



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

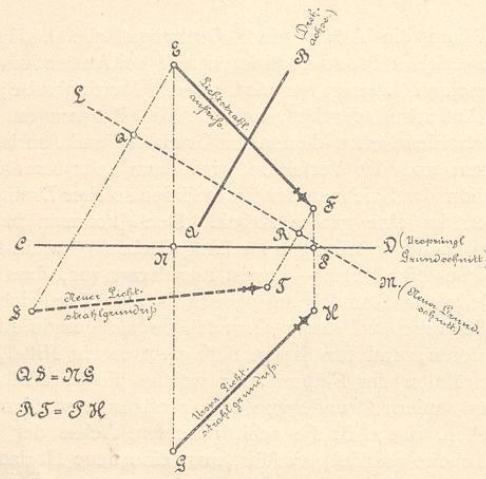
VIII. Schatten auf Kugelflächen.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

Punkte anzunehmen und deren Abstände vom Grundschnitt im neuen Grundriss ebenso gross anzunehmen als sie im ursprünglichen Grundriss waren.

Ist in Figur 64a AB die gegebene Drehungsachse, CD der ursprüngliche Grundschnitt, EF und GH die ursprünglichen Lichtstrahlprojektionen, LM senkrecht zu AB der neue Grundschnitt, so macht man $QS = NG$ und $RT = PH$, wobei ES und FT senkrecht zum neuen Grundschnitt LM stehen. Es ist dann ST die neue Horizontalprojektion, EF die neue Vertikalprojektion des Lichtstrahls.

Das Verfahren ist übertragbar auf Drehungsflächen, die der Horizontalebene parallel sind, nicht aber auf solche,



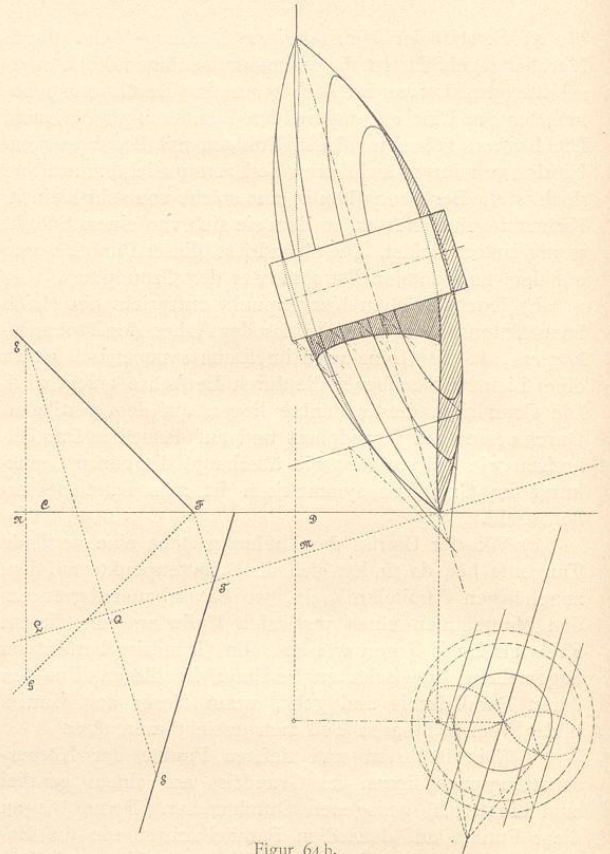
Figur 64a.

deren Achse keiner Grundebene parallel ist, weil bei diesen das gegebene Bild der Drehungsfläche in den neuen Projektionen sich ändern würde.

Der in Figur 64b nur als Aufriss gegebene Drehungskörper mit geneigter Achse parallel zur Vertikalebene (die Achse ist auch im Grundriss gezeichnet) bietet ein durchgeführtes Beispiel.

Durch den Punkt F des Grundchnitts ND ist ein Lichtstrahl gezogen und auf diesem ein beliebiger Punkt mit den Projektionen G und E angenommen. LM senkrecht zur Achse des Drehungskörpers ist der neue Grundschnitt. EQ und FT stehen senkrecht zu LM . QS ist gleich NG aufgetragen. (Da der Lichtstrahl durch den Grundchnitt ND gezogen worden ist, so ist das in Figur 64a vorhandene Mass PH hier gleich Null geworden, also ist auch das frühere Mass RT gleich Null zu machen, das heisst der Endpunkt T der neuen Lichtstrahlprojektion fällt nun in den neuen Grundchnitt LM .) EF und ST sind die zum Grundchnitt LM gehörigen Lichtstrahlprojektionen, mit deren Benützung der Körper schattiert worden ist. Zu diesem Zweck wurde im neuen Grundebenenystem sein Grundriss gezeichnet, in dem die Parallelkreise sich als Kreise projizieren. Die Schattengrenzen sind teils nach dem in Art. 30 beschriebenen allgemeinen Verfahren, teils mit den Berührungskugeln nach Art. 56 bestimmt, wobei nur die veränderte Licht-

strahlrichtung einen Unterschied hereingebracht hat. Auch der Schlagschatten des Körpers auf der Vertikalebene kann mit Hilfe der neuen Lichtstrahlprojektionen erhalten werden. Der auf die ursprüngliche Horizontalebene fallende Teil des Schlagschattens lässt sich, nachdem die



Figur 64b.

Schattengrenzlinie auf der Vertikalebene ganz konstruiert ist, aus dieser mit Hilfe der ursprünglichen Lichtstrahlprojektionen und des ursprünglichen Grundebenenystems ableiten, da ja alle Verbindungslinien der einander entsprechenden Punkte dieser beiden Schattenfiguren Lichtstrahlen sind.

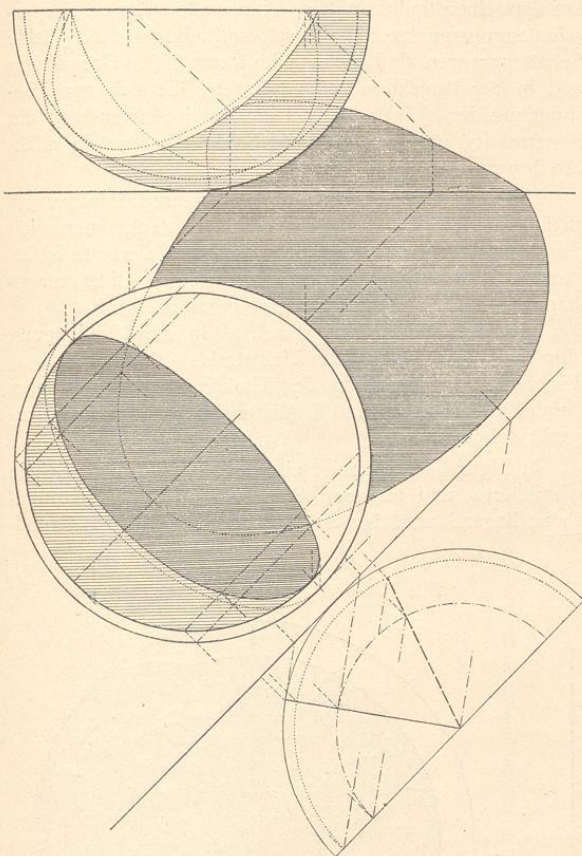
Ein zweites Hilfsmittel zur Körperschattenbestimmung auf schiefergerichteten Drehungsflächen mit Achse parallel zu einer Grundebene bietet die „Normalkugel“. S. Art. 97.

VIII. Schatten auf Kugelflächen.

Die Umklappung oder schräge Seitenansicht 65. als Hilfsmittel, elliptische Projektionen der Schnittkreise zu umgehen.

Bei Anwendung der in Art. 28 erklärten allgemeinen Lösung für die Beschattung gekrümmter Flächen auf die Kugelfläche, sei sie konvex oder konkav, werden die

Durchschnitte der vertikalen Lichtstrahlenebenen mit der Kugel kreisförmig; denn alle ebenen Durchschnitte der Kugel sind Kreise. Um nun das Konstruieren der Ellipsen zu umgehen, als welche diese Kreise in der Vertikalprojektion erscheinen würden, kann man die Lichtstrahlenebenen in die horizontale Grundebene umklappen und in dieser Umklappung, in welcher die Kreise sich als Kreise darstellen, die Schnittpunkte und Berührungspunkte der Lichtstrahlen aufsuchen. Dabei ist wie in Art. 38 zu beachten, dass die Neigung des Lichtstrahls



Figur 65 c.

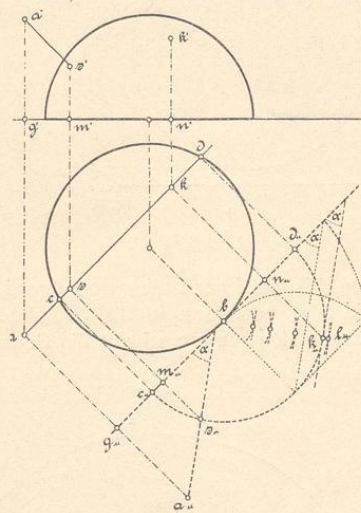
in seiner eigenen (umzuklappenden) vertikalen Ebene nicht 45° beträgt, sondern flacher ist, nämlich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen vertikale Kathete gleich einem beliebigen Mass a und dessen horizontale Kathete gleich $a\sqrt{2}$, das heisst gleich der Diagonale eines Quadrats über der Seite a (der Winkel ist $\alpha = 35^\circ 15,9'$). Damit die umgeklappten Kreise nicht auf die Kugelprojektion fallen und die Figur verwirren, schiebt man sie vor dem Umklappen parallel in der Richtung des Umklappens fort, alle in dieselbe Ebene, so dass die Umklappung auch als eine vollständige schräge Seitenansicht aufgefasst werden kann.

Anstatt der vertikalen Lichtstrahlenebenen, welche die Schatten zuerst im Grundriss liefern, benützt man,

wenn man die Grundriss Schatten nicht braucht, besser die vertikalprojizierenden Ebenen der Lichtstrahlen; denn die Kugel ist ja auch eine Drehungsfläche mit Achse senkrecht zur Vertikalebene. Die Durchschnitte dieser Ebenen mit der Kugel werden wieder Kreise und mit Einschluss der Lichtstrahlen wieder in die Vertikalebene umgeklappt. Der Winkel des Lichtstrahls mit der Umklappungsbasis oder Lichtstrahlenprojektion ist wieder derselbe wie bei Umklappung im Grundriss, nämlich $\alpha = 35^\circ 15,9'$.

Beispiel für die Umklappung in die Grundrissebene: Auf einer Halbkugel, deren Basis in der Horizontalebene liegt, ist der Schlagschatten eines äusseren Punktes zu suchen und die Körperschattengrenze zu bestimmen (Figur 65 a).

Man zieht durch den schattenwerfenden Punkt aa' einen Lichtstrahl; seine vertikale Ebene denkt man sich



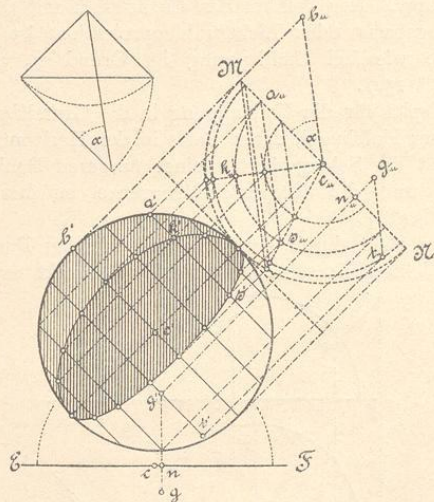
Figur 65 a.

bis b parallel verschoben und dann in die Horizontalebene umgeklappt. In der Umklappung rückt c nach c_u , d nach d_u , a nach a_u , indem $g_u a_u = g' a'$ gemacht wird. Der Schnitt mit der Kugel erscheint in der Umklappung als Halbkreis über $c_u d_u$, der Lichtstrahl als eine Linie durch a_u , die mit der Umklappungsbasis $g_u d_u$ den Winkel α einschliesst (seine Konstruktion ist aus der Figur ersichtlich). Der Schnittpunkt dieses umgeklappten Lichtstrahls mit dem Halbkreis ist der Schattenpunkt in der Umklappung s_u ; sein Zurückklappen in den Grundriss giebt dort den Schattenpunkt s ; das Hinaufloten von s in den Aufriss mit $m' s' = m_u s_u$ liefert den Schattenpunkt s' im Aufriss.

Ein zweiter Lichtstrahl, in der Umklappung als Tangente an den Halbkreis gezogen, ergibt in seinem Berührungspunkt k_u einen Körperschattengrenzpunkt in der Umklappung; er ist zurückzuklappen nach k und dieser Grundriss des Punktes hinaufzuloten in den Aufriss nach k' mit $n' k' = n_u k_u$. Durch weitere Schnittebenen parallel zu $a d$ erhält man beliebig viele weitere Körperschattengrenzpunkte. In der Umklappungsfigur erscheint die Grenzlinie als ein Radius $b l_u$.

Beispiel für die Umklappung in die Vertikalebene. Eine Halbkugelfläche sei vertieft in der Vertikalebene; es ist ihre Selbstbeschattung zu bestimmen, und zwar nur im Aufriss (Figur 65 b).

Man denkt sich die vertikalprojizierende Ebene eines Lichtstrahls, der durch den Kugelmittelpunkt geht, parallel



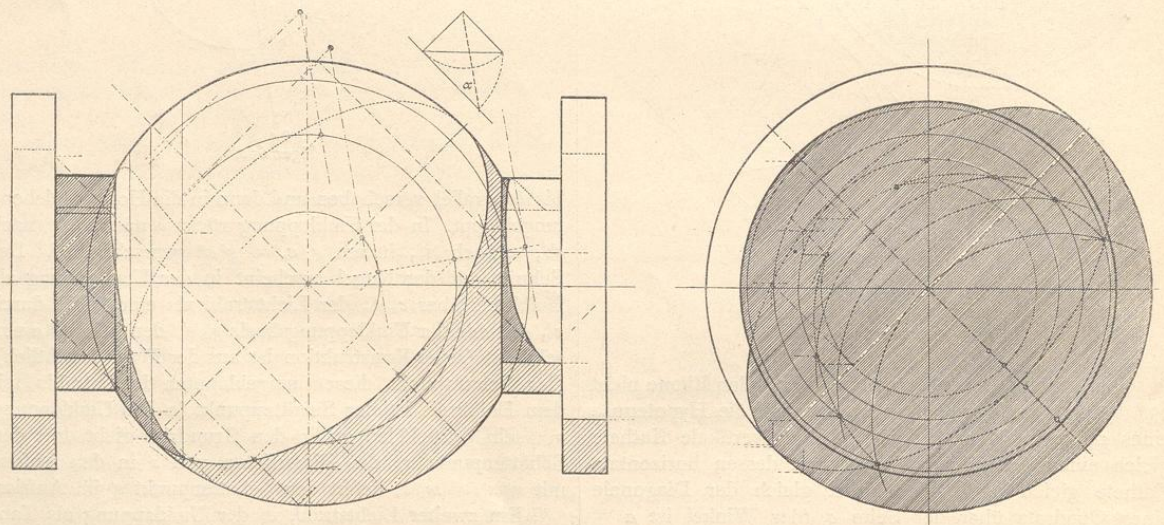
Figur 65 b.

fortgeschoben bis zu irgend einer genügend weit entfernten Linie MN und dann in die Grundebene umgeklappt. In der Umklappung erscheint die Schnittlinie der

Schnittlinie der Ebene mit der Kugel erscheint als konzentrischer Kreis um c_u der Lichtstrahl als eine Linie durch a_u parallel zu $b_u c_u$; er schneidet den Schnittkreis zum zweitenmal im Punkt s_u , welcher den Schlagschatten von a' in der Umklappung darstellt und zurückgeklappt den Aufrisschattenpunkt s' ergibt. Eine Tangente an den Schnittkreis parallel zu $b_u c_u$ liefert als berührender Lichtstrahl in der Umklappung den Körperschattengrenzpunkt k_u und dessen Zurückklappen den Aufrisspunkt k' . Alle weiteren Schlagschattenpunkte liegen in der Umklappung auf demselben Radius mit s_u , ebenso alle weiteren Körperschattengrenzpunkte auf demselben Radius mit k_u . Beide Schattengrenzen sind hienach im Raum halbe Grosskreise und in der Projektion halbe Ellipsen, die sich nach Bestimmung der kleinen Halbachsen durch Anwendung der Konstruktion auf den einzigen Randpunkt b' rasch zeichnen lassen.

Um den Schlagschatten eines äusseren Punktes gg' zu finden (EF ist der Querschnitt), denkt man sich diesen Punkt ebenfalls auf die vertikalprojizierende Lichtstrahlenebene MN projiziert und mit derselben umgeklappt. Die Umklappung g_u wird erhalten durch $n_u g_u = n g$. Ist der Parallelkreis durch g' in die Umklappung übertragen, so liefert der Lichtstrahl $g_u t_u$ parallel $b_u c_u$ den Schattenpunkt t_u in der Umklappung, und dieser durch Zurückklappen und Zurückprojizieren den Schattenpunkt t' im Aufriss.

In Figur 65 c erscheint eine halbkugelförmige Schale mit inneren und äusseren Schatten auf der Horizontalebene liegend samt dem Schlagschatten auf beiden Grund-



Figur 65 d.

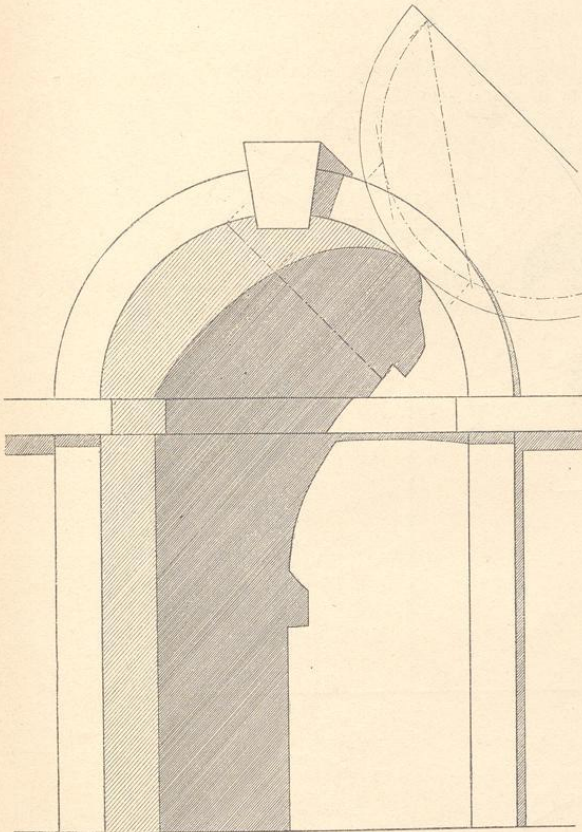
Ebene mit der Kugel als Halbkreis und der Lichtstrahl $b_u c_u$ unter dem Winkel α gegen MN geneigt.

Durch einen beliebigen Randpunkt a' zieht man einen Lichtstrahl und klappt dessen ebenfalls verschoben gedachte vertikalprojizierende Ebene um MN um. Die

ebenen. Alle Konstruktionsmittel sind durch das Vorangehende erklärt.

In Figur 65 d beschattet ein aussenliegender, in der Seitenprojektion gegebener Kreis die Kugelfläche, und deren Körperschattengrenze erzeugt eine Schlagschatten-

grenze auf einer Cylinderfläche. Die vertikalprojizierenden Lichtstrahlenschnittebenen sind auf die ihnen parallele Grosskreisebene projiziert und mit dieser umgeklappt; nur die Uebertragung der schattenwerfenden Kreispunkte in die Umklappung erfordert einige Bemühung des räumlichen Anschauungsvermögens. In die Seitenprojektion lassen sich die Schattenpunkte mit Hilfe von Parallelkreisen übertragen, deren Ebenen normal zur Längsachse des Körpers stehen; zeichnet man auch die benützten Lichtstrahlen in der Seitenprojektion, so erhält man Proben. Eine zweite Konstruktion der Schlagschatten-



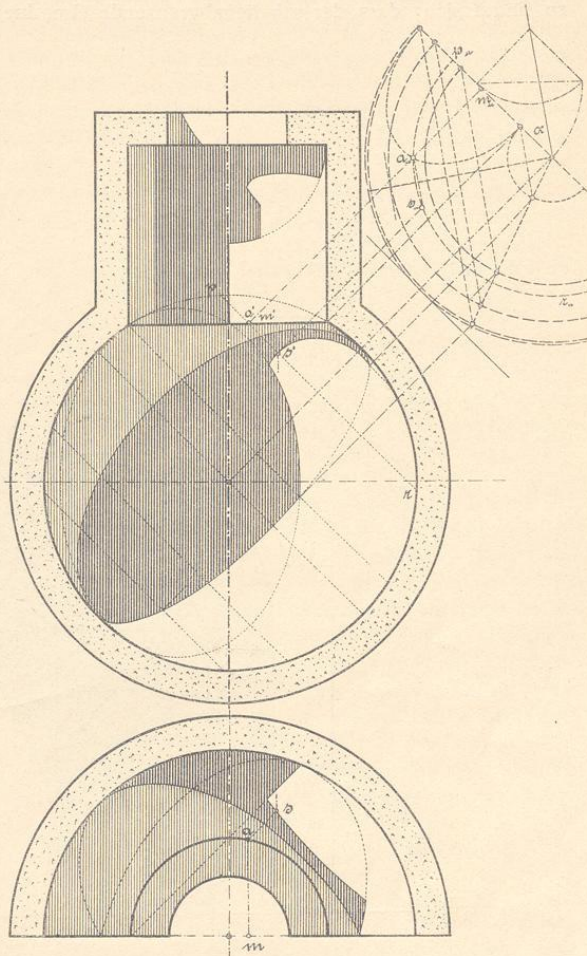
Figur 65e.

grenze, bei welcher die Schattenpunkte zuerst in der Seitenprojektion auftreten, ist in Art. 67 erwähnt; die Hilfslinien dafür sind ebenfalls gezeichnet.

Die Figuren 65e, 65f, 65g bieten die Beschattung der Hohlkugelfläche teils durch ihre eigenen Ränder, teils durch aussenliegende Körperschattengrenzen, und zwar immer in Verbindung mit leicht erhältlichen Schatten auf vertikalen Cylinderflächen. In den zwei letzten Beispielen ist die Uebertragung der schattenwerfenden Punkte der oberen horizontalen Randhalbkreise in die Umklappung hervorzuheben. Randpunkt a' in Figur 65f liesse sich zwar durch Zeichnen des ohnehin notwendigen Schnittkreises $p'r$ in der Umklappung $p_u r_u$ und durch die zu-

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

gehörige Projektionslinie nach a_u übertragen; zur Vermeidung schiefwinkliger Durchschnitte wird aber besser der Punkt a_u durch $m_u a_u = m a$ im Grundriss erhalten.



Figur 65f.

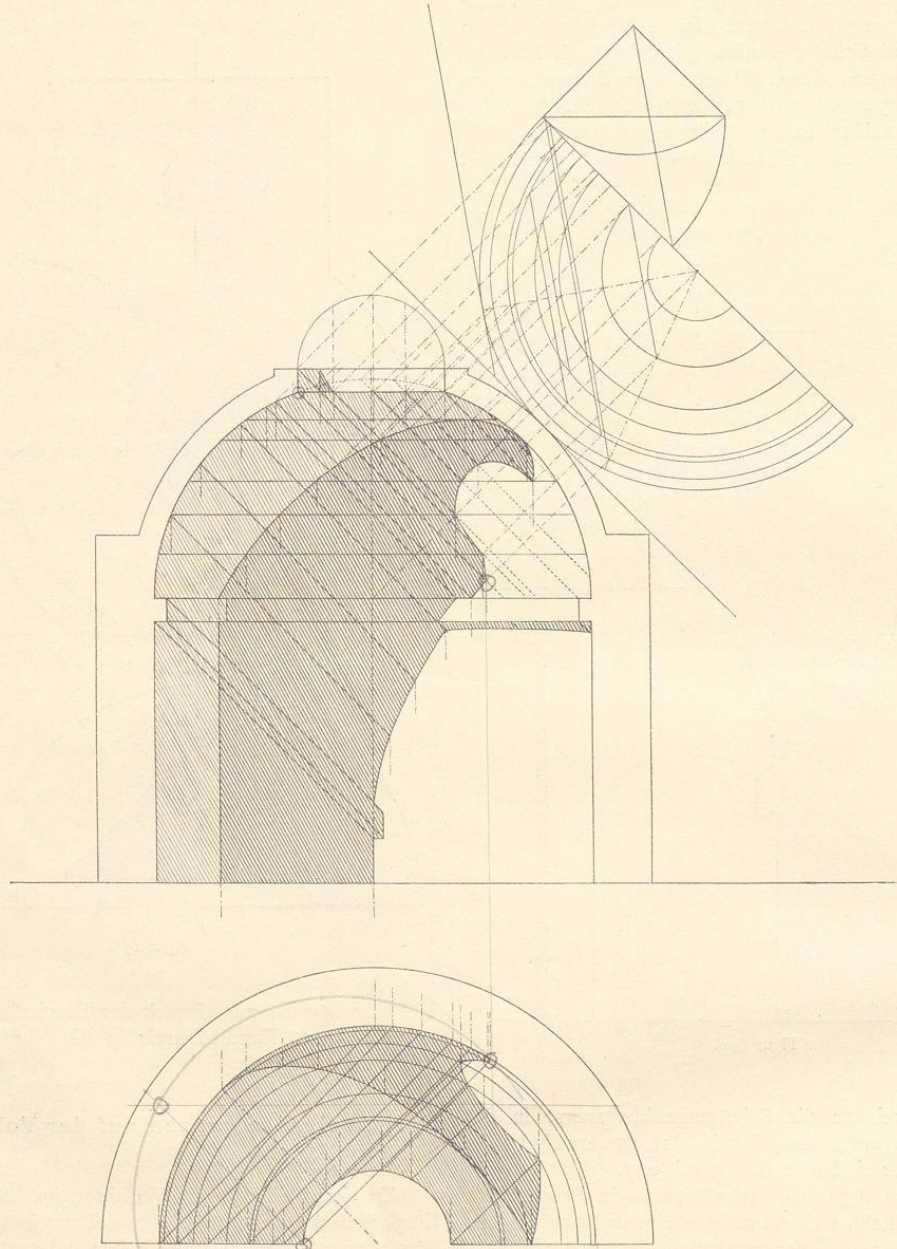
In Figur 65g ist zum Zweck der Beschaffung der Masse $m a$ der obere Randhalbkreis in die Vertikalebene umgeklappt.

Körperschattengrenzen auf der Vollkugel und 66. Hohlkugel.

Zu einem einfacheren Verfahren im Aufzeichnen der Körperschattengrenzen auf der Vollkugel oder Hohlkugel führt folgende Ueberlegung: Indem der berührende Lichtstrahl an der Kugel gleitet, beschreibt er eine Cylinderfläche mit kreisförmigem Querschnitt, welche die Kugel nach einem Grosskreis berührt, dessen Ebene senkrecht zur Lichtrichtung steht. Projiziert man die Kugel und diesen Grosskreis auf eine durch den Lichtstrahl gelegte vertikale Ebene, so erscheint der Grosskreis als Durchmesser des Kugelbildes senkrecht zum Lichtstrahl und

dieser bildet mit der Horizontalen den bekannten Winkel α (Figur 66a). Klappt man eine solche Ebene HR in die Horizontalebene um und wieder zurück (Figur 66b), so findet sich, dass der schattenabgrenzende Grosskreis

rechtwinkligen Dreieck, das zum Aufzeichnen des Winkels α dient, kann das Verhältnis von B zu A unmittelbar abgelesen werden als Verhältnis der kleineren Kathete zur Hypotenuse; doch wird die Rechnung mit der Ver-



Figur 65 g.

im Grundriss der Kugel eine Ellipse ist mit der grossen Achse $2A$ als Durchmesser des Kugelbildes senkrecht zur Lichtstrahlprojektion, und der kleinen Achse in der Richtung der Lichtstrahlprojektion $2B = 2A \sin \alpha$. Die Rechnung giebt $B = 0,5773 A$ oder rund $0,58 A$. An dem

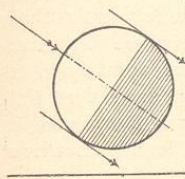
Verhältnisszahl $0,58$ ebenso rasch zum Ziel führen. Im folgenden sind für den Fall, dass die ganze Ellipse mit Hilfe des Massstabs aufgetragen werden will, einige Ordinaten derselben senkrecht zur grossen Achse berechnet. Teilt man die grosse Halbachse in vier gleiche Teile und hal-

biert noch den äussersten Teil, so sind die Ordinaten y in den Teilpunkten die folgenden, wenn die Länge der grossen Halbachse oder der Kugelhalbmesser = 1 gesetzt wird.

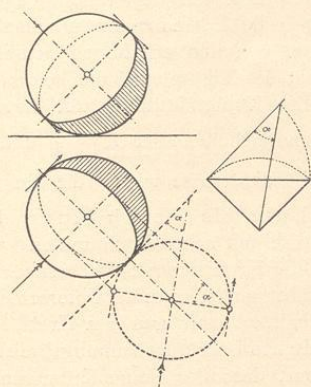
Im ersten Punkt $y_0 = 0,577$ rund 0,58 (kleine Halbachse);
 „ zweiten „ $y_1 = 0,559$ „ 0,56
 „ dritten „ $y_2 = 0,500$ „ 0,50
 „ vierten „ $y_3 = 0,382$ „ 0,38
 „ fünften „ $y_4 = 0,280$ „ 0,28
 „ Endpunkt $y_5 = 0$ „ 0.

Was für die Grundrissellipse des Kugelkörperschattens in Beziehung auf Richtung und Grösse gesagt ist, gilt völlig unverändert auch für die Aufrissellipse, wofür nur die Vertikalprojektion des Lichtstrahls an die Stelle seiner Horizontalprojektion gesetzt wird. Die Aufrissellipse ist kongruent der Grundrissellipse, und ihre grosse Achse steht ebenfalls senkrecht zur Lichtstrahlprojektion.

Zum raschen Aufzeichnen der Ellipsen bei Darstellungen in kleinerem Massstab genügt oft schon die Angabe der vier Krümmungskreise in den



Figur 66a.



Figur 66b.

Scheiteln, wobei die Radien nach der unten in Art. 68f angegebenen Konstruktion zu bestimmen sind und die zwischenliegenden Teile des Ellipsenumfangs nach Schätzung eingefügt werden.

67. Behandlung der Kugel als Drehungsfläche.

In manchen Fällen ist es zweckmässig, die Kugel- fläche als Drehungsfläche mit Achse senkrecht zu einer Grundebene aufzufassen und von der Eigenschaft ihrer zum Lichtstrahl parallelen Schnitte als Kreislinien keinen Gebrauch zu machen. Dies gilt besonders dann, wenn die in Art. 61 für Drehungsflächen beschriebene Lösung mit Parallelkreisschnitten und den kongruenten Schlag- schatten auf deren Ebenen Anwendung finden kann. So liesse sich z. B. auf dem in 65d gezeichneten Beispiel, ferner in dem als Höhenschnitt gezeichneten, oben kreis-

förmig offenen Kuppelgewölbe mit kugelförmiger Leibung in 65g die Selbstbeschnittung mit solchen Parallelkreisschnitten bestimmen. Auch die Betrachtung der Parallelkreisschnitte der Kugel als niedriger Kegelzonen, wie bei den Drehungsflächen nach Art. 56, kann in manchen Fällen rascher zum Ziel führen als die Umklappung von Schnittebenen parallel zum Lichtstrahl, indem sie mit der ebengenannten Schlagschattenbestimmung verbunden die Körperschattengrenze liefert.

Oft verwertbare Hilfskonstruktionen für die 68. Ellipse und ihre Tangenten.

Da die Ellipse sowohl als Schattengrenzlinie auf Kugel- flächen, Cylinderflächen, Kegelflächen, wie auch als Kante und Hilfslinie bei den Schattenkonstruktionen auf diesen und anderen Körpern samt ihren Tangenten sehr häufig zu zeichnen ist, so sind im folgenden einige oft verwertbare Hilfskonstruktionen für die Linie selbst, wie für die scharfe Bestimmung von Tangenten und Berührungspunkten eingeschaltet. In der letzten Beziehung sind auch andere Kurven berücksichtigt.

a) Ellipsenkonstruktion; gegeben beide Achsen. Man beschreibt um den Schnittpunkt beider Achsen zwei Kreise mit den Halbachsen als Radien. Man zieht eine Anzahl beliebiger gemeinschaftlicher Radien beider Kreise. Für jeden solchen Halbmesser zieht man durch seinen Endpunkt auf dem grösseren Kreis eine Parallele zur kleinen Achse und durch seinen Punkt auf dem kleineren Kreis eine Parallele zur grossen Achse. Der Schnittpunkt je zweier zu demselben Halbmesser gehöriger Parallelen ist ein Ellipsenpunkt. — Da sich bei dieser Konstruktion alle zu benützenden Punkte aus einem rechtwinkligen Schnitt zweier Linien ergeben, so liefert sie die Ellipsenpunkte mit grosser Sicherheit.

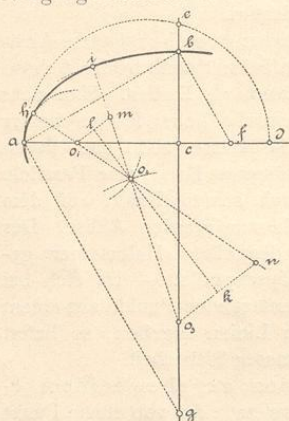
b) Ellipsenkonstruktion; gegeben beide Achsen. Man trägt auf einem Papierstreifen von einem Punkt p aus die grosse Halbachse pa und in derselben Richtung die kleine Halbachse pb auf, so dass in dem Stück ab die Differenz beider Halbachsen erscheint. Man legt nun in verschiedenen Richtungen nacheinander den Papierstreifen so an, dass der Punkt a auf eine kleine Halbachse, der Punkt b auf eine grosse fällt. In jeder solchen Lage giebt der Punkt p einen Ellipsenpunkt an. Diese Konstruktion liefert die Ellipsenpunkte zwar rascher, aber weit weniger zuverlässig als die erste, letzteres besonders bei geringem Unterschied beider Halbachsen. Immerhin ist sie zum praktischen Schattenkonstruieren meist ausreichend, wenn nicht andere Resultate aus der Ellipse abzuleiten sind.

c) Ellipsenkonstruktion; gegeben beide Achsen. Man durchschneidet die grosse Achse von den Endpunkten der kleinen Achse aus mit Kreisbögen, deren Halbmesser gleich der grossen Halbachse ist. Die zwei Schnittpunkte sind die Brennpunkte der Ellipse. Man beschreibt nun aus dem einen Brennpunkt einen Kreisbogen mit einem beliebigen Bruchteil der grossen Achse, aus dem andern einen Kreisbogen mit dem Rest der grossen Achse; beide Kreisbögen schneiden sich in einem Ellipsen-

punkt. Die Konstruktion steht an Zeitverbrauch und Genauigkeit der ersten nach.

d) Ellipsenkonstruktion; gegeben zwei verwandte (konjugierte) Durchmesser. Diese müssen sich halbieren; ihr Schnittpunkt wird der Mittelpunkt der Ellipse. Man fällt von einem Endpunkt des kleineren Durchmessers ein Lot auf den grösseren und trägt auf diesem Lot von demselben Endpunkt aus nach beiden Richtungen die Hälfte des grösseren Durchmessers auf. Die Radien vom Mittelpunkt nach den beiden hiedurch erhaltenen Punkten geben die Summe, beziehungsweise die Differenz beider Halbachsen der Ellipse. Da $(a+b) - (a-b) = 2b$, so ist der Unterschied beider Radien gleich dem Doppelten der kleinen Halbachse; die Länge der grossen ergibt sich dann leicht aus dem grösseren Radius als der Summe beider. Die Richtung der grossen Halbachse ist dargestellt durch die Halbierungslinie des Winkels zwischen jenen beiden Radien.

e) Bestimmung der Achsen und Ergänzung einer Ellipse, von welcher nur ein Teil des Umfangs gefunden ist. Man zieht zwei oder drei Gruppen paralleler Sehnen des gegebenen Bogenstücks,



Figur 68.

gegebenen Bogen mit einem beliebigen Kreis, der zwei Schnittpunkte liefert, halbiert den Bogen zwischen beiden Schnittpunkten und hat im Radius nach dem Halbierungspunkt die Richtung einer Achse; zugleich ergibt sich die Grösse dieser Achse. Man beschreibt über ihr einen Kreis, zieht eine Anzahl von Ordinaten der Ellipse und dieses Kreises senkrecht zu der Achse und vergrössert oder verkleinert dann diejenigen Kreisordinaten, die noch nicht auf Ellipsenpunkte treffen, in demselben Verhältnis, das die vorhandenen Ellipsenordinaten gegenüber den übrigen Kreisordinaten darbieten. Die Konstruktion ist selbstverständlich um so unsicherer, je kleiner das gegebene Bogenstück gegenüber dem ganzen Umfang der Ellipse, und kann bei stark schiefwinkligen Durchschnitten zwischen Bogen und Sehnen stark verschiedene Ellipsen für dasselbe Bogenstück liefern.

Wenn jener Kreis um den Mittelpunkt den gegebenen Bogen nur in einem Punkt schneidet, das heisst, wenn der Bogen keinen Scheitel enthält, so versagt die Konstruktion; in diesem Fall ist aber ohnehin das Resultat

so unsicher, dass auch seine Erlangung auf anderem Weg nur geringen praktischen Wert hat. Ein solcher anderer Weg wäre der folgende:

Man zieht, nachdem der Mittelpunkt gefunden ist, eine Tangente an den Bogen und eine Gerade durch den Mittelpunkt parallel zur längsten Sehne und beschreibt mit dem Abstand der Tangente vom Mittelpunkt einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf jener Geraden liegt. Bis zu diesem Kreis verlängert man die längste Sehne und zieht dann in ihm und in der werdenden Ellipse noch weitere parallele Sehnen. Wie sich die längste Sehne des gegebenen Ellipsenstücks verhält zu der ihr im Kreis entsprechenden Sehne, so muss sich auch jede andere parallele Sehne der Ellipse verhalten zu der ihr im Kreis entsprechenden. Daraus lässt sich die ganze Ellipse erhalten, indem man die für die halben Ellipsensehnen erhaltenen Masse von dem Durchmesser nach dem Halbierungspunkt der längsten Sehne nur rechts und links aufträgt. Zur Bestimmung der Achsen kann nun wieder jener Kreis um den Mittelpunkt benützt werden.

f) Bestimmung der Krümmungshalbmesser in den Scheiteln der Ellipse; gegeben beide Achsen. Man verbindet einen Endpunkt der grossen Achse mit einem Endpunkt der kleinen und errichtet in den Endpunkten Lote auf der Verbindungslinie. Diese Lote schneiden beide Achsen zum zweitenmal. Die Stücke auf den Achsen von den erhaltenen Schnittpunkten bis zum Mittelpunkt der Ellipse sind die beiden Krümmungshalbmesser. Die Konstruktion beruht darauf, dass der grössere Krümmungshalbmesser $R = \frac{A^2}{B}$ und der kleinere $r = \frac{B^2}{A}$, wenn A die grosse und B die kleine Halbachse.

g) Korblinie als Nachbildung der Ellipse durch Kreisstücke mit acht Mittelpunkten, wobei in den vier Scheiteln die Krümmungskreise erscheinen.

Um möglichst gleich verteilte Unterschiede der Krümmungen zu erhalten, kann man den Kreisbogen, der den Uebergang zwischen beiden Krümmungskreisen bilden soll, so gross wählen, dass der kleine Krümmungshalbmesser r sich zum Halbmesser des Zwischenkreises z verhält wie dieser zum grossen Krümmungshalbmesser R . Sind mit $ac = A$ und $cb = B$ (Figur 68) die beiden Halbachsen der nachzubildenden Ellipse gegeben, so ist nach f) $R = \frac{A^2}{B}$ und $r = \frac{B^2}{A}$, woraus $z = \sqrt{Rr} = \sqrt{AB}$. Wird also $cd = cb$ aufgetragen, und über ad ein Kreis beschrieben, so ist $ce = z$. Die beiden Krümmungshalbmesser werden erhalten durch bf und ag senkrecht zu ab , worauf $r = cf = ao_1$ und $R = cg = bo_3$. Man beschreibt nun aus o_1 einen Kreis mit $z - r$ und aus o_3 einen Kreis mit $R - z$; der Schnittpunkt beider Kreise o_2 ist der Mittelpunkt des Uebergangskreises und die Uebergangspunkte zwischen den drei Kreisbögen h und i werden erhalten durch Ziehen von o_2o_1 und o_3o_2 .

Anstatt den Zwischenradius z anzunehmen, kann man auch nach Schätzung aus freier Hand einen Bogen zwischen beide Krümmungskreise einfügen und dieser Schätzung entsprechend entweder auf dem kleineren Krümmungskreis oder auf dem grösseren den Punkt festsetzen, in welchem der Uebergangskreis anschliessen soll. Es sei

hiefür Punkt h angenommen. Man zieht $h o_1$ mit Verlängerung und macht $hn = R$. Die auf der Mitte von $o_3 n$ in k errichtete Senkrechte zu $o_3 n$ giebt als Durchschnitt mit hn den Punkt o_2 als Mittelpunkt des Uebergangskreises. — Wird Punkt i auf dem grösseren Krümmungskreis als Uebergangspunkt angenommen, so zieht man $i o_3$ und macht darauf $im = r$. Das Mittellot $l o_2$ von $m o_1$ liefert als Schnitt mit $i o_3$ den Mittelpunkt des Uebergangskreises o_2 . Für die praktische Verwertung der Konstruktion empfiehlt sich die Annahme des Uebergangspunktes auf dem kleinen Krümmungskreis am meisten. Die Annäherung an die Ellipse kann hiebei rascher erreicht werden als mit der Wahl eines Zwischenradius z und ist bei allen Konstruktionen um so vollständiger, je kleiner der Unterschied beider Halbachsen ist.

h) Eine Tangente an die Ellipse aus einem äusseren Punkt oder parallel zu einer andern Geraden ist durch Anlegen des Lineals an der Kurve mit Sicherheit genau zu ziehen; damit ist aber der Berührungspunkt noch nicht bestimmt. Man erhält ihn, wenn die Achsen bekannt sind, durch Betrachtung der Ellipse als der aus dem Kreis durch proportionale Verkürzung aller Ordinaten abgeleiteten Kurve. Die Tangenten in den Endpunkten aufeinanderfallender Ordinaten des Kreises und der aus ihm abgeleiteten Ellipse schneiden sich auf der Abscissenachse, das heisst auf der grossen Achse der Ellipse. Man beschreibt also über der grossen Achse der Ellipse einen Kreis, zieht aus dem Schnittpunkt der Ellipsentangente mit der grossen Achse eine Tangente an den Kreis, bestimmt deren Berührungspunkt und erhält dann den Berührungspunkt der Ellipsentangente als Schnitt mit der durch den Kreisberührungspunkt gezogenen Ordinate. Liegt der Berührungspunkt der grossen Achse näher, so wird besser der Kreis über der kleinen Achse mit dem Schnittpunkt der Tangente und der kleinen Achse benützt.

i) Ist die Tangente in einem gegebenen Punkt der Ellipse zu ziehen, so wird dieselbe Thatsache benützt, indem zuerst die Ordinate durch den Punkt für Ellipse und Kreis, dann die Kreistangente gezeichnet und aus ihrem Schnittpunkt mit der grossen Achse nach dem gegebenen Berührungspunkt gezogen wird. Dasselbe Problem lässt sich auch mit Hilfe der Brennpunkte lösen; die Tangente an der Ellipse steht senkrecht auf der Halbierungslinie des Winkels zwischen den beiden nach dem Berührungspunkt gezogenen Brennstrahlen.

k) Sind die Achsen der Ellipsen nicht bekannt und es ist der Berührungspunkt einer vorhandenen Tangente zu bestimmen, so zieht man zwei zur Tangente parallele Sehnen in thunlichst grosser Entfernung voneinander und mit möglichst sicherem Schnitt mit der Peripherie. Die gerade Verbindungslinie der Halbierungspunkte beider Sehnen ist der Durchmesser nach dem Berührungspunkt.

Die Konstruktion ist die Anwendung der folgenden, für alle Kurven möglichen, auf den besonderen Fall der Ellipse. Man zieht eine Anzahl zur Tangente paralleler Sehnen und halbiert sie; die Kurve, welche die Halbierungspunkte verbindet, führt zum Berührungspunkt. Bei den Linien zweiter Ordnung wird diese Kurve zur Geraden.

l) Ist in einem Punkt eines Ellipsenstücks mit unbekannten Achsen eine Tangente zu ziehen, so kann man zur thunlichst sicheren Bestimmung ihrer Richtung folgende, auch für alle andern Kurven brauchbare Konstruktion benützen, durch welche man einen zweiten Punkt der Tangente erhält. Man beschreibt um den Berührungspunkt einen Kreis, zieht verschiedene Radien, welche auch die Kurve schneiden und trägt von den Kreispunkten einer Seite aus auf den Radien die Sehnen der Kurve nach aussen und innen auf. Man erhält dann zwei Kurven, welche sich auf dem Kreis schneiden; der Schnittpunkt ist ein Tangentenpunkt. Nimmt man die Konstruktion zu beiden Seiten des Berührungspunktes vor, so erhält man zwei auf einem Durchmesser liegende Tangentenpunkte. An die Stelle des Kreises kann auch eine Gerade oder beliebig gezogene Kurve treten, welche von den Verlängerungen der zu beiden Seiten des Berührungspunktes liegenden Sehnen der gegebenen Kurve geschnitten wird.

IX. Schatten auf minder häufig verwerteten Flächen.

Die Flächen zweiter Ordnung.

69.

Soweit diese Flächen nicht zu den Drehungsflächen gehören und als solche schattiert werden, sind es die folgenden: das dreiachsige Ellipsoid, das elliptische Paraboloid, das zweimantelige elliptische Hyperboloid, das einmantelige elliptische Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid.

a) Ein dreiachsiges Ellipsoid, das heisst ein Ellipsoid mit drei verschieden grossen Achsen, entsteht, wenn von zwei Ellipsen mit gemeinschaftlicher Achse, deren Ebenen senkrecht zu einander stehen, die eine derart parallel fortrückt, dass sie mit ihren Achsen immer gleichgerichtet und sich immer geometrisch ähnlich bleibt, indem sie die andere in zwei Punkten schneidet. Die fortrückende Ellipse beschreibt die Oberfläche des Ellipsoids. (Wird sie ein Kreis, oder ist die feste Ellipse ein Kreis, so geht das dreiachsige Ellipsoid in ein Drehungsellipsoid über, das nach Kap. VII zu behandeln ist.)

Die Fläche hat die Eigenschaft, dass sie von parallelen Ebenen irgend welcher Richtung nach Ellipsen geschnitten wird, die unter sich geometrisch ähnlich sind. Wenn also in Anwendung der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen das Ellipsoid durch vertikale Lichtstrahlenebenen geschnitten und an die Schnittkurven die berührenden Tangenten gezogen werden, so sind alle diese Schnittkurven ähnliche Ellipsen, auf welchen auch die Berührungspunkte der Lichtstrahlen, das heisst die Körperschattengrenzpunkte, ähnlich liegen. Hierauf gründet sich folgende Konstruktion der Körperschattengrenze, wobei nach Figur 69a ein Ellipsoid mit senkrecht zu den drei Grundebenen stehenden Achsen als Beispiel gewählt sein mag.

Man zieht durch den Mittelpunkt o der Grundrissellipse einen Lichtstrahl ab und zeichnet im Aufriss die Ellipse $b' c' d'$, nach welcher die Vertikalebene dieses Lichtstrahls den Körper schneidet. (Für diese Ellipse ist die