gehört der Bogen $m'f'n'$ der Schattenfläche an; andernfalls wäre von m' über f bis n' Licht und der grössere Teil des Parallelkreises im Schatten.

58. Körperschattengrenzen auf Wulstflächen, mit Hilfe von berührenden Kugeln.

Zur Bestimmung der Körperschattengrenzen auf Wulstflächen lässt sich die Kugel noch in einfacherer Weise verwerten als nach Art. 57. Eine Wulstfläche entsteht durch Drehung eines Kreises oder Kreisbogens um eine in seiner Ebene liegende Achse; sie ist also nicht nur Umhüllungsfläche von Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Drehungsachse liegen, sondern es liegt näher, sie als Umhüllungsfläche gleich grosser Kugeln aufzufassen, deren Mittelpunkte auf dem Kreis liegen, den der Mittelpunkt des Meridiankreises der Wulstfläche bei der Drehung beschreibt. Jede umhüllende Kugel berührt die Wulstfläche nach einem solchen Meridiankreis. Wo die Körperschattenpunkte auf diesem liegen als auf einem Bestandteil der Kugel, da liegen sie auch als Bestandteile der Körperschattengrenze auf der Wulstfläche. Im folgenden (Fig. 58) ist die Anwendung dieses Gedankens



Figur 58.

auf den konvexen Wulst und auf die halbe hohle Wulstfläche mit Drehungsachse senkrecht zur Vertikalebene gezeigt.

Man zeichnet als Aufriss eine Kugel mit dem Radius des Meridiankreises der Wulstfläche samt ihrem schattenabgrenzenden Grosskreis, wobei die Ellipse, als welche dieser erscheint, nach Art. 66 erhalten werden kann.

Dieses Kugelbild denkt man sich auf eine genügende Zahl von Radien zwischen die zwei Aufrisskreise der Wulstfläche gelegt, wie es Figur 58 anschaulich macht, und zwar so, dass der Mittelpunkt des Kugelbildes immer auf dem Radius liegt und die grosse Achse der Ellipse immer gleichgerichtet (unter 45°) bleibt, wie es der Auffassung des Kugelbildes als einer Vertikalprojektion entspricht. Wo die Ellipse auf der Kugel den Radius schneidet, da ist ein Punkt der Körperschattengrenze der Wulstfläche. Beim hohlen Wulst ist nur die punktierte Hälfte der Ellipse in Betracht zu ziehen; bei der konvexen Wulstfläche mit vollem Kreisquerschnitt werden für jede Lage des Kugelbildes zwei Punkte erhalten.

Zur praktischen Durchführung zeichnet man sich die Kugel nur einmal seitlich vom gegebenen Wulst (s. Figur) und zieht durch den Mittelpunkt des Kugelbildes parallele Durchmesser zu den Radien des Wulstaufisses, worauf sich die Abstände der Schattenpunkte von den Wulsträndern auf jedem solchen Durchmesser abstecken lassen. Auch kann man das Kugelbild auf Pauspapier zeichnen und nacheinander mit unveränderter Richtung auf die Radien legen, wobei sich in jeder Lage der Schattenpunkt auf den Radius durchstechen lässt.

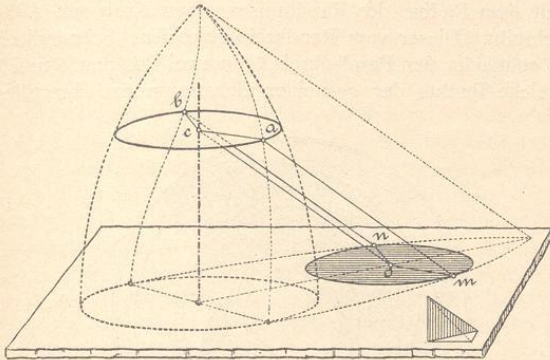
Die Anwendung auf andere Lagen der Drehachse, die einer Grundebene parallel sind, bedarf keiner Erklärung. Doch ist zu beachten, dass die Lösung — um so einfach zu sein — diejenige Projektion der Wulstfläche erfordert, in welcher deren Drehachse sich als ein Punkt projiziert, weil sich in andern Projektionen die Berührungskreise nicht als gerade Linien projizieren. Ist die Schattengrenze in einer andern Projektion verlangt, so ist sie in dieser erst durch Uebertragung der in jener ersten Projektion gefundenen Grenzlinie erhältlich.

Viertes Verfahren für Körperschattengrenzen 59. auf Drehungsflächen, mit Hilfe des Schlagschattens auf einer Ebene senkrecht zur Achse.

Der Schlagschatten eines Drehungskörpers auf einer Ebene senkrecht zu seiner Achse würde auf dem gewöhnlichen Weg dadurch erhalten, dass man zuerst die Körperschattengrenze auf dem Drehungskörper und dann deren Schlagschatten auf der Ebene in bekannter Weise aufsucht. Nun lässt sich aber dieser Schlagschatten meist rascher dadurch erhalten, dass man die Schatten einer genügenden Zahl von Parallelkreisen auf der Ebene zeichnet. Diese Schatten werden wieder kreisförmig und wie in Art. 10e auf kurzem Weg gefunden; ihre Umhüllungsline ist die Schlagschattengrenze.

Die so erhaltene Grenzlinie ist zugleich der Schlagschatten der Körperschattengrenzlinie und kann mit Umkehrung des gewöhnlichen Wegs zu deren Bestimmung verwertet werden (Figur 59a). Man bestimmt durch Schätzung möglichst genau einen Berührungspunkt m oder n zwischen einem Schattenkreis und der Umhüllungskurve; ein rückwärts durch den Punkt gezogener Lichtstrahl liefert als Schnitt mit dem Parallelkreis den zugehörigen schattenwerfenden Punkt a oder b , welcher

notwendig der Körperschattengrenze angehört. Auch durch zwei parallele Radien kann der schattenwerfende Punkt aus dem Schattenpunkt abgeleitet werden; ca ist parallel om ; cb ist parallel on ; wonach es nicht nötig



Figur 59 a.

ist, den Parallelkreis $a b$ selbst zu zeichnen, sondern genügt, dessen Schatten und die parallelen Radien darzustellen. Durch Wiederholung des Verfahrens mit weiteren Berührungspunkten lässt sich im Zusammenhang mit der Bestimmung wichtiger Punkte nach Art. 56 die Körperschattengrenze für bestimmte Fälle rascher erhalten als auf den anderen Wegen; aber allgemeine Brauchbarkeit

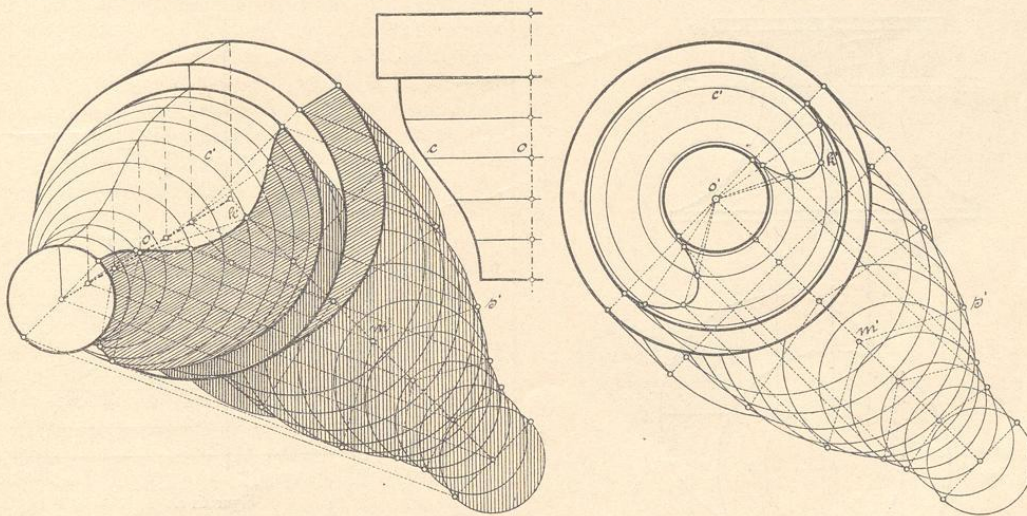
nen der Schatten der Parallelkreise des Körpers ist die Schlagschattengrenze auf der Vertikalebene als Umhüllungskurve der Schattenkreise gefunden worden. s' sei einer der beiden Berührungspunkte zwischen der Schlagschattengrenze und dem Schatten des Parallelkreises $o'c'$. Der rückwärts durch s' gezogene Lichtstrahl (oder das Ziehen der parallelen Radien $m's'$ und $o'k'$) liefert den Körperschattenpunkt k' .

Fünftes Verfahren für Körperschattengrenzen 60.
auf Drehungsflächen, mit Hilfe der Normal-
kugel.

Ein fünftes Verfahren zur Bestimmung der Körperschattengrenzlinien auf Drehungsflächen mit Achse senkrecht zu einer Grundebene bietet die „Normalkugel“, die in der Beleuchtungskunde zur Bestimmung der Zwischenstufen der Beleuchtung verwertet wird. Hiefür ist auf Art. 93 bis 96 zu verweisen.

Zweites Verfahren für Schlagschattengrenzen⁶¹.
auf Drehungsflächen, mit Hilfe der kon-
gruenten Schlagschatten auf Parallelkreise-
ebenen.

Die in Art. 56 und 57 beschriebenen Verfahren haben den Mangel, dass sie nur Körperschatten-, nicht auch



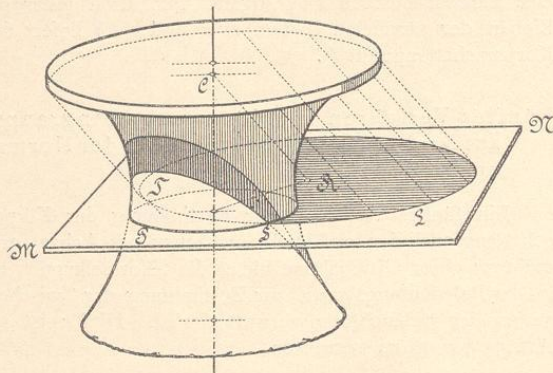
Figur 59b.

kann diese Art der Körperschattenbestimmung von Drehungsflächen nicht beanspruchen. Sie versagt leicht gerade an den wichtigsten Stellen durch Häufung der Linien. Körperschattengrenzen gegen Schlagschattenflächen ergeben sich dabei aus solchen Teilen jener Umhüllungskurve, welche im Innern der Schlagschattenfläche liegen, also später im Resultat der Konstruktion nicht mehr sichtbar sind.

Ein durchgeführtes Beispiel bietet Figur 59b mit perspektivischer und geometrischer Darstellung. Durch Zeich-

Schlagschattengrenzen liefern. Auch für die Bestimmung dieser letzten gibt es eine zweite Konstruktion, die zwar den entgegengesetzten Mangel hat, keine Körperschattengrenzen mitzuliefern, aber mit den Berührungskugeln oder -kugeln verbunden werden kann und dann entweder die zeitraubende allgemeine Lösung entbehrlich macht oder sie ergänzt und Proben für sie liefert. Sie ist in erster Linie und fast ausschliesslich wertvoll in den häufigen Fällen, in welchen ein Parallelkreisrand die Schlagschattengrenze erzeugt. Wo eine Auswölbung der Fläche oder

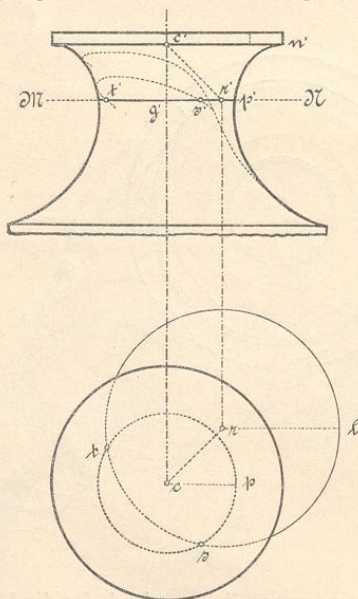
ein äusserer Körper die Beschattung hervorruft, ist die Konstruktion in Art. 62 vorzuziehen. Uebrigens leidet auch dieses neue Verfahren oft an sehr spitzwinkligen Durchschnitten zweier Kreislinien, die es ebenfalls unsicher machen, und zwar gerade an den wichtigsten



Figur 61 a.

Stellen, worin wieder die Verschwommenheit der im Raum vorhandenen Schattierung der Gebilde zum Ausdruck gelangt (vgl. Art. 35).

Figur 61 a bringt den Grundgedanken der Konstruktion perspektivisch zur Anschauung, und zwar an

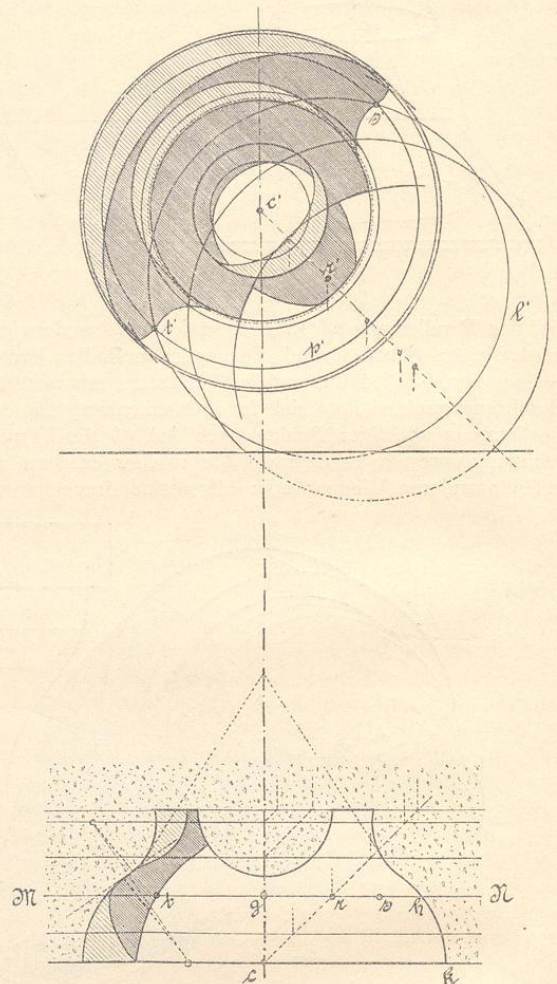


Figur 61 b.

einer Drehungsfläche mit vertikaler Achse und konkaver Meridianlinie.

Man schneidet die Drehungsfläche durch eine Ebene MN parallel zur Ebene des schattenwerfenden Randkreises und erhält als Schnittlinie einen Parallelkreis P , der im Grundriss als konzentrischer Kreis leicht zu zeichnen ist. Man sucht ferner auf der Schnittebene MN

den Schlagschatten des Randkreises. Dieser Schatten muss wieder ein Kreis sein, und man zeichnet ihn (nach Art. 10, Folgerung e) rasch, indem man den Schatten R des Mittelpunktes C auf der Ebene MN bestimmt und mit dem Radius des Randkreises einen Kreis um R beschreibt. Dieser vom Randkreis geworfene Schattenkreis L schneidet den Parallelkreis P in zwei Punkten S und T , welche Punkte der gesuchten Schattengrenze darstellen.



Figur 61 c.

Denn sie gehören der Drehungsfläche an, weil sie auf dem Parallelkreis liegen und gehören dem Schatten des Randes an, weil sie auf dem Schattenkreis L liegen. Durch Annahme weiterer Schnittebenen parallel zur Randebene erhält man weitere Paare von Schattenpunkten. In der Nähe des Randes werden die beiden sich schneidenden Kreise fast gleich gross und die Mittelpunkte liegen nahe beisammen, wodurch die Durchschnitte unsicher werden.

Figur 61 b zeigt dieselbe Konstruktion mit Darstellung durch Grundriss und Aufriss. Die Ebene MN schneidet

die Drehungsfläche nach dem Parallelkreis $g'p'$, der im Grundriss als konzentrischer Kreis um c mit $c'p' = g'p'$ erscheint. Der Schatten des Randkreises auf der Ebene MN wird im Grundriss erhalten durch Bestimmung des Schattens von cc' in rr' und durch Beschreiben des Kreises um r mit $rl = c'n'$. Hiedurch entstehen im Grundriss die Schlagschattenpunkte s und t , die nach s' und t' auf die Horizontale MN hinaufzuloten sind.

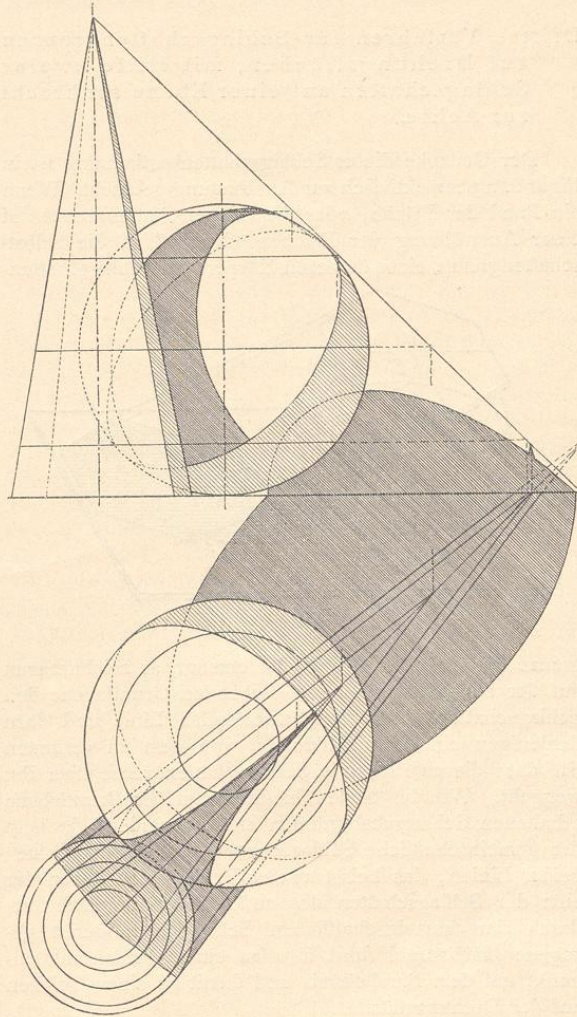
Figur 61 c bietet eine Drehungsfläche mit Achse senkrecht zur Vertikalebene, vertieft in diese, für welche die Körperschattengrenze mit Berührungskegeln nach Art. 56, die Schlagschattengrenze in der beschriebenen Weise konstruiert ist. Hier ist im Grundriss angenommen die Schnittebene MN ; sie schneidet die Fläche nach dem Parallelkreis $c'p'$, der im Aufriss als Kreis um c' mit $c'p' = gh$ erscheint. rr' ist der Schatten des Mittelpunktes cc' auf der Ebene MN und der Kreis um r mit $rl = ck$ ist der Schlagschatten des Randkreises auf dieser Ebene. Die beiden in der Ebene MN liegenden Kreise $c'p'$ und $r'l$ schneiden sich in s' und t' ; diese sind Punkte der Schlagschattengrenze im Aufriss und geben, auf MN hinuntergelotet, die zugehörigen Grundrisspunkte s und t (der Grundriss ist als Horizontalschnitt mit Ansicht nach unten dargestellt).

Auch in Figur 65 g liesse sich der Schatten der kreisförmigen Scheitelöffnung auf der Kuppelfläche mit Hilfe horizontaler Parallelkreisschnitte bestimmen, und zwar für jede beliebige Meridianform der Kuppel. Dasselbe gilt für die Schlagschattengrenzen auf den Kugelflächen der Figuren 65 d, 65 e u. 65 f, endlich für die Schlagschattengrenze auf der hohlen Wulstfläche der Figur 58. Selbst für die Beschattung von geraden und schiefen Kreiskegelflächen durch ihre kreisförmigen Randlinien kann das Verfahren oft näher liegen als das gewöhnliche; so wären z. B. die Schlagschattengrenzen in den Figuren 44 u. 45 damit erhältlich.

Wenn nicht ein Rand des Drehungskörpers, sondern eine durch Auswölbung mit berührenden Lichtstrahlen entstandene Körperschattengrenze den Schlagschatten wirft, wie in Figur 31 b, oder wenn der Schlagschatten von einem äusseren Körper herrührt, so gestaltet sich das Verfahren meist weniger einfach als nach Art. 62; doch dürfte es auch noch in diesem Fall oft eine Abkürzung gegenüber der allgemeinen Lösung bieten. Man sucht von der ganzen Körperschattengrenzlinie, welche die zu suchende Schlagschattengrenze als Schatten wirft und zuvor bestimmt sein muss, den Schlagschatten auf irgend einer Parallelkreisebene. Wo der Parallelkreis geschnitten wird von der erhaltenen Hilfsschlagschattenlinie, da liegen zwei Punkte der Schlagschattengrenze auf dem Körper. Für weitere Parallelkreisschnittebenen wird die Hilfsschlagschattenlinie offenbar kongruent der ersterhaltenen, da beide parallele Schnitte desselben Lichtstrahlencylinders bilden. Sie muss also nicht neu konstruiert werden, sondern ist durch paralleles Fortrücken der ersten in der Richtung des Lichtstrahls rasch zu erhalten. Wie weit sie fortrücken muss, hängt in bekannter Weise von der Länge des Achsenstücks zwischen beiden Parallelkreisen ab. Man wird sich die einmal konstruierte Hilfsschlag-

schattenlinie mit Angabe der Lichtstrahlrichtung auf Pauspapier zeichnen und sie von Kreis zu Kreis verschieben, um auf jedem die zwei Schnittpunkte durchstechen zu können. Doch ist dieses Verfahren schon fast identisch mit dem nächstfolgenden in Art. 62, und nur ausnahmsweise diesem vorzuziehen.

Ein einfaches hübsches Beispiel ist in Figur 61 d gezeichnet. Ein vertikaler Kreiskegel wirft seinen Schatten



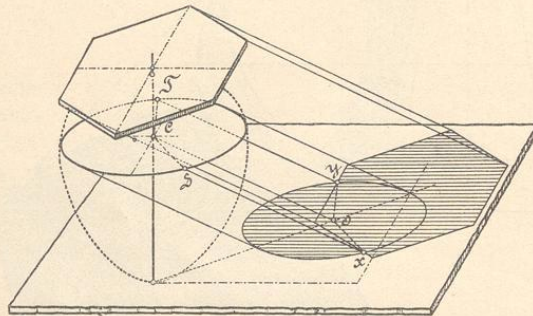
Figur 61 d.

auf eine Kugel oder eine Drehungsfläche mit vertikaler Achse. Eine horizontale Schnittebene schneidet sowohl den Kegel als die Drehungsfläche nach einem Kreis, der im Grundriss als solcher erscheint. Man sucht im Grundriss den Schatten des Kegels auf der Schnittebene, indem in bekannter Weise der Schnittpunkt eines durch die Kegelspitze gezogenen Lichtstrahls mit der Ebene bestimmt und aus diesem Punkt die zwei Tangenten an den Parallelkreis gezogen werden. Wo diese Tangenten den Parallelkreis der Drehungsfläche schneiden, da liegen zwei Punkte

der gesuchten Schlagschattengrenze. Denn die erhaltenen Punkte sind zugleich Punkte der Drehungsfläche und Punkte der am Kegel tangierenden Lichtstrahlenebenen. Das Hinaufloten auf den Parallelkreis im Aufriss liefert die zwei Schattenpunkte auch im Aufriss. Durch Annahme weiterer horizontaler Schnittebenen lassen sich beliebig viele weitere Paare von Schattengrenzpunkten finden.

62. Drittes Verfahren für Schlagschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe zweier Schlagschatten auf einer Ebene senkrecht zur Achse.

Der Gedanke dieser Schlagschattenbestimmung ist in Figur 62a perspektivisch zur Anschauung gebracht. Wenn ein Rand der Fläche, oder die Körperschattengrenze auf einer Auswölbung der Fläche, oder endlich die Selbstschattengrenze eines äusseren Körpers die Schlagschatten-

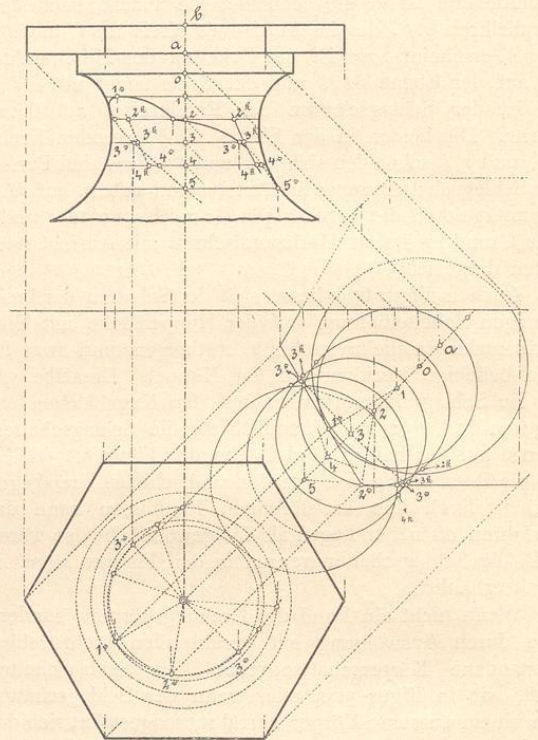


Figur 62 a.

grenze auf einer Drehungsfläche erzeugt, so zeichnet man auf der zur Achse senkrecht stehenden Grundebene den Schlagschatten jener schattenwerfenden Linie und dazu denjenigen eines Parallelkreises, von dem zu vermuten ist, dass die zu suchende Schlagschattengrenze über ihn weggeht. Wo die beiden hiedurch auf der Grundebene erhaltenen Schlagschattenlinien sich schneiden, da liegt der gemeinschaftliche Schlagschatten zweier „Fixpunkte“ beider Linien, das heisst zweier Punkte, von denen der eine der Schlagschatten des andern ist. Ein rückwärts durch den gemeinschaftlichen Schlagschattenpunkt gezogener Lichtstrahl führt also zu einem Schlagschattenpunkt auf dem Parallelkreis und damit zu einem solchen auf der Drehungsfläche.

Die Figur zeigt ein horizontales Sechseck und darunter einen beliebig ausgewählten Parallelkreis der durch ihren punktierten Umriss angedeuteten Drehungsfläche. Die Umrisse der Schlagschatten, die beide Figuren auf die Horizontalebene werfen, schneiden sich in den Punkten x und y . Die rückwärts durch diese Punkte bis zum Parallelkreis gezogenen Lichtstrahlen treffen diesen in S und T ; diese Punkte gehören der Schlagschattengrenze auf der Drehungsfläche an. Sie werden schärfer erhalten, wenn man im Schattenkreis die Radien ox und oy und im Parallelkreis die Radien CS und CT parallel zu jenen zieht.

Figur 62b zeigt ein durchgeführtes Beispiel. Es sind auf der Grundebene gezeichnet die Schlagschatten der sechsseitigen Deckplatte und der Parallelkreise $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Die Schlagschatten der Parallelkreise $2, 3, 4$ sind nach Art. 59 zur Bestimmung je zweier Körperschattengrenzpunkte auf jedem dieser Kreise mitbenutzt ($2k, 3k, 4k$). Schattenkreis 1 berührt den Sechseckschatten in $1s$, also enthält Parallelkreis 1 den obersten Punkt der Schlagschattengrenze $1s$. Die Schnittpunkte der Schlagschattenkreise 4 und 5 mit dem Sechseckschatten fallen innerhalb des Kurvenstücks $2k, 3k, 4k$, das auf der Horizontalebene den Schlagschatten der Fläche begrenzt. Hiedurch ist ausgedrückt, dass die auf den Parallelkreisen 4



Figur 62 b.

und 5 erhaltenen Schlagschattenpunkte keine wirklichen Schattengrenzpunkte sind, sondern schon in die Körperschattenfläche fallen. Diese Punkte gehören zwar der Schnittlinie an, die das sechsseitige (vielmehr achtseitige) von der Deckplatte ausgehende Lichtstrahlenprisma mit der Drehungsfläche bildet; die Schnittlinie ist aber nur soweit Schlagschattengrenze, als sie auf die Lichtfläche des Drehungskörpers zu liegen kommt.

Dieses Verfahren kann zuweilen bei Drehungskörpern, deren Selbstbeschattung nicht von Parallelkreiskanten herrührt, an die Stelle des in Art. 61 beschriebenen oder der allgemeinen Lösung treten; auch wird es in verwickelten Fällen oft willkommene Proben für das Resultat der allgemeinen Lösung liefern; aber allgemeine Brauchbarkeit kann es so wenig beanspruchen, wie die mit ihm

verwandte und kombinierbare Körperschattenbestimmung nach Art. 59.

63. Sätze über den Verlauf der Schattengrenzen auf Drehungsflächen mit vertikaler Achse.

a) Soweit der Umriss einer Drehungsfläche durch Meridiane gebildet ist, beginnen und endigen die Körperschattengrenzkurven im Aufriss an den Berührungspunkten der am Umriss tangierenden Lichtstrahlprojektionen. Die Kurven gehen in diesen Punkten mit Berührung am Umriss von ihrem sichtbaren Teil zum unsichtbaren über; doch ist die Berührung häufig eine solche von sehr kleinem Krümmungshalbmesser, so dass sie sich von einem Schnitt wenig unterscheidet. Die Grundrisse dieser Punkte liegen auf dem horizontalen Durchmesser des Grundplans.

b) Jedem solchen Kurvenpunkt entspricht ein gleich hoch liegender auf dem Aufriss der Achse des Drehungskörpers, da die Grenzkurve im Raum symmetrisch ist zu einer Lichtstrahlenebene, die durch die Achse gelegt wird. Die Grundrisse dieser Punkte liegen auf dem vertikalen Durchmesser des Grundplans und auf denselben Parallelkreisen wie die vorigen, wie überhaupt die ganze Grenzkurve im Grundriss symmetrisch ist zum Durchmesserlichtstrahl.

c) Wo der Umriss der Drehungsfläche eine vertikale Tangente hat, da finden sich die Schattenpunkte auf dem zugehörigen Parallelkreis da, wo die schattenabgrenzenden Mantellinien eines vertikalen Cylinders mit diesem Kreis als Basis liegen würden. Im Grundriss berührt im allgemeinen die Schattengrenzlinie in diesen Punkten deren Parallelkreis und geht, wenn dieser den Umriss bildet, vom sichtbaren Teil zum unsichtbaren über.

d) Die höchsten und tiefsten Punkte der Körperschattengrenze liegen im Grundriss auf einem parallel zum Lichtstrahl gezogenen Durchmesser. Ferner liegen diese Punkte auf denselben Parallelkreisen wie die Berührungspunkte von Tangenten, die im Aufriss unter dem Lichtstrahlenneigungswinkel $\alpha = 35^\circ 15,9'$ (s. Art. 38) an den Umriss der Drehungsfläche gezogen werden. Aus diesen zwei geometrischen Orten ergeben sich die Punkte in beiden Projektionen.

e) Schlagschattengrenzen, die vom Körper selbst geworfen werden, gehen im Grundriss und Aufriss berührend am Umriss vom sichtbaren Teil zum unsichtbaren über. Im Aufriss liegen die auf die Achse fallenden Kurvenpunkte gleichhoch mit den Berührungspunkten am Umriss, da auch die Schlagschattenkurve im Raum symmetrisch ist zur Lichtstrahlenmeridianebene. Aus demselben Grund erscheint der Grundriss der Schlagschattenkurve symmetrisch zum Durchmesserlichtstrahl.

f) Der höchste Punkt einer solchen Selbstbeschattungsgrenze liegt im Grundriss auf dem Durchmesserlichtstrahl. Ferner liegt der Punkt auf demselben Parallelkreis wie der Schnittpunkt, welchen die unter d) genannte Tangente mit dem Umriss der Drehungsfläche bildet.

g) Endpunkte einer Selbstbeschattungsgrenzlinie an deren Anstossen an einer Körperschattengrenzlinie sind meist zugleich Berührungspunkte zwischen der Schlag-

schattengrenze und einem Lichtstrahl, das heisst die Schlagschattengrenze hat an ihrem Endpunkt eine Tangente von 45° Neigung (sowohl im Grundriss als im Aufriss). Die Erscheinung findet sich da, wo die Schlagschattengrenze, als Schnitt des Lichtstrahlencylinders mit der Drehungsfläche aufgefasst und in dieser Eigenschaft fortgesetzt gedacht, über den letzten Lichtstrahl, den sie erreicht, nicht hinausgehen könnte, weil er die äusserste Mantellinie des Lichtstrahlencylinders bildet.

Schatten auf Drehungsflächen mit schiefgerichteter, aber einer Grundebene gleichlaufender Achse. 64.

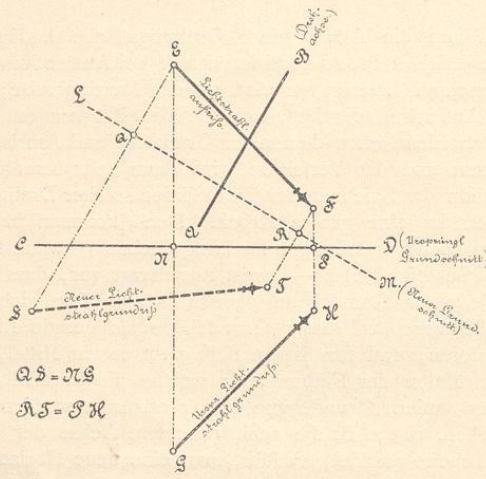
Wenn die Achse einer Drehungsfläche beliebig schiefgerichtet ist, so projizieren sich bei Anwendung der allgemeinen Lösung aus Art. 30 die Parallelkreise, die zum Aufsuchen der Durchschnitte des Körpers mit den Lichtstrahlenebenen dienen, im Grundriss und Aufriss als Ellipsen und das Verfahren wird dann sehr bemühend; ja schon das Zeichnen der Umrisslinien solcher Drehungsflächen ist eine grosse Arbeit. Doch kommen in den technischen Darstellungen Drehungsflächen — wenn überhaupt schiefgerichtet — meist nur derart vor, dass ihre Achse einer Grundebene parallel ist, so dass sich die Parallelkreise auf dieser Grundebene als gerade Linien projizieren, und für diesen Fall giebt es ein Mittel, die Konstruktion der Ellipsen, als welche die Parallelkreise in der andern Grundebene sich projizieren würden, zu umgehen. Ist z. B. die schiefgerichtete Achse der Vertikalebene parallel, so führt man eine neue Horizontalebene ein, die senkrecht zur Drehungsachse steht, auf welcher also die Parallelkreise sich als Kreise projizieren, und bestimmt die Richtungen der beiden Projektionen, welche der Lichtstrahl gegenüber dem neuen Grundschnitt annimmt. Wie sich die Drehungsfläche schattiert im neuen Grundebenenystem mit den neuen Lichtstrahlprojektionen, so muss sie sich auch im ursprünglichen Grundebenenystem mit den ursprünglichen Lichtstrahlenprojektionen schattieren, da ja durch Aenderung der Projektionsebene die Richtung des Lichtstrahls gegenüber der Fläche nicht geändert wird.

Es handelt sich nun um die Bestimmung der Lichtstrahlprojektionen im neuen Grundebenenystem. Die neue Vertikalprojektion des Lichtstrahls bleibt gegenüber der Drehungsachse in derselben Richtung wie zuvor, weil ja die Vertikalebene unveränderlich bleibt; es ändert sich nur der Winkel, den der Grundschnitt mit dieser Projektion bildet. — Zur Bestimmung der neuen Horizontalprojektion dient folgende Betrachtung: Da die ursprüngliche Vertikalebene bleibt, so bleiben auch die ursprünglichen horizontalen Entfernungen aller Punkte eines Lichtstrahls von der Vertikalebene dieselben wie zuvor. Diese Entfernungen erscheinen ebensowohl im neuen Grundriss in ihrer wahren Grösse als im ursprünglichen Grundriss, da sie der neuen Horizontalebene ebensowohl parallel sind wie der ursprünglichen. — Man hat also nur auf einem beliebigen Lichtstrahl des ursprünglichen Grundebenenystems zwei beliebige

Punkte anzunehmen und deren Abstände vom Grundschnitt im neuen Grundriss ebenso gross anzunehmen als sie im ursprünglichen Grundriss waren.

Ist in Figur 64a AB die gegebene Drehungsachse, CD der ursprüngliche Grundschnitt, EF und GH die ursprünglichen Lichtstrahlprojektionen, LM senkrecht zu AB der neue Grundschnitt, so macht man $QS = NG$ und $RT = PH$, wobei ES und FT senkrecht zum neuen Grundschnitt LM stehen. Es ist dann ST die neue Horizontalprojektion, EF die neue Vertikalprojektion des Lichtstrahls.

Das Verfahren ist übertragbar auf Drehungsflächen, die der Horizontalebene parallel sind, nicht aber auf solche,



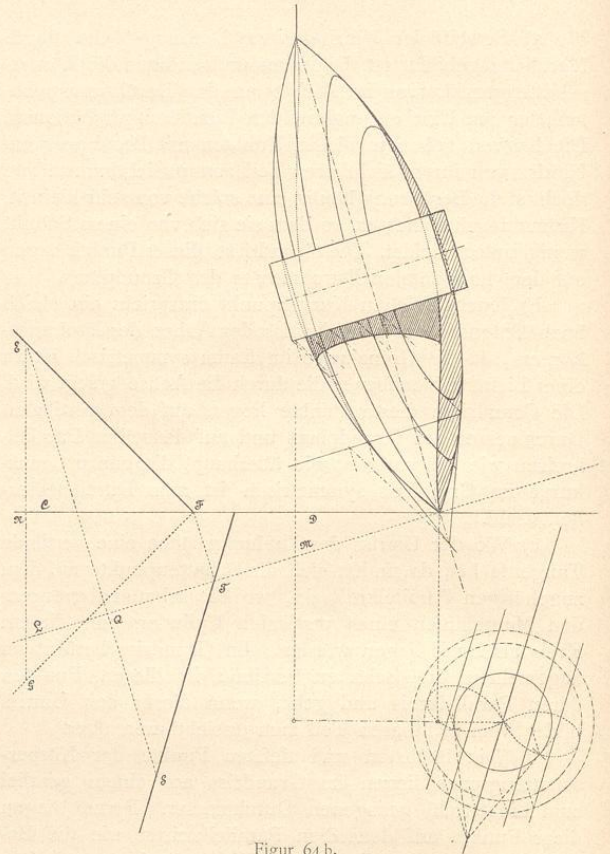
Figur 64a.

deren Achse keiner Grundebene parallel ist, weil bei diesen das gegebene Bild der Drehungsfläche in den neuen Projektionen sich ändern würde.

Der in Figur 64b nur als Aufriss gegebene Drehungskörper mit geneigter Achse parallel zur Vertikalebene (die Achse ist auch im Grundriss gezeichnet) bietet ein durchgeführtes Beispiel.

Durch den Punkt F des Grundchnitts ND ist ein Lichtstrahl gezogen und auf diesem ein beliebiger Punkt mit den Projektionen G und E angenommen. LM senkrecht zur Achse des Drehungskörpers ist der neue Grundschnitt. EQ und FT stehen senkrecht zu LM . QS ist gleich NG aufgetragen. (Da der Lichtstrahl durch den Grundchnitt ND gezogen worden ist, so ist das in Figur 64a vorhandene Mass PH hier gleich Null geworden, also ist auch das frühere Mass RT gleich Null zu machen, das heisst der Endpunkt T der neuen Lichtstrahlprojektion fällt nun in den neuen Grundchnitt LM .) EF und ST sind die zum Grundchnitt LM gehörigen Lichtstrahlprojektionen, mit deren Benützung der Körper schattiert worden ist. Zu diesem Zweck wurde im neuen Grundebenenystem sein Grundriss gezeichnet, in dem die Parallelkreise sich als Kreise projizieren. Die Schattengrenzen sind teils nach dem in Art. 30 beschriebenen allgemeinen Verfahren, teils mit den Berührungskugeln nach Art. 56 bestimmt, wobei nur die veränderte Licht-

strahlrichtung einen Unterschied hereingebracht hat. Auch der Schlagschatten des Körpers auf der Vertikalebene kann mit Hilfe der neuen Lichtstrahlprojektionen erhalten werden. Der auf die ursprüngliche Horizontalebene fallende Teil des Schlagschattens lässt sich, nachdem die



Figur 64b.

Schattengrenzlinie auf der Vertikalebene ganz konstruiert ist, aus dieser mit Hilfe der ursprünglichen Lichtstrahlprojektionen und des ursprünglichen Grundebenenystems ableiten, da ja alle Verbindungslinien der einander entsprechenden Punkte dieser beiden Schattenfiguren Lichtstrahlen sind.

Ein zweites Hilfsmittel zur Körperschattenbestimmung auf schiefergerichteten Drehungsflächen mit Achse parallel zu einer Grundebene bietet die „Normalkugel“. S. Art. 97.

VIII. Schatten auf Kugelflächen.

Die Umklappung oder schräge Seitenansicht 65. als Hilfsmittel, elliptische Projektionen der Schnitkreise zu umgehen.

Bei Anwendung der in Art. 28 erklärten allgemeinen Lösung für die Beschattung gekrümmter Flächen auf die Kugelfläche, sei sie konvex oder konkav, werden die