



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

IX. Schatten auf minder häufig verwerteten Flächen.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

hiefür Punkt h angenommen. Man zieht $h o_1$ mit Verlängerung und macht $hn = R$. Die auf der Mitte von $o_3 n$ in k errichtete Senkrechte zu $o_3 n$ giebt als Durchschnitt mit hn den Punkt o_2 als Mittelpunkt des Uebergangskreises. — Wird Punkt i auf dem grösseren Krümmungskreis als Uebergangspunkt angenommen, so zieht man $i o_3$ und macht darauf $im = r$. Das Mittellot $l o_2$ von $m o_1$ liefert als Schnitt mit $i o_3$ den Mittelpunkt des Uebergangskreises o_2 . Für die praktische Verwertung der Konstruktion empfiehlt sich die Annahme des Uebergangspunktes auf dem kleinen Krümmungskreis am meisten. Die Annäherung an die Ellipse kann hiebei rascher erreicht werden als mit der Wahl eines Zwischenradius z und ist bei allen Konstruktionen um so vollständiger, je kleiner der Unterschied beider Halbachsen ist.

h) Eine Tangente an die Ellipse aus einem äusseren Punkt oder parallel zu einer andern Geraden ist durch Anlegen des Lineals an der Kurve mit Sicherheit genau zu ziehen; damit ist aber der Berührungspunkt noch nicht bestimmt. Man erhält ihn, wenn die Achsen bekannt sind, durch Betrachtung der Ellipse als der aus dem Kreis durch proportionale Verkürzung aller Ordinaten abgeleiteten Kurve. Die Tangenten in den Endpunkten aufeinanderfallender Ordinaten des Kreises und der aus ihm abgeleiteten Ellipse schneiden sich auf der Abscissenachse, das heisst auf der grossen Achse der Ellipse. Man beschreibt also über der grossen Achse der Ellipse einen Kreis, zieht aus dem Schnittpunkt der Ellipsentangente mit der grossen Achse eine Tangente an den Kreis, bestimmt deren Berührungspunkt und erhält dann den Berührungspunkt der Ellipsentangente als Schnitt mit der durch den Kreisberührungspunkt gezogenen Ordinate. Liegt der Berührungspunkt der grossen Achse näher, so wird besser der Kreis über der kleinen Achse mit dem Schnittpunkt der Tangente und der kleinen Achse benützt.

i) Ist die Tangente in einem gegebenen Punkt der Ellipse zu ziehen, so wird dieselbe Thatsache benützt, indem zuerst die Ordinate durch den Punkt für Ellipse und Kreis, dann die Kreistangente gezeichnet und aus ihrem Schnittpunkt mit der grossen Achse nach dem gegebenen Berührungspunkt gezogen wird. Dasselbe Problem lässt sich auch mit Hilfe der Brennpunkte lösen; die Tangente an der Ellipse steht senkrecht auf der Halbierungslinie des Winkels zwischen den beiden nach dem Berührungspunkt gezogenen Brennstrahlen.

k) Sind die Achsen der Ellipsen nicht bekannt und es ist der Berührungspunkt einer vorhandenen Tangente zu bestimmen, so zieht man zwei zur Tangente parallele Sehnen in thunlichst grosser Entfernung voneinander und mit möglichst sicherem Schnitt mit der Peripherie. Die gerade Verbindungslinie der Halbierungspunkte beider Sehnen ist der Durchmesser nach dem Berührungspunkt.

Die Konstruktion ist die Anwendung der folgenden, für alle Kurven möglichen, auf den besonderen Fall der Ellipse. Man zieht eine Anzahl zur Tangente paralleler Sehnen und halbiert sie; die Kurve, welche die Halbierungspunkte verbindet, führt zum Berührungspunkt. Bei den Linien zweiter Ordnung wird diese Kurve zur Geraden.

l) Ist in einem Punkt eines Ellipsenstücks mit unbekannten Achsen eine Tangente zu ziehen, so kann man zur thunlichst sicheren Bestimmung ihrer Richtung folgende, auch für alle andern Kurven brauchbare Konstruktion benützen, durch welche man einen zweiten Punkt der Tangente erhält. Man beschreibt um den Berührungspunkt einen Kreis, zieht verschiedene Radien, welche auch die Kurve schneiden und trägt von den Kreispunkten einer Seite aus auf den Radien die Sehnen der Kurve nach aussen und innen auf. Man erhält dann zwei Kurven, welche sich auf dem Kreis schneiden; der Schnittpunkt ist ein Tangentenpunkt. Nimmt man die Konstruktion zu beiden Seiten des Berührungspunktes vor, so erhält man zwei auf einem Durchmesser liegende Tangentenpunkte. An die Stelle des Kreises kann auch eine Gerade oder beliebig gezogene Kurve treten, welche von den Verlängerungen der zu beiden Seiten des Berührungspunktes liegenden Sehnen der gegebenen Kurve geschnitten wird.

IX. Schatten auf minder häufig verwerteten Flächen.

Die Flächen zweiter Ordnung.

69.

Soweit diese Flächen nicht zu den Drehungsflächen gehören und als solche schattiert werden, sind es die folgenden: das dreiachsige Ellipsoid, das elliptische Paraboloid, das zweimantelige elliptische Hyperboloid, das einmantelige elliptische Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid.

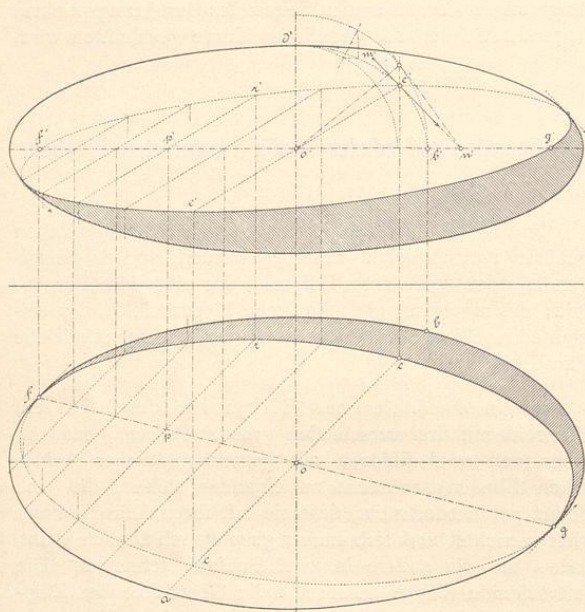
a) Ein dreiachsiges Ellipsoid, das heisst ein Ellipsoid mit drei verschieden grossen Achsen, entsteht, wenn von zwei Ellipsen mit gemeinschaftlicher Achse, deren Ebenen senkrecht zu einander stehen, die eine derart parallel fortrückt, dass sie mit ihren Achsen immer gleichgerichtet und sich immer geometrisch ähnlich bleibt, indem sie die andere in zwei Punkten schneidet. Die fortrückende Ellipse beschreibt die Oberfläche des Ellipsoids. (Wird sie ein Kreis, oder ist die feste Ellipse ein Kreis, so geht das dreiachsige Ellipsoid in ein Drehungsellipsoid über, das nach Kap. VII zu behandeln ist.)

Die Fläche hat die Eigenschaft, dass sie von parallelen Ebenen irgend welcher Richtung nach Ellipsen geschnitten wird, die unter sich geometrisch ähnlich sind. Wenn also in Anwendung der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen das Ellipsoid durch vertikale Lichtstrahlenebenen geschnitten und an die Schnittkurven die berührenden Tangenten gezogen werden, so sind alle diese Schnittkurven ähnliche Ellipsen, auf welchen auch die Berührungspunkte der Lichtstrahlen, das heisst die Körperschattengrenzpunkte, ähnlich liegen. Hierauf gründet sich folgende Konstruktion der Körperschattengrenze, wobei nach Figur 69a ein Ellipsoid mit senkrecht zu den drei Grundebenen stehenden Achsen als Beispiel gewählt sein mag.

Man zieht durch den Mittelpunkt o der Grundrissellipse einen Lichtstrahl ab und zeichnet im Aufriss die Ellipse $b' c' d'$, nach welcher die Vertikalebene dieses Lichtstrahls den Körper schneidet. (Für diese Ellipse ist die

vertikale Achse diejenige des Ellipsoids und die horizontale durch Hinaufloten der Endpunkte des Grundrissdurchmesserlichtstrahls ab erhältlich.) Man zieht an diese Schnittellipse einen berührenden Lichtstrahl $m'n'$, bestimmt dessen Berührungspunkt c' scharf nach Art. 68 und lotet ihn auf den Grundrissdurchmesser nach c hinunter. Hierauf zieht man genügend viele Sehnen der Grundrissellipse parallel zum Lichtstrahl und teilt sie in demselben Verhältnis ein, in welchem der Lichtstrahldurchmesser durch die beiden Punkte c und e eingeteilt ist ($oe = oc$). Die stetige Verbindung der erhaltenen Punkte liefert die Körperschattengrenze im Grundriss, die ihrer Entstehungsweise nach elliptisch sein muss.

Die Verbindungslinie gf der Halbierungspunkte der parallelen Sehnen ist ein horizontaler Durchmesser sowohl des Ellipsoids, als der Schattengrenzlinie auf ihm. Diese



Figur 69 a.

Linie erscheint im Aufriss als $f'g'$ horizontal und durch den Mittelpunkt gehend; die Halbierungspunkte p können also durch Hinaufloten auch im Aufriss erhalten werden. Durch diese Punkte p' sind im Aufriss Parallelen zu dem schrägen Durchmesser $o'c'$ jener ersten vertikalstehenden Schnittellipse zu ziehen und dann die Endpunkte der Sehnen r aus dem Grundriss in den Aufriss nach r' hinaufloten, um auch dort die Schattengrenzpunkte zu erhalten. Bei einem hohen Ellipsoid würden die Projektionslote schiefwinklige Durchschnitte ergeben; man bestimmt in diesem Fall die Aufrisspunkte besser aus der Proportionalität der Sehnen. Jede Aufrisssehne $p'r'$ verhält sich zu dem ihr parallelen Durchmesser $o'c'$ wie die zugehörige Grundrisssehne pr zu dem ihrigen oc . Zur Abnahme der Proportionalmasse für Grundriss und Aufriss kann dasselbe Strahlenbüschel dienen.

Die Körperschattengrenzlinie wird eine Ellipse, deren

Mittelpunkt mit dem des Körpers zusammenfällt, welche also die Oberfläche in zwei polarsymmetrische Hälften für Licht und Schatten zerlegt. In der Projektion des Körpers auf eine zur Richtung fg senkrecht stehende vertikale Ebene erscheint sie als gerade Linie.

Die an den beiden Körperumrissen tangierenden Lichtstrahlenprojektionen berühren in denselben Berührungspunkten auch die Projektionen der Schattengrenzlinie. Diese Thatsache gilt allgemein für gekrümmte Flächen, deren Umrisse in den beiden Projektionen nicht durch Kanten, sondern durch Auswölbung gebildet sind; sie ist eine notwendige Folgerung aus dem in Art. 34a ausgesprochenen Satz. Denkt man sich für eine solche etwa im Aufriss gezogene Lichtstrahl tangente die vertikalprojizierende Ebene, so berührt diese Ebene den Körper in einem Punkt, der der Körperschattengrenze angehört, weil er auf einem berührenden Lichtstrahl liegt. Diese Grenze kann aber über die Ebene offenbar nicht hinaus, da sie sonst aus der Körperoberfläche hinausgehen müsste; sie muss also umkehren und da sie bei stetiger Krümmung der Fläche keine Ecke bilden kann, muss sie mit Berührung umkehren, abgesehen von dem seltenen Fall, in welchem der sichtbare Teil mit dem unsichtbaren zusammenfällt. Vergl. Art. 63 a, Schattengrenzen auf Drehungsflächen. Weitere Beispiele für die beschriebene Thatsache bieten die Figuren 69b, 69c, 71, 74a, 74c.

Ein zweites Verfahren für die Schattenbestimmung auf dem Ellipsoid wäre das im folgenden für das elliptische Hyperboloid angewendete Behandeln jedes horizontalen Durchchnitts als eines niedrigen elliptischen Kegelumrisses.

b) Das elliptische Paraboloid (mit vertikaler Achse) entsteht, wenn an die Stelle der festen Ellipse, die bei Erzeugung des Ellipsoids vorausgesetzt wurde, eine Parabel (mit vertikaler Achse) tritt. Die Bestimmung der Körperschattengrenze, die selbst parabolisch und im Grundriss geradlinig wird, kann einen ähnlichen Weg verfolgen wie bei jenem, wenn an die Stelle der Grundrissellipse eine beliebige horizontale Schnittellipse des Paraboloids als Fussfläche gesetzt wird. Alle Vertikalschnitte werden parabolisch und nicht nur ähnlich, sondern kongruent. Auf kurzem Weg kann die geradlinige vertikale Projektion der Körperschattengrenze auf einer zu fg senkrechten Vertikalebene gefunden und zur Konstruktion jener benutzt werden.

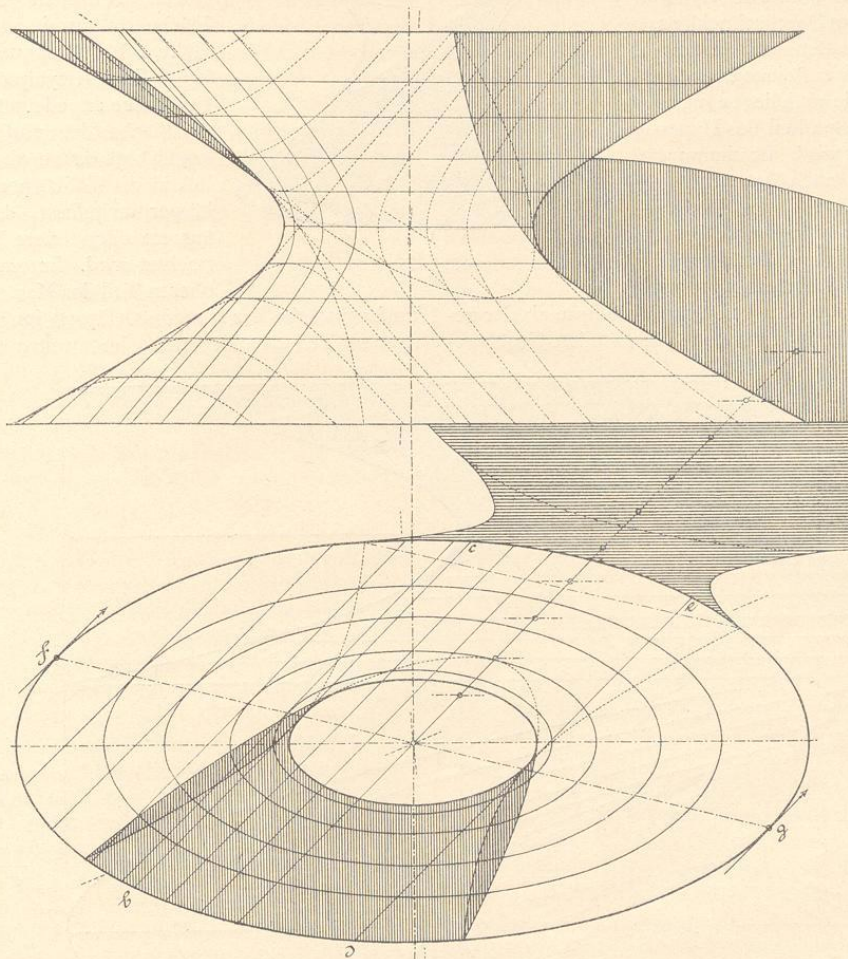
c) Ein zweimanteliges elliptisches Hyperboloid entsteht, wenn eine (am besten horizontal liegend gedachte) Ellipse, deren Ebene senkrecht zur wirklichen Achse einer Hyperbel steht, derart parallel forttrückt, dass sie mit ihrer Achse immer gleichgerichtet und sich immer geometrisch ähnlich bleibt, indem sie die Hyperbel immer in zwei Punkten schneidet. Die beiden Schnittpunkte mit der Hyperbel können Endpunkte einer Achse oder eines andern Ellipsendurchmessers sein. Die bewegliche Ellipse erzeugt zwei kongruente Mantelflächen, auf denen die hyperbolische Körperschattengrenze in ähnlicher Weise gefunden werden kann wie beim Ellipsoid und Paraboloid,

wenn eine beliebige Lage der beweglichen Ellipse als Grundrissellipse aufgefasst wird. Alle Vertikalabschnitte werden hyperbolisch und geometrisch ähnlich.

Zur Bestimmung von Schlagschattengrenzen auf allen drei Flächen wird, von besonderen Fällen abgesehen, nur das allgemeine Verfahren mit den Vertikalschnitten zur Verfügung stehen; doch bringt auch hiebei die Thatsache, dass alle Vertikalschnitte parallel zur Lichtrichtung geome-

beschattung; der Schlagschatten kann entweder auf die Aussenseite des Mantels oder auf die Innenfläche fallen, je nach der Neigung der Hyperbelzweige.

Die Schattenkonstruktion könnte auch bei dieser Fläche, ähnlich wie bei den drei vorhergehenden, Gebrauch machen von der Thatsache, dass alle Hyperbeln, nach welchen die Fläche durch vertikale Lichtstrahlenebenen geschnitten wird, geometrisch ähnlich sind, und es wäre



Figur 69b.

trisch ähnlich sind, eine Abkürzung, indem das Zeichnen konzentrischer Grundrissellipsen erspart werden kann.

d) Das einmantelige elliptische Hyperboloid entsteht durch das parallele Fortrücken einer (am besten horizontal liegend gedachten) Ellipse auf einer Hyperbel (mit vertikaler imaginärer Achse) in der Weise, dass 1) die Ebene der Ellipse immer senkrecht bleibt zur imaginären Achse der Hyperbel, 2) die Ellipse sich immer geometrisch ähnlich und gleichgerichtet bleibt. Die Fläche bietet neben der Körperschattengrenze auch eine Selbst-

dieser Weg der kürzeste. Diese Schnitthyperbeln projizieren sich auf eine zu fg (Figur 69b) senkrecht stehende vertikale Ebene als eine Hyperbelschar, deren Asymptoten dargestellt sind durch die Projektionen der zwei geraden Linien, nach welchen eine berührende Schnittebene bc oder de die Fläche schneidet. Von dieser Hyperbelschar wäre nur eine einzige Hyperbel (bei Annahme der Fläche nach Figur 69b ausserhalb bc und de liegend) zu zeichnen, um die gerade Linie zu erhalten, als welche die Körperschattengrenze sich auf die zu fg senkrecht gerichtete vertikale Ebene projiziert.

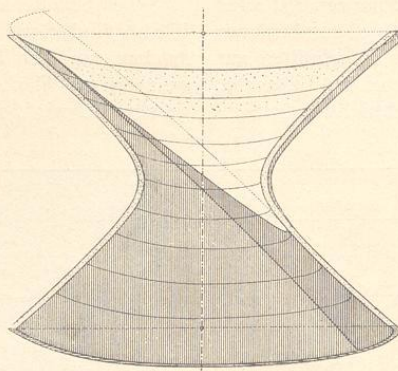
Die an Figur 69b und c durchgeführte Lösung für die Körperschattengrenzlinie eines vertikalstehenden Hyperboloids ist eine andere und zwar die folgende. Jeder horizontale Durchschnitt des Körpers liefert eine Ellipse, welche betrachtet werden kann als sehr niedriger Abschnitt eines elliptischen Kegels, dessen äusserste Mantellinie dieselbe Neigung hat wie die Tangente der Hyperbel an der Stelle des Durchschneidens. Wo die Körperschattengrenze auf dieser Ellipse liegt als auf einer Zone des Kegels, da muss sie auch liegen, wenn die Ellipse als Bestandteil des Hyperboloids aufgefasst wird. Bestimmung der Kegelschatten nach Art. 41.

Zur Durchführung des Verfahrens ist nicht nötig, die Schnittellipsen im Grundriss zu zeichnen, sondern die Bestimmung der Kegelschattenmantellinien kann mit einer einzigen Grundrissellipse als der gemeinschaftlichen Basis der verschieden steilen Kegel ge-

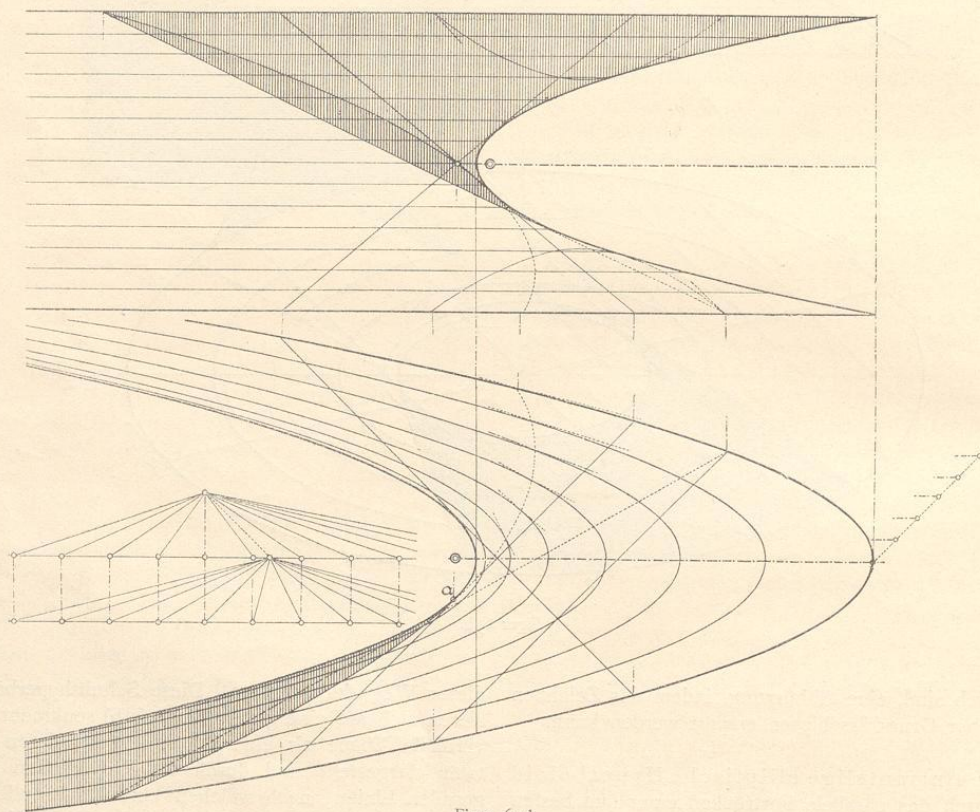
ellipte. Scharfe Bestimmung der Berührungspunkte auf der Ellipse nach Art. 68; scharfe Bestimmung der Tangenten an der Hyperbel in den für die Horizontalschnitte ausgewählten Punkten als der Halbierungslinien des Brennstrahlenwinkels.

Die Körperschattengrenze wird eine Hyperbel, die sich auf eine zur Richtung fg senkrechte vertikale Ebene als Gerade projiziert und die Fläche in zwei polarsymmetrische Hälften für Licht und Schatten zerlegt. Ihre Asymptoten sind durch Endstücke angedeutet. Welche Hälfte der Fläche Licht und welche Schatten hat, hängt davon ab, ob das Hyperboloid als Vollkörper oder als Hohlkörper aufgefasst, das heisst ob die äussere oder innere Mantelfläche betrachtet wird. Im ersten Fall sind am oberen Teil des Mantels die grösseren

Umfangsstücke der Horizontalellipsen im Schatten und am unteren Teil die kleineren; im zweiten Fall ist es um-



Figur 69c.



Figur 69d.

schehen, wenn immer der Radius nach dem Berührungspunkt der Tangente, den das Verfahren liefert, im selben Verhältnis vergrössert oder verkleinert wird, in welchem die Schnittellipse grösser oder kleiner wäre als die Grundriss-

gekehrt. In der Figur ist der Aufriss als Ansicht der Aussenfläche, der Grundriss als Oberansicht der Innenfläche aufgefasst, weshalb die Lichtflächen der Vertikalprojektion im Grundriss als Schattenflächen auftreten.

Die Schlagschattengrenze der Selbstbeschattung ist ähnlich erhalten wie in Art. 61 bei Drehungsflächen. Es wurden die Ellipsen einiger Horizontalschnitte im Grundriss gezeichnet und auf den Ebenen dieser Schnitte der Schatten der oberen Randellipse angegeben, der eine kongruente, aber in der Lichtrichtung verschobene Ellipse ist. Zu diesem Zweck wurde die Randellipse auf Pauspapier gezeichnet und im Grundriss nacheinander in der Richtung des Lichtstrahls je um soviel fortgeschoben, als die Länge des Lichtstrahls bis zur Schnittebene angab (die Mittelpunkte der fortgeschobenen Lagen sind bezeichnet). In jeder Lage wurden die zwei Schnittpunkte zwischen Schattenellipse und Schnittellipse als Schlagschattenpunkte durchgestochen und bezeichnet. Fast ebenso rasch, aber mit minder sicherer Bestimmung der Körperschattengrenze, würde das allgemeine Verfahren zum Ziel geführt haben. Einige Schnittebenen und Schnittkurven hierfür sind eingezeichnet.

Nur im Innern des Mantels erscheint der Schlagschatten, und zwar umfasst er am oberen Teil die beiden spitzwinkligen Zwickel als Ausläufer des unter dem Hals von den gekrümmten Linien gebildeten Vierecks mit dem kleineren Abschnitt der Fussellipse. Die Parallelperspektive Figur 69c (Schnitt nach der durch die Achse gehenden Lichtstrahlenebene) soll die Verteilung der Innenfläche an Licht, Körperschatten und Schlagschatten besser zur Anschauung bringen, als es die geometrische Darstellung vermag.

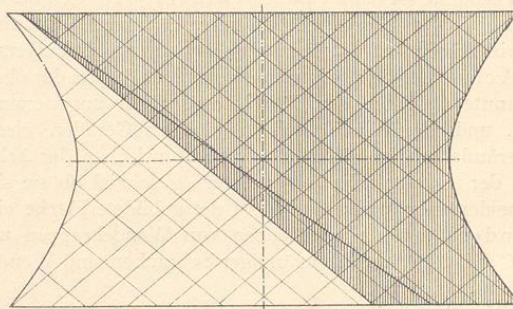
e) Das hyperbolische Paraboloid, bei Abgrenzung durch vier gerade Ränder auch das „windschiefe Viereck“ genannt, lässt sich auf verschiedene Weise erzeugen; in Figur 69d ist diejenige als „Rückungsfläche“ aus der Bewegung einer Parabel gewählt. Zwei Parabeln haben Scheitel und Achse gemein; die erste, festgedachte, liegt in einer Vertikalebene und erstreckt sich rechts ins Unendliche; die zweite liegt in einer Horizontalebene und erstreckt sich links ins Unendliche; sie rückt parallel und unveränderlich auf der ersten fort, mit dem Scheitelpunkt auf ihr bleibend. Beide Parabeln können ihre Eigenschaft als fest und beweglich vertauschen, ohne dass die Fläche sich ändert.

Dieser Erzeugungsweise entsprechend kann jeder Horizontalschnitt der Fläche aufgefasst werden als ein sehr niedriger schiefer Cylinder parallel zur Vertikalebene, dessen horizontale Basis die bewegliche Parabel ist und dessen Mantellinien gleich geneigt sind wie die Tangente der festen Parabel an der Stelle des Durchschneidens. Wo die Körperschattengrenze auf der horizontalen Parabel liegt als auf einer Zone des Cylinders, da muss sie auch für das Paraboloid liegen. Die Bestimmung der Körperschattengrenze auf dem Cylinder geschieht nach Art. 49. In einfacher Weise ergeben sich aus einer und derselben Hilfsfigur, die innerhalb des Grundplans gezeichnet ist, die Richtungen der Tangenten, welche an die horizontalen Schnittparabeln zu ziehen sind, und deren Berührungspunkte die Körperschattengrenze bilden. Diese wird eine Parabel, die sich in der Seitenprojektion als gerade Linie projiziert, also wie bei 69b auch auf kürzerem Weg gefunden werden kann.

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

(Bestimmung der Tangenten in den ausgewählten Punkten der festen Parabel und ebenso der Berührungspunkte der Tangenten an der beweglichen Parabel nach dem Satz, dass jede Tangente der Parabel senkrecht und in der Mitte steht auf der Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Fusspunkt des Lotes, das vom Berührungspunkt auf die Direktrix gefällt wird.)

Zur Bestimmung der Schlagschattengrenze ist dasselbe Verfahren gewählt wie oben für das elliptische Hyperboloid; das heisst, die obere Randparabel wurde auf Pauspapier gezeichnet und in der Lichtstrahlrichtung parallel verschoben. Im gezeichneten Fall wurde die Schlagschattengrenze zufällig nahezu geradlinig, was mit der geringen Krümmung des schattenwerfenden Randstücks zusammenhängt; eine strenge gerade Linie kann aber nicht entstehen. Denn wenn die Schlagschattengrenze wirklich eine Gerade wäre, so würden die Lichtstrahlen, welche sie erzeugen, eine Ebene bilden, und eine solche müsste die horizontale Ebene des oberen Randes nach einer geraden Linie schneiden; das heisst, der obere



Figur 69c.

Rand der Fläche müsste, soweit er den Schatten wirft, selbst geradlinig, anstatt parabolisch mit geringer Krümmung sein.

Figur 69c zeigt die Seitenansicht von rechts mit Angabe der Schattenflächen und Beifügung einiger Lagen der Geraden, welche entstehen, wenn man die Fläche durch Vertikalebenen schneidet, welche die ursprüngliche Lage der horizontalen Parabel berühren. Eine wichtige Ebene dieser Art ist die Vertikalebene parallel zur Lichtrichtung; sie liefert den Durchgangspunkt a , in welchem die Körperschattengrenze jene horizontale Parabel schneidet.

Der Schlagschatten erscheint an der Aussenseite des Mantels; würde der Parameter der festen Parabel genügend vergrößert, so würde nur auf der Innenseite Selbstbeschattung stattfinden. Zwischen beiden Fällen liegt ein Grenzfall, in welchem gar kein Schlagschatten erscheint; er ist geboten, wenn die zwei Geraden, nach welchen die Fläche von einer tangierenden vertikalen Lichtstrahlenebene geschnitten wird, im Aufriss unter 45° stehen und beide gegebene Parabeln kongruent sind. Für die Schlagschattenbestimmung hätten auch Schnitte parallel zur Vertikalebene, die ebenfalls alle kongruent sind, verwertet werden können.

Das allgemeine Verfahren ist durch Einzeichnen der mit einer vertikalen Lichtstrahlenebene erhaltenen Schnittkurve angedeutet.

70. Schraubenflächen, Wendelflächen. Die Schrauben und die schraubenförmig verdrehten Stabformen.

Eine Schraubenfläche im weitesten Sinne entsteht, wenn eine Gerade auf einer Schraubenlinie derart fortschreitet, dass sie ihre Richtung gegenüber der Schraubenlinie nicht ändert, das heisst, dass sie einen Kreiscylinder, der die Achse mit der Schraubenlinie gemeinschaftlich hat, fortwährend berührt und mit den Mantellinien dieses Cylinders immer denselben Winkel einschliesst. Auch die Berührung dieses Cylinders findet nach einer Schraubenlinie statt, und zwar hat diese dieselbe Ganghöhe wie die als Leitlinie dienende.

Ein erster besonderer Fall ist geboten, wenn die bewegliche Gerade die Tangente der Schraubenlinie bildet; die Fläche heisst dann eine „entwickelbare“ Schraubenfläche. Ein zweiter, bei den scharfgängigen Schrauben verwirklichter Fall ist der, dass die erzeugende Gerade die Achse der Schraubenlinie schneidet (wobei der oben genannte Cylinder den Durchmesser Null angenommen hat), und der Winkel zwischen beiden Geraden wieder unveränderlich ist. Wird der Winkel zwischen der Achse und der Erzeugenden ein rechter (gleichviel ob sie sich schneiden oder nicht), so heisst die gebildete Fläche eine Wendelfläche. Unterflächen von Wendeltreppen und die Gewindeflächen flachgängiger Schrauben sind Wendelflächen.

Die Anwendung der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen auf die Schraubenflächen aller Art gestaltet sich ganz wie in Art. 27 für „Regelflächen“ überhaupt beschrieben (Figur 70a). Man zeichnet eine genügende Zahl von Mantellinien in Grundriss und Aufriss, indem man den Umfang des Grundrisskreises und die Ganghöhe der Schraubenlinie je in 8 oder 12 oder 16 gleiche Teile teilt und Gebrauch macht von der Thatsache, dass bei einem Fortschreiten der Erzeugenden im Grundriss von einem Teilpunkt zum andern ihre beiden Endpunkte um denselben Bruchteil der Ganghöhe höher rücken. Die Schnittkurve einer jeden vertikalstehenden Lichtstrahlenebene mit der Fläche ergibt sich nun daraus, dass man die Schnittpunkte dieser Ebene mit den verschiedenen Mantellinien, die im Grundriss vorhanden sind, sobald die Lichtstrahlprojektion gezogen ist, hinaufletet in die Aufrisse der Mantellinie und die erhaltenen Punkte verbindet. Im übrigen gelangt die allgemeine Lösung aus Art. 27 ohne weitere Hilfsmittel zur Verwertung; für den unteren Teil der Fläche sind die Schnittkurven eingezeichnet.

Dieses allgemeine Verfahren liefert zwar die Schlagschattengrenzen rasch und genügend scharf, leidet aber in Beziehung auf die Körperschatten an dem Mangel, dass die Berührungspunkte der Tangenten innerhalb weiter Grenzen unsicher sind. Eine genauere Bestimmung ist möglich nach Art. 105; die dort genannte Lichtstufenlinie ± 4 , die mit dem Werkzeug der Beleuchtungskunde,

der „Normalkugel“ erhalten wird, ist nichts anderes als die Körperschattengrenze der Fläche.

Eine weitere Konstruktion für die Schlagschattengrenzen, ebenfalls in Figur 70a zur Anschauung gebracht, ist die folgende. Man sucht auf einer beliebigen Horizontalebene (hier der Grundebene) die Schlagschatten einer Anzahl von Mantellinien, ferner den Schlagschatten derjenigen Linie, deren Schlagschatten auf der Schraubenfläche zu suchen ist, sei nun diese Linie eine Randlinie der Fläche selbst, wie bei der Selbstbeschattung in Figur 70a, oder sei sie die Selbstschattengrenze eines anderen Körpers. Wo der Schlagschatten t_{6u6} einer Mantellinie o geschnitten wird vom Schlagschatten dieser Grenzlinie (das heisst des nächstoberen Flächenrandes), da ist der gemeinschaftliche Schlagschatten r_6 derjenigen zwei Punkte s und x beider Linien, die einander in Schatten setzen. Dieser Schlagschattenpunkt liegt auf demselben Lichtstrahl mit den zwei Punkten, so dass ein durch ihn rückwärts bis zur Mantellinie gezogener Lichtstrahl zum Schlagschattenpunkt ss' auf der Fläche führt. Selbstverständlich ist der erhaltene Punkt nur dann ein wirklicher Schattengrenzpunkt, wenn die Mantellinie nicht selbst im Körperschatten ist; denn andernfalls kann sie keinen Schatten aufnehmen. Man erhält auf diesem Weg die Schlagschattengrenze rasch und genügend scharf.

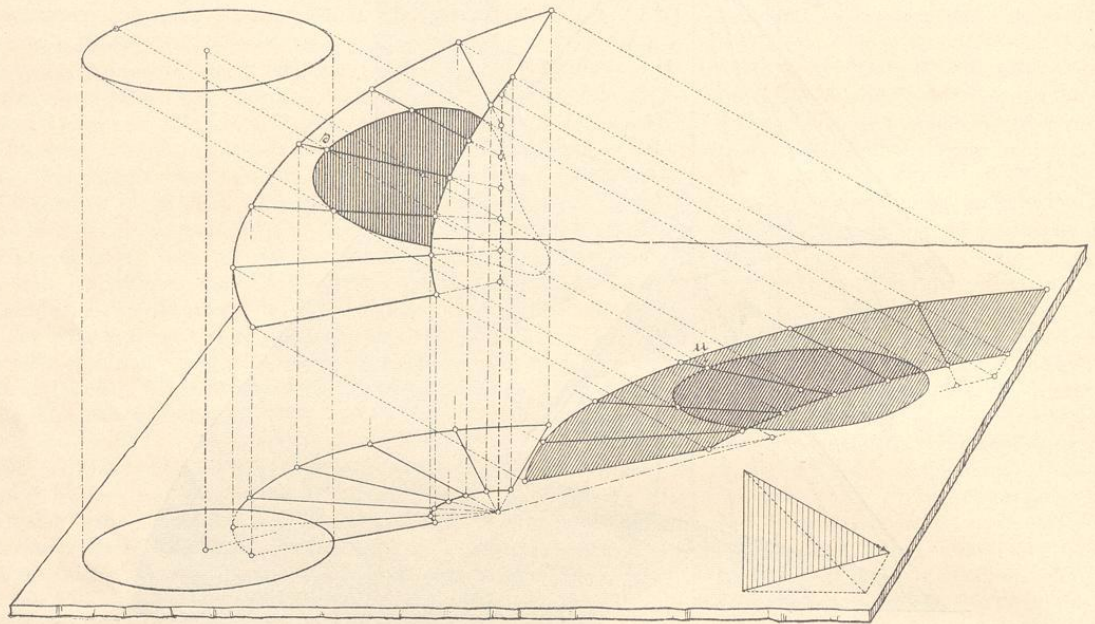
Auch zur Bestimmung der Körperschattengrenze kann dieses Verfahren dienen, wenigstens der Theorie nach. Man sucht auf derselben Horizontalebene die Schlagschatten einiger Mantellinien aus demjenigen Teil der Fläche, auf welchem die Schattengrenze zu vermuten ist, zeichnet die Umhüllungskurve dieser Schlagschattenlinien und bestimmt möglichst scharf den Berührungspunkt zwischen der Kurve und jeder Mantellinie. Der durch einen solchen Berührungspunkt rückwärts gezogene Lichtstrahl führt zu dem Körperschattengrenzpunkt auf der zugehörigen Mantellinie. Wo der Durchschnitt unsicher wird, da ist zu beachten, dass die Mantellinie selbst durch den Körperschattenpunkt im gleichen Verhältnis eingeteilt wird wie die Schlagschattenlinie durch den Berührungspunkt. An die Stelle der horizontalen Ebene kann bei diesem Verfahren auch die vertikale Grundebene oder eine dazu parallele Ebene treten. Leider stösst es bei der praktischen Ausführung gewöhnlich auf unüberwindliche Hindernisse, indem es um so schwieriger ist, die Berührungspunkte auf den Schatten der Erzeugenden zu bestimmen, je mehr sich die Schraubenfläche einer entwickelbaren nähert.

Wenn die erzeugende Gerade der Schraubenfläche horizontal wird, so entsteht die Wendelfläche. Die Bestimmung der Schattengrenzen bleibt dabei völlig unverändert.

In Figur 70b ist der zweite für die Schraubenfläche beschriebene Weg der Schlagschattenbestimmung in seiner Anwendung auf eine Wendelfläche perspektivisch zur Anschauung gebracht. Auf der horizontalen Grundebene ist links der Grundriss eines schattenwerfenden horizontalen Kreises und einer beschatteten Wendelfläche mit sieben Mantellinien perspektivisch gezeichnet, darüber die beiden Raumgebilde selbst. Auf dem gewöhnlichen

Weg sind auf der Grundebene die Schlagschatten des Kreises, der sieben Mantellinien und der zwei Ränder der Wendelfläche bestimmt. Der Schatten der vierten Mantellinie wird vom Schatten des Kreises in einem Punkt u geschnitten. Ein durch u rückwärts gezogener Lichtstrahl trifft die Mantellinie selbst im Punkt s , der ein Punkt der Grenze des Schlagschattens sein muss, den der Kreis auf die Wendelfläche wirft. Er bestimmt sich schärfer daraus, dass die Mantellinie selbst durch den Schattenpunkt s ebenso eingeteilt wird wie ihr gleich langer Schlagschatten durch den Punkt u . Mit einer punktierten Linie ist angegeben, wie sich die Schlagschattenfigur auf der Wendelfläche ergänzen würde, wenn diese über ihren inneren Rand und ihre Achse hinaus erweitert würde.

Winkel, welche der Höhenschnitt der Schraube nach dem zuvor Gesagten darbietet, durch Kreisbögen abgerundet. So hat z. B. das Schraubensystem nach Whitworth einen Winkel von 55° zwischen den geneigten Dreiecksseiten; diese sind in 6 gleiche Teile geteilt gedacht und die Kreisbögen sowohl der konkaven als der konvexen Abrundung schliessen je am äussersten Teilpunkt berührend an. Die Oberflächen solcher Schrauben sind also zusammengesetzt aus Schraubenflächen und schraubenförmigen Wulstflächen mit kreisförmigem Vertikalschnitt. Diese letzteren können beim Schattieren nach der allgemeinen Lösung mit Vertikalschnitten parallel zum Lichtstrahl ohne weitere Hilfsmittel einbezogen werden, indem man die Schraubenlinien, die auf diese Flächen fallen, in Grund-



Figur 70b.

Schrauben- und Wendelflächen sind am häufigsten verwirklicht in den Schrauben. Die scharfgängige (vertikalstehende) Schraube entsteht, wenn ein gleichschenkliges Dreieck mit vertikaler Basis auf einer flachen Schraubenlinie mit vertikaler Achse derart fortschreitet, dass seine Ebene immer durch die Achse geht und seine Fusspunkte auf der Schraubenlinie bleiben. Aus dieser Erklärung folgt, dass die Ganghöhe der Schraubenlinie gleich der Basis des Dreiecks sein muss. Es giebt auch Schrauben mit doppeltem und dreifachem Gewinde, bei welchen zwei oder drei übereinandergestellte Dreiecke derselben Form drehend fortschreiten und die Ganghöhe der beschriebenen Schraubenlinien gleich dem Doppelten oder Dreifachen der Basis des einzelnen Dreiecks ist. Die von den Dreiecksseiten erzeugten Flächen sind Schraubenflächen der einfachsten Art, und es ist zu deren Schattierung kein weiteres Hilfsmittel notwendig.

In der Ausführung sind die ein- und ausspringenden

riss und Aufriss zeichnet und benutzt wie diejenigen auf den Schraubenflächen.

Bei den flachgängigen Schrauben erscheint anstatt des gleichschenkligen Dreiecks der vorigen ein Rechteck mit horizontalen und vertikalen Seiten, das bei bestimmten Systemen zum Quadrat wird. Die Ganghöhe der erzeugten Schraubenlinien ist meist das Doppelte der vertikalen Rechtecksseite; das heisst das hohle Rechteck zwischen je zwei vollen Rechtecken des Höhenschnitts ist ebenso hoch wie diese. Die wagrechten Seiten beschreiben Wendelflächen. Auch die Schrauben dieser Art können doppelte und dreifache sein, indem zwei oder drei Rechtecke übereinander drehend fortschreiten.

Schraubend verdrehte Stabformen können als zusammengesetzt aus Schraubenflächen aufgefasst werden und sind als Gegenstände der Beleuchtungskunde beschrieben in Art. 106; um den Zusammenhang nicht aufzuheben, ist dort auch die Konstruktion der Schlag-

schattengrenzen erklärt, die sich übrigens ganz in derselben Weise finden lassen wie bei den Schraubenflächen. Die Körperschattengrenze ergibt sich als Lichtstufenlinie ± 4 oder auch ohne die Hilfsmittel der Beleuchtungskunde auf eigenen Wegen, die ebenfalls in Art. 106 gezeigt sind.

Verwandt mit den Schraubenflächen, weil auffassbar als aus solchen zusammengesetzt, ist ferner das ringförmig-steigende Tonnengewölbe. Es ist als Gegenstand der Beleuchtungskunde ebenfalls behandelt in Art. 106 und in den Figuren 106c und d. Ein Halbkreis mit vertikaler Achse (oder Segmentbogen oder Spitzbogen oder eine andere Mauerbogenlinie) rückt derart fort, dass sein Scheitelpunkt immer auf einer vertikalstehenden Schraubenlinie bleibt und seine Ebene immer durch die Achse dieser Schraubenlinie geht. Jede Tangente an dem beweglichen Bogen beschreibt eine Schraubenfläche. Das allgemeine Verfahren für gekrümmte Flächen ist hier das nächstliegende, weil Schlagschatten auftreten. Zu seiner Durchführung ist eine genügende Zahl der von den Kreispunkten beschriebenen Schraubenlinien in Grundriss und Aufriss zu zeichnen. Für jeden im Grundriss gezogenen Lichtstrahl sind die Schnittpunkte mit den Grundrisskreisen in die Aufrisse der Schraubenlinien hinaufzuloten (und bei schiefwinkligem Durchschnitt mit Hilfe der Proportionalität der Höhen und Centriwinkel schärfer zu bestimmen). Hiedurch wird im Aufriss die Schnittlinie der vertikalstehenden Lichtstrahlenebene mit der Leibungsfläche erhalten, die mit den übrigen in bekannter Weise zu benutzen ist.

71. Die schraubenförmige Röhre oder Wulstfläche und andere Röhrenflächen mit kreisförmigem Querschnitt.

Unter einer „Röhrenfläche“ versteht man zwar gewöhnlich die Fläche, welche ein unveränderlicher Kreis bei normalgerichtetem Fortschreiten auf irgend einer Linie erzeugt; hier sollen jedoch, um eine kurze Bezeichnung für eine in der Technik nicht selten vorkommende Art von Flächen zu haben, als Röhrenflächen im weitesten Sinn bezeichnet werden alle Flächen, welche eine beliebige unveränderliche oder geometrisch ähnlich bleibende gekrümmte oder zusammengesetzte ebene Linie erzeugt, indem ein Punkt ihrer Ebene auf einer Leitlinie fortschreitet und ihre Ebene immer normal zu dieser Linie bleibt. (Man kann ja die bewegliche Linie immer zur geschlossenen Figur ergänzen, so dass in der That eine „Röhre“ erzeugt wird.) Zur Begriffserklärung der Fläche gehört noch, dass sich die bewegliche Linie gegenüber der Leitlinie auch nicht in ihrer eigenen Ebene verdrehen darf; das heisst, es muss bei einer ebengekrümmten Leitlinie immer dieselbe Sehne der beweglichen Linie in der Ebene der Leitlinie bleiben, und bei einer gewundenen Leitlinie immer dieselbe Sehne der beweglichen Linie in die „Schmiegungebene“ der Leitlinie fallen; mit andern Worten, die bewegliche Linie muss immer dieselbe Lage gegenüber der „Hauptnormalen“ der Leitlinie beibehalten. („Schmiegungebene“ in einem bestimmten Punkt einer gewundenen Kurve heisst diejenige Ebene, welche

durch die beiden an den Punkt anstossenden, geradlinig gedachten Elemente der Kurve gelegt ist. Verbindet man den Punkt geradlinig mit einem vor ihm liegenden und einem nachfolgenden Punkt, so bilden die beiden Verbindungslinien eine bestimmte Ebene. Nähern sich die beiden Punkte dem gegebenen, so schmiegt sich die Ebene der Kurve immer mehr an; fallen sie endlich mit dem gegebenen zusammen, so ist die Ebene zur „Schmiegungebene“ geworden. Die Tangente liegt in der Schmiegungeebene. — „Hauptnormale“ für einen bestimmten Punkt einer gewundenen Kurve heisst die Schnittlinie der Schmiegungeebene mit der Normalebene oder zur Tangente senkrecht stehenden Ebene; diese Linie steht also senkrecht zur Tangente.)

Im vorliegenden Artikel sind die Röhrenflächen im engeren Sinn, das heisst diejenigen mit kreisförmigem unveränderlichem Normalschnitt behandelt. Sie können auch als Umhüllungsflächen aller Lagen einer unveränderlichen Kugel aufgefasst werden, deren Mittelpunkt auf der als Leitlinie gegebenen Kurve fortschreitet; jede solche Kurve berührt die Röhrenfläche nach einem Normalschnittkreis, und wo die Körperschattengrenzpunkte auf diesem als auf einem Bestandteil der Kugel liegen, da liegen sie auch für die Röhrenfläche.

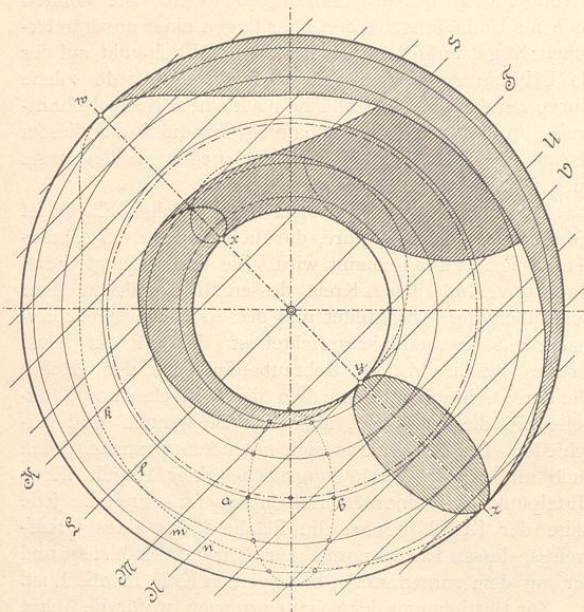
Das interessanteste Beispiel einer solchen Fläche ist die schraubenförmige Röhre, die auch zuweilen der schraubenförmige Wulst genannt wird. Sie wird erzeugt durch einen unveränderlichen Kreis, dessen Mittelpunkt auf einer Schraubenlinie fortschreitet und dessen Ebene immer normal zur Schraubenlinie gerichtet ist. Jeder Punkt dieses Kreises beschreibt eine Schraubenlinie auf der Fläche; alle diese Schraubenlinien haben dieselbe Achse und Ganghöhe wie die gegebene, aber ihre Steigungen sind verschieden. Die Fläche lässt sich nach dem Voranstehenden auch erklären als Umhüllungsfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt auf einer Schraubenlinie fortschreitet. Jede Lage der Kugel berührt die Fläche längs eines Grosskreises, dessen Ebene normal zur Schraubenlinie steht und der mit dem vorgenannten beweglichen Kreis identisch ist.

Zur Bestimmung der Schattengrenzen, wofür die Achse vertikal gedacht sein mag, steht zunächst das allgemeine Verfahren für gekrümmte Flächen zur Verfügung, und zwar gestaltet es sich wie folgt:

Man zeichnet im Grundriss eine genügende Zahl der zuvor genannten konzentrischen Schraubenlinien, indem man den beweglichen Kreis in 6, 8 oder 12 gleiche Teile teilt und die einander entsprechenden Teilpunkte der verschiedenen Lagen verbindet. Dabei ist zu beachten, dass die elliptischen Grundrisse aller Lagen des beweglichen Kreises kongruent und mit der grossen Achse gegen den Mittelpunkt gerichtet sind. Das Achsenverhältnis dieser Ellipsen ergibt sich, indem man (Figuren 71a und 71b) eine Lage des beweglichen Kreises so annimmt, dass er sich im Aufriss als gerade Linie $a'b'$ projiziert, das heisst an einem Punkt, in welchem die schraubenlinienförmige Röhrenachse eine Tangente parallel zur Vertikalebene hat. Ist aus diesem Aufriss die erste Grundrissellipse abgeleitet, so legt man durch deren Punkte konzentrische Kreise; diese stellen die Grundrisse jener Schraubenlinien dar.

Teilt man nun den Grundrisskreis in 8 oder 12 Teile und zeichnet für jeden Teil die Ellipse ebenso wie sie sich für jenen ersten Punkt ergeben hat, so lassen sich die zu jeder Ellipse gehörigen Aufrisspunkte erhalten, indem man Gebrauch macht von der Thatsache, dass beim Fortschreiten des Schnittkreises von einem Teilpunkt zum andern alle seine Punkte um gleich viel, und zwar hier um ein Achtel oder Zwölftel der ganzen Ganghöhe höher rücken. Die stetige Verbindung der einander entsprechenden Punkte der Aufrissellipsen des beweglichen Kreises liefert die Aufrisse jener Schraubenlinien. Figur 71 b zeigt ihre Bewegung auf der Fläche.

Die Schnittkurve zwischen der Fläche und einer beliebigen vertikalen Lichtstrahlenebene ergibt sich nun daraus, dass man die Schnittpunkte des Lichtstrahls mit den konzentrischen Kreisen aus dem Grundriss auf die



Figur 71a.

Schraubenlinien im Aufriss hinaufklet. Wo der Schnitt allzu schief wird, da lässt sich die Höhenlage des Punktes aus der Steigung der zugehörigen Schraubenlinie schärfer bestimmen, da die in jedem Punkt einer Schraubenlinie erreichte Höhe proportional dem Centriwinkel ist. Figur 71 c zeigt die Fläche mit allen im Grundriss Figur 71 a angegebenen Vertikalschnitten, worunter auch diejenigen der inneren, die Röhre in x und y berührenden Ebenen, deren Kurven schiefe verzogene doppelte Schleifen bilden.

Die Körperschattengrenze ergibt sich nun in bekannter Weise als Verbindungslinie der Berührungspunkte $k' l' m' n'$ der Lichtstrahl tangente, welche im Aufriss an die Schnittkurven gezogen werden. Wo eine solche Tangente eine in derselben Vertikalebene liegende zweite Schnittkurve schneidet, da ist ein Schlagschattenpunkt.

Schnittkurve K liefert z. B. links oben den Körperschattenpunkt k ; die Verlängerung des berührenden Licht-

strahls schneidet rechts unten die in derselben Vertikalebene mit K liegende Schnittkurve S im Punkt s' ; dieser ist ein Punkt der Schlagschattengrenze. Ebenso liefern die Körperschattenpunkte $l' m' n'$ u. s. w. die Schlagschattenpunkte $l' u' v' u. s. w.$

Die obere Grenzkurve der Schlagschattenfläche ist nur im Grundriss sichtbar; im Aufriss konnte sie nicht eingetragen werden, da sie fast durchaus mit dem oberen Umriss der Röhre zusammenfällt.

Die Schnittpunkte x' und y' der zuvor genannten doppelten Schleifen sind wichtige Körperschattengrenzungspunkte. Ebenso liefern die im Grundriss den äusseren Umriss berührenden Lichtstrahlen die wichtigen Grenzpunkte w' und z' in gleicher Höhenlage mit den vorigen; die Höhenlage lässt sich aus der Ganghöhe leicht scharf bestimmen. Die Körperschattengrenzen werden im Grundriss durchaus symmetrisch zur Achse wz , weil die Schnittkurven, beziehungsweise Paare von Schnittkurven, welche die vertikalen Lichtstrahlenebenen liefern, polar kongruente Hälften haben, beziehungsweise polar kongruent sind.

Um den Verlauf der Kurven noch deutlicher zu zeigen, ist in Figur 71 d ein Vertikalschnitt nach dem Grundrissdurchmesser $L T$ beigelegt, der auch die im Aufriss nicht sichtbare obere Schlagschattengrenze darbietet. In diesem Schnitt fallen die Projektionen der Punkte xx' und ww' aufeinander. Zu beachten ist, dass die in der Figur erscheinende Vertikalschnittfläche der Röhre nicht symmetrisch zu ihrer vertikalen Mittellinie, sondern innen voller ist als aussen.

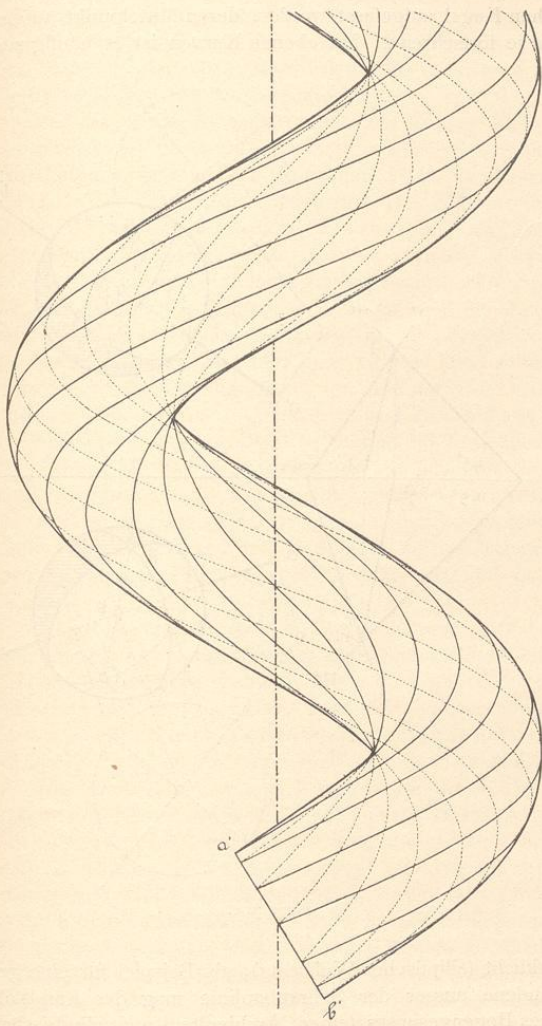
Interessant ist das Hinuntersteigen der inneren Körperschattengrenze von der oberen Hälfte zur unteren im Punkt xx' mit der Schleife im Grundriss, ebenso der Uebergang der äusseren Körperschattengrenze mit Fallen und Wiederaufsteigen in der Nähe des Punktes ww' unter Bildung einer kleinen Schleife im Aufriss. Auf der entgegengesetzten Seite der Röhre, an den Punkten y und z , verlaufen die Schattengrenzen ohne jeden Konflikt.

Ein eigenartiger Grenzfall für diese Uebergänge wird erhalten, wenn man den Steigungswinkel der leitenden Schraubenlinie der Röhre genau der Neigung des Lichtstrahls entsprechend, also gleich dem Winkel $\alpha = 35^\circ 15,9'$ annimmt. Ein Kreiscylinder, dessen Achse mit der Richtung des Lichtstrahls zusammenfällt, hat Körperschatten als Streiflicht auf der ganzen Mantelfläche. Wird er im Grundriss um einen kleinen Winkel flacher zum Grundriss gedreht, so erhält die rechte Hälfte Licht; wird er etwas steiler zum Grundriss gedreht, die linke. Dies angewendet auf den genannten Fall und auf den Normalschnitt wx mit zwei nahen Normalschnitten rechts und links von ihm ergibt folgendes: Eine obere Grenzkurve läuft stetig durch den höchsten Punkt des Normalschnitts wx , ebenso eine untere durch den tiefsten. Der Normalschnittkreis wx selbst ist ebenfalls Körperschattengrenze. Von den vier Flächenräumen, welche durch die drei Kurven abgegrenzt werden, haben zwei Scheitelräume Licht und zwei solche Schatten, und zwar sind im Schatten der äussere untere und der obere innere. In diesem Grenzfall findet also der Uebergang der Schattengrenze von oben nach unten und umgekehrt auf dem Normalschnittkreis selber statt. Wird

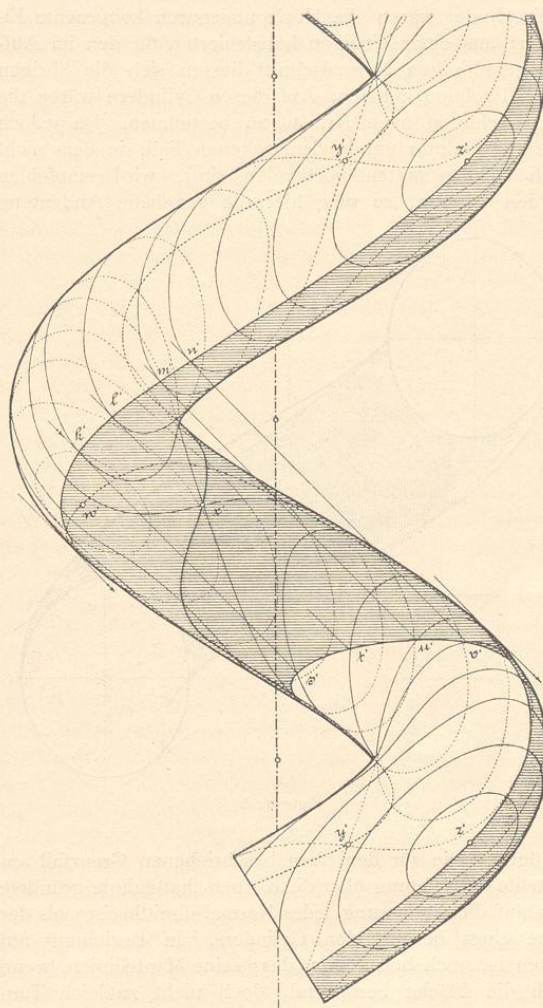
die Röhrenachse noch flacher angenommen, so trennen sich die Schattengrenzen wieder und verlaufen ohne Verwicklung, bis als weiterer Grenzfall der wagrecht liegende Wulst mit kreisförmiger Mittellinie (Figur 38 a) erreicht ist.

Die Schlagschattengrenzlinie wird auf dem oben beschriebenen Weg genügend scharf bestimmt; auch wird für sie ein anderes Verfahren kaum rascher zum Ziel führen. Dagegen kann man die Körperschattengrenze in

dass die kleine Achse der Kugelellipse immer in der Richtung des Lichtstrahls bleibt, so kann man auf jeden Normalschnitt die zwei Punkte durchstechen, in welchen die Kugelschattengrenze, also auch die Röhrenschattengrenze, die Normalschnittellipse schneidet. Für die Aufrisspunkte kann man entweder dasselbe Verfahren mit dem Aufriss der Kugel gegenüber den Aufrissellipsen der Normalschnitte anwenden, oder man kann die Grundrisspunkte



Figur 71 b.



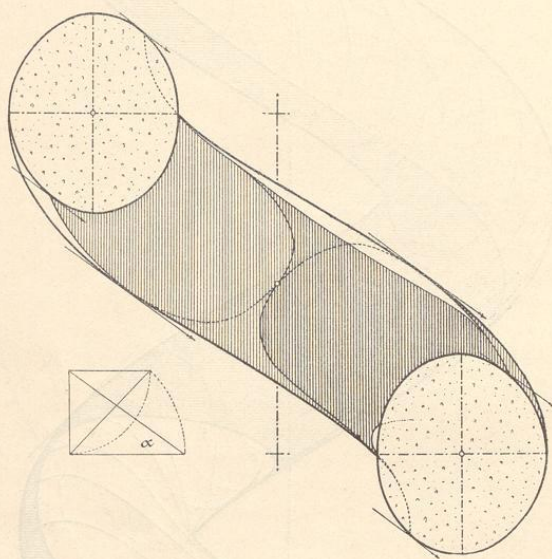
Figur 71 c.

der angegebenen Weise wegen der Unmöglichkeit der scharfen Bestimmung der Berührungspunkte, wenn auch wohl praktisch genügend, doch minder genau erhalten. Zu einer exakten Konstruktion führt die Betrachtung des Normalschnittkreises der Röhrenfläche als des Bestandteils der berührenden Kugelfläche. Legt man im Grundriss auf die elliptischen Projektionen der Normalschnitte nacheinander den Grundriss einer mit ihrer elliptischen Schattengrenze versehenen gleich grossen Kugel, und zwar so,

in den Aufriss hinaufloten, oder endlich man kann wieder die Höhenlage jedes Aufrisspunktes über oder unter dem Mittelpunkt seiner Kugel aus dem Grundriss ableiten. Der vertikale Abstand eines solchen Grenzpunktes vom Mittelpunkt seiner Kugel ist nämlich proportional dem Abstand seines Grundrisspunktes von der grossen Achse seiner Grundrissellipse, da alle Normalschnitte gleiche Horizontalneigung haben; an dem Normalschnitt, der sich im Aufriss als gerade Linie projiziert, lassen sich für alle

solche Grundrissabstände die zugehörigen Höhen leicht abnehmen. Diese Körperschattenbestimmung bildet einen Bestandteil der Konstruktion der Lichtstufenlinien, die in Art. 107 beschrieben ist, wonach in Beziehung auf den Gang der Konstruktion auf diesen Artikel verwiesen werden kann.

Ein dritter Weg wäre die Auffassung jedes Normalschnittkreises als der Zone einer schiefgerichteten Cylinderfläche mit diesem Normalschnitt. Für alle derart erhaltenen Kreiscylinder wären die Horizontalspuren kongruente Ellipsen; aus einer einzigen konstruierten für den im Aufriss geradlinigen Normalschnitt liessen sich die übrigen durch Drehung ableiten. Auf diesen Cylindern wären die Körperschatten nach Art. 49 zu bestimmen. Da jedoch dieses Verfahren nur in dem seltenen Fall, in dem nicht auch Schlagschatten vorhanden sind, wird empfohlen werden können, so mag hier die gegebene Andeutung

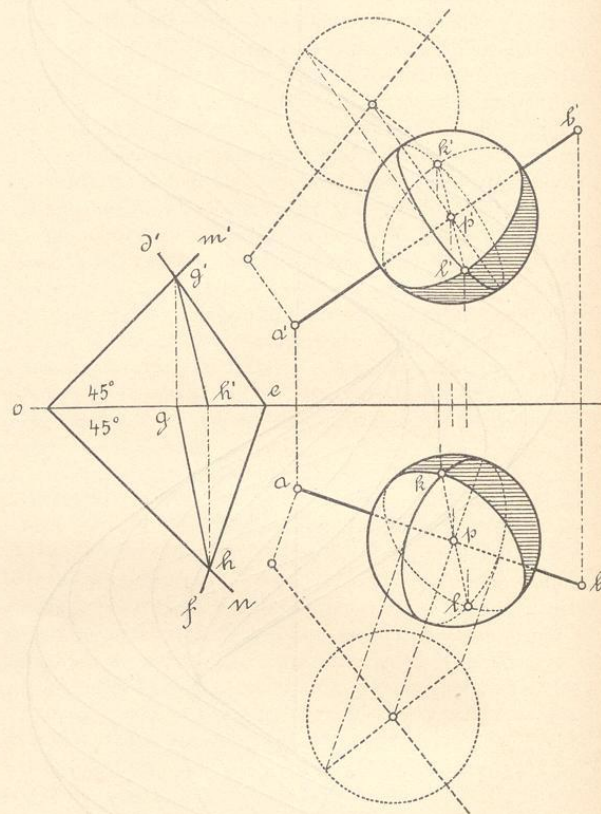


Figur 71 d.

genügen. Die für den oben beschriebenen Grenzfall angestellte Betrachtung über die Körperschattenlinie gründete sich auf die Auffassung jedes Normalschnittkreises als der Zone eines berührenden Cylinders. In Beziehung auf diesen ist noch beizufügen, dass seine Mantellinien, wenn auch die Fläche berührend, doch nicht zugleich Tangenten der Schraubenlinien auf der Röhrenfläche sind; diese haben ja verschiedene Neigungen und sind innen steiler als aussen, wogegen die Mantellinien des gedachten Cylinders alle die Neigung der leitenden Schraubenlinie haben. Die Tangenten an den Schraubenlinien erzeugen eine Fläche weit höherer Ordnung. Folgerichtig ist aber auch die Grundrissrichtung jeder solchen Tangente eine andere als die der Cylindermantellinie in demselben Punkt. Es gehen also durch den Berührungspunkt einer Tangentialebene an der Fläche drei Gerade, die alle in dieser Ebene liegen, erstens die Cylindermantellinie senkrecht zur Normalschnittebene oder parallel zur Tangente im zu-

gehörigen Punkt der leitenden Schraubenlinie, zweitens die Tangente am Normalschnittkreis, drittens die Tangente an der Schraubenlinie.

Tritt an die Stelle der Schraubenlinie der betrachteten Röhre eine beliebige andere Kurve, so erscheint der allgemeine Fall der Röhrenfläche mit kreisförmigem Normalschnitt. Auch dieser Fall kann als Umhüllungsfläche aller Lagen einer beweglichen unveränderlichen Kugel aufgefasst werden, deren Mittelpunkt auf der Kurve fortschreitet. Mit ebenen Kurven ist er häufig ver-



Figur 71 e.

wirklich (elliptischer Wulstring); als Beispiel für eine gewundene ausser der Schraubenlinie mag der Rundstab eines Bogengesimses (einer „Archivolte“) auf cylindrischer Wandfläche genannt werden.

Zur Bestimmung der Körperschattengrenze führt im allgemeinen am raschesten die oben bei der Schraubenröhre durchgeführte Betrachtung des Normalschnittkreises als der Berührungslinie der rückenden Kugel und die Bestimmung der Schattenpunkte auf diesem Kreis der Kugel. An die beliebig gekrümmte Achse der Röhre sei in einem bestimmten Punkt pp' (Figur 71 e) eine Tangente $ab a'b'$ gezogen worden. Man hat dann auf der mit ihren Körperschattengrenzen versehenen Umhüllungskugel in pp' den Kreis zu zeichnen, dessen Ebene normal zu dieser Tan-

gente steht. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit dem Körperschattenkreis der Kugel sind die Schattenpunkte kk' und ll' für den Normalschnitt der Röhre im Punkt pp' .

Der gesuchte Kreis projiziert sich in zwei Ellipsen, deren grosse Achsen senkrecht zu den Tangentenprojektionen stehen. Die kleine Achse im Grundriss ergibt sich aus der Umklappung der horizontalprojizierenden Ebene der Tangente in die Horizontalebene. In dieser Umklappung ist der Schnittkreis eine Gerade senkrecht zur umgeklappten Tangente; das Zurückklappen der Endpunkte dieser Geraden giebt die kleine Achse im Grundriss. Die Durchführung derselben Konstruktion im Aufriss liefert die kleine Achse der Aufrissellipse.

Das umständliche Konstruieren der beiden Ellipsen des Normalschnittkreises lässt sich nun aber ersparen und zwar dadurch, dass man die Schnittlinie $klk'l'$ der Ebenen beider Kreise unmittelbar aufsucht. Die Spuren einer Ebene, die senkrecht zu einer Geraden steht, sind senkrecht zu den Projektionen der Geraden gerichtet, also die Spuren der Ebene der Kugelschattengrenze senkrecht zu den Lichtstrahlprojektionen und die Spuren der Ebene des Normalschnittkreises senkrecht zu den Projektionen der Tangente. Sind also in Figur 71 $e om'$ und on senkrecht zu den Lichtstrahlprojektionen die Spuren der ersten Ebene, ferner $e d'$ senkrecht zu $a' b'$ und $e f$ senkrecht zu $a b$ die Spuren der zweiten, so geben die Projektionen der Schnittlinie beider Ebenen gh und $g' h'$ die Richtungen kl und $k' l'$, in welchen im Grundriss und Aufriss der Berührungskugel die Durchmesser durch den Mittelpunkt pp' zu ziehen sind, um als Schnitte mit den Schattenkreisprojektionen der Kugel die Punkte kk' und ll' zu liefern.

Zu grösserer Sicherheit in der Bestimmung der Tangentenprojektionen für einen ausgewählten Punkt einer doppelt gekrümmten Leitlinie kann man oft Gebrauch machen von der Thatsache, dass eine Tangente einer ebenen Kurve beim Aufwickeln der Kurvenebene auf einem vertikalen Cylinder ihre Horizontalneigung nicht ändert.

Die zuvor beschriebene Konstruktion der Körperschattengrenze einer Röhrenfläche mit kreisförmigem Normalschnitt vereinfacht sich wesentlich, wenn die Röhrenachse eine ebene Kurve parallel zu einer Grundebene wird, weil dann in der Projektion auf diese Grundebene alle Normalschnitte geradlinig werden. Die Körperschattengrenze ergibt sich in diesem Fall ohne Benützung eines Grundplans, indem der Aufriss der Umhüllungskugel samt ihrer Körperschattengrenze einmal gezeichnet und mit Durchmessern parallel zu den ausgewählten Normalschnitten versehen wird. Jede Normalschnittlinie im Aufriss der Fläche ist dann ebenso einzuteilen, wie der ihr parallele Durchmesser durch die Schattengrenzlinie der Kugel eingeteilt ist. (Vergl. Art. 58; die dort gezeichnete Figur kann auch für den vorliegenden Fall als Beispiel gelten.)

Für Schlagschatten auf solchen Flächen (mit eben gekrümmter oder doppelt gekrümmter Achse) wird kaum eine andere als die allgemeine Lösung für gekrümmte Flächen zu finden sein. Sie erfordert das Zeichnen von Linien, die von auszuwählenden Punkten des fortücken-

den Kreises beschrieben werden, in Grundriss und Aufriss, und es sind diese Linien ganz in derselben Weise zu benützen, wie die Schraubenlinien bei der schraubenförmigen Röhre. Sehr häufig wird jedoch dieses umständliche Verfahren dadurch umgangen werden können, dass mässig lange Stücke zwischen zwei Normalschnitten als Kreiscylinder betrachtet und mit Schattengrenzen beider Art bedacht werden. Dies ist zwar nur eine Annäherung und um so weniger streng richtig, je stärker die Krümmung der Röhrenachse; aber es wird in den meisten Fällen der praktischen Schattenkonstruktion genügen.

Röhrenflächen mit beliebigem, aber unveränderlichem Normalschnitt. 72.

Der einfachste Fall einer solchen ist die Cylinderfläche mit beliebigem Normalschnitt; Kreislinien des Fortschreitens ergeben Drehungsflächen. Beispiele für das Fortschreiten auf anderen eben gekrümmten Linien sind die Rundstäbe, Hohlkehlen, Karniese und Wellen der Gesimse mit elliptisch oder wellenförmig geschweiften Kanten, wie sie etwa der Barockstil anwendet, oder die Horizontalgesimse auf ebenso im Grundriss geschweiften Wandflächen. Doppelt gekrümmte Linien des Fortschreitens bieten die zuvor genannten geschweiften Gesimse, wenn sie auf cylindrischer Wandfläche auftreten.

Jeder Normalschnitt einer solchen Fläche lässt sich als eine niedrige Zone eines Cylinders vom selben Normalschnitt auffassen, dessen Mantellinien parallel sind der Tangente an der Kurve des Fortschreitens in dem Punkte des Normalschnitts.

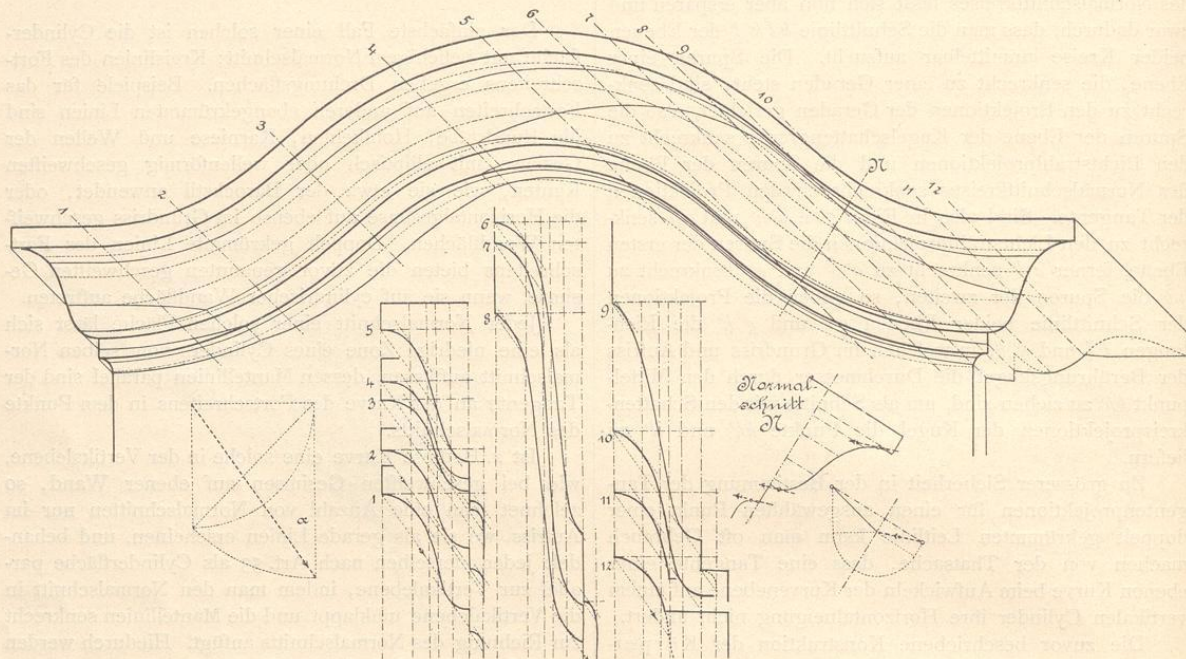
Ist z. B. diese Kurve eine solche in der Vertikalebene, wie bei geschweiften Gesimsen auf ebener Wand, so zeichnet man eine Anzahl von Normalschnitten nur im Aufriss, wo sie als gerade Linien erscheinen, und behandelt jeden derselben nach Art. 53 als Cylinderfläche parallel zur Vertikalebene, indem man den Normalschnitt in die Vertikalebene umklappt und die Mantellinien senkrecht zur Richtung des Normalschnitts anfügt. Hiedurch werden auf jedem Normalschnitt die Punkte der Körperschattengrenze erhalten. Schlagschatten einer Selbstbeschattung können zunächst nach dem allgemeinen Verfahren erhalten werden, indem man die äquidistanten Kurven zeichnet, die bestimmte Punkte der Normalschnittkurve bei deren Bewegung beschreiben; als Schnittebenen wird man dabei im allgemeinen besser die vertikalprojizierenden als die vertikalen wählen, und oft ohne Grundriss mit Hilfe der leicht erhältlichen Umklappungen der Schnittlinien in die Vertikalebene arbeiten, indem man in einer besonderen Figur alle Schnittlinien als Profile verschiedener Höhe, aber gleicher Ausladung aufeinanderlegt und die veränderte Richtung des Lichtstrahls für die Umklappung mit dem Winkel α berücksichtigt. Wenn man aber einmal solche Schnitte der Schlagschatten wegen einzuführen hat, so benützt man sie zweckmässig auch für die Körperschattengrenze, und es entfällt dann deren zuerst beschriebene Bestimmung.

Figur 72a bietet ein durchgeführtes Beispiel. Unter der Hauptfigur sind die Schnittkurven der vertikalprojizierenden

zierenden Ebenen 1 bis 12 herausgetragen; links unten ist die Richtung des Lichtstrahls für die Ebenen dieser Schnittkurven bestimmt und diesen letzten sind sowohl die berührenden als die schlagschattengebenden Lichtstrahlen beigelegt. Rechts unten erscheint die zuerst beschriebene Bestimmung der Körperschattenpunkte für den Normalschnitt N mit Verwertung von Art. 53.

Wenn die Schlagschattengrenze auf der Fläche von einem Flächenrand erzeugt wird, wie in Figur 72 a, so giebt es noch ein zweites Verfahren zu ihrer Bestimmung, verwandt mit demjenigen aus Art. 61 für Drehungsflächen. Man sucht den Schlagschatten des Flächenrandes auf einer Schnittebene, die zur Vertikalebene parallel steht; die Schattenlinie wird kongruent der Randlinie und nur in der

der in dem Rahmengesims um einen Steinbogen in kreis-cylindrischer Mauer auftritt, wobei die ursprünglich in einer Vertikalebene liegende kreisbogenförmige Unterkante des Bogengesimses samt ihrer Vertikalebene und dem Gesims darauf auf der cylindrischen Wand aufgewickelt zu denken ist. Jede gerade Linie als Basis eines Normalschnittprofils in dem auf der Vertikalebene stehenden Gesims verwandelt sich bei diesem Aufwickeln in eine Schraubenlinie, und die horizontalen, zur Vertikalebene senkrechten Abscissen der Normalschnittprofilinie in deren eigener Ebene bilden nach dem Aufwickeln, indem sie sich normal zur Cylinderfläche stellen, eine Wendelfläche, so dass auch die ursprünglich ebene Normalschnittprofilinie eine doppelt-gekrümmte Kurve, und zwar eine solche in einer Wendel-



Figur 72 a.

Richtung des Lichtstrahls verschoben. Die Schnittlinie der Ebene mit der Fläche ist eine der oben genannten äquidistanten Kurven und leicht erhältlich. Wo sie geschnitten wird von jener Schlagschattenlinie, da ist ein Schlagschattengrenzpunkt auf der Fläche.

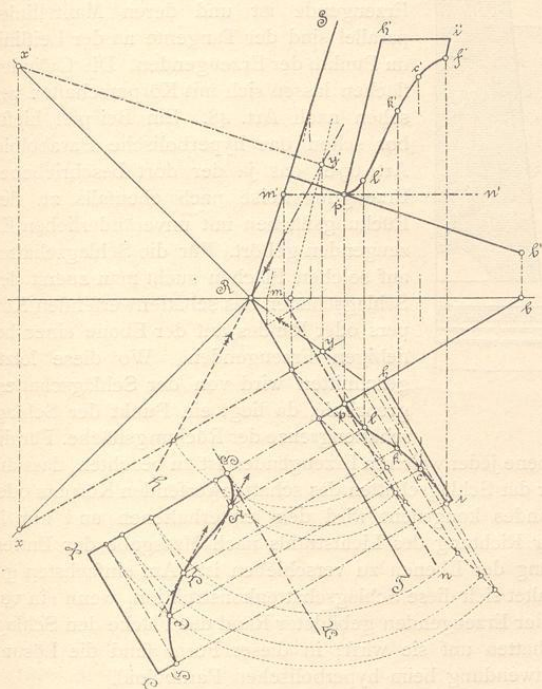
Uebrigens wird es auch hier für manche Fälle der praktischen Schattenkonstruktion genügen, wenn mässig lange Stücke der Fläche zwischen zwei Normalschnitten als Cylinderflächen betrachtet und sowohl in Beziehung auf die Schlagschattengrenze einer Selbstbeschattung als auf die Körperschattengrenzen als solche behandelt werden. Die gebrochenen Linien, die bei diesem Näherungsverfahren für die Schattengrenzen entstehen, sind leicht durch stetige zu ersetzen.

Schwieriger, aber auch theoretisch interessanter wird die exakte Schattenkonstruktion bei doppelt gekrümmten Kurven des Fortschreitens, etwa bei einem Glockenleisten,

fläche wird. Trotz dieser verwickelten Form lässt sich jede solche Kurve mit Hilfe der Uebertragung jener horizontalen Abscissen in die Aufwicklung unschwer darstellen. Verbindet man die einander entsprechenden Punkte der Profillinien in der Aufwicklung, so erhält man in Grundriss und Aufriss die äquidistanten Linien, welche die Punkte der Profillinie bei deren Bewegung auf der Cylinderfläche beschreiben; diese Linien können auch hier die Grundlage des allgemeinen Verfahrens bilden, das jedoch in diesem Fall nur mit vertikalstehenden Schnittebenen parallel zum Lichtstrahl durchgeführt werden kann. Bei kreis-cylindrischer Mauer werden die Linien selbstverständlich im Grundriss konzentrische Kreise.

Mit der angegebenen Erzeugungsweise entfernt sich übrigens das Gesims-glied ein wenig von dem eingeführten Begriff der Röhrenfläche, in dem nicht mehr die ebenen Normalschnitte kongruent sind, und es wären streng ge-

Für eine strenge Röhrenfläche mit beliebig gewundener Leitlinie ist schon das Aufzeichnen der Umrisse und Kanten der Fläche eine sehr zeitraubende Arbeit, mehr noch die Schattenkonstruktion; doch mag sie in den Grundzügen



hier beschrieben werden. Sind nur Körperschattengrenzen zu suchen, so kann die Auffassung jedes Normalschnitts als eines kurzen Cylinderstücks zur Lösung dienen. Als gegeben ist zu betrachten (Figur 72 b) erstens die Profilinie der Röhre $FPHJ$ mit Beifügung einer in ihrer Ebene liegenden Geraden PN , welche die in allen Normalschnitten unveränderliche Lage der Hauptnormalen zur Leitlinie gegenüber der Profilinie darstellen soll, zweitens die Projektionen $p'b'p'$ der Tangente an der Leitlinie in dem für einen Normalschnitt ausgewählten Punkt pp' der Leitlinie, drittens die beiden Projektionen $pn'p'n'$ der Hauptnormalen im Punkt pp' , welche senkrecht zur Tangente $p'b'p'$ gerichtet sein muss und für den gewählten Normalschnitt horizontal angenommen ist, aber auch geneigt sein könnte.

linie des gedachten Cylinders, also rechtwinklig. Werden an den Normalschnitt mit der so erhaltenen, für seine Ebene gültigen Lichtrichtung Tangenten gezogen, so gehören deren Berührungspunkte der gesuchten Körperschattengrenze an.

Die Richtung der Spuren SR und RT der Normalschnittebene ist rasch erhältlich; sie stehen senkrecht zu den gleichnamigen Projektionen $p'b'$ und $p'b$ der Tangente. Da die Hauptnormale in der Normalschnittebene liegt, so müssen die Spuren der letzten durch die Spuren der ersten gehen, also muss die Vertikalspur SR durch m' gezogen werden.

Um den durch den Winkelpunkt R der Spuren gezogenen Lichtstrahl rechtwinklig auf die Normalschnittebene zu projizieren, fällt man aus einem beliebigen Punkt xx' des Lichtstrahls ein Loth $xy\ y'y'$ auf diese Ebene und verbindet den Fußpunkt yy' dieses Lothes mit dem Winkelpunkt R ; die Verbindungslinie $Ry\ Ry'$ giebt die in der Normalschnittebene gültige Lichtrichtung an.

Man klappt nun die Normalschnittebene samt dieser Lichtrichtung und der Hauptnormalen in eine Grundebene um, fügt in der Umklappung an die Hauptnormale PN die Profilinie der Röhre $FPHJ$ in der gegebenen Lage und bestimmt die Berührungspunkte K und L der in der gefundenen Lichtrichtung YR gezogenen Tangenten an der Profilinie. Durch Zurückklappen dieser Punkte und einer genügenden Zahl von andern Punkten C der Profilinie erhält man in den Projektionen gleichzeitig die Schattenspunkte und die zum Zeichnen der Umrisslinie der Röhre notwendigen Normalschnittlinien.

Sind auch Schlagschattengrenzen zu bestimmen, so verschafft man sich mit Hilfe der Umklappung nur die zwei Projektionen der Normalschnittlinie für eine Reihe von Punkten pp' , verbindet kongruent liegende Punkte cc' , um die Kurven zu erhalten, welche bestimmte Punkte der Profillinie bei Erzeugung der Fläche durchlaufen, und benutzt diese Kurven zur Durchführung des allgemeinen Verfahrens für gekrümmte Flächen.

In Figur 73 ist eine solche Fläche gezeichnet. Die Leitlinie als Mittellinie einer Volutenkonsole ist eine ebene Kurve; ihre Ebene ist parallel zur Seitenebene; sie erscheint also in der als Linksansicht gezeichneten Seitenprojektion in ihrer wahren Gestalt. Die Erzeugende ist eine Wellenlinie, die geometrisch ähnlich bleibend im Fortschreiten nach unten ihre Pfeilhöhen im selben Mass verjüngt, wie ihre Längen sich zwischen den beiden senkrecht zur Vertikalebene stehenden Grenzebenen vermindern. Diese Normalschnitte oder Lagen der Erzeugenden projizieren sich in der Seitenprojektion als gerade Linien normal zur Leitlinie.

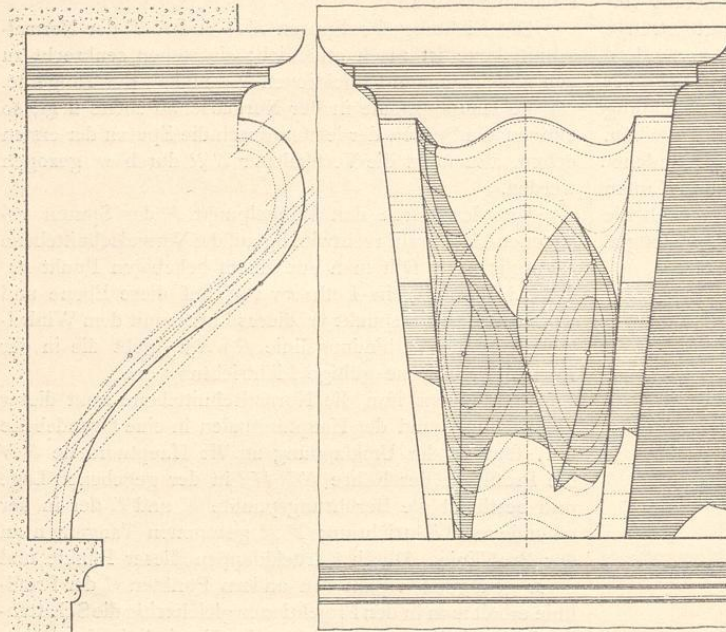
Die Schattenkonstruktion ist die strenge Durchführung des allgemeinen Verfahrens mit Benützung der seitlich projizierenden Lichtstrahlenebenen als Schnittebenen, wobei sich eine interessante Schnittkurvengruppe auf einfachem Weg ergeben hat.

Für solche Flächen mit gewundenen Leitlinien (Bei-

spiele gewundene Hornformen oder gewundene Rokoko-
gesimse, die ihr Profil im Fortschreiten verjüngen) dürfte
ebenfalls nur das allgemeine Verfahren anwendbar sein.
Hiebei wären für eine genügende Zahl von Normalschnitten

normal zur Leitlinie bleibt, während sie bei dieser
immer parallel gerichtet ist, ferner bei dieser auch eine
Verdrehung stattfinden kann, bei jener nicht.

Der einfachste Fall der Rückungsfläche ist derjenige,
in welchem die rückende Kurve immer
kongruent und gleichgerichtet bleibt. Hie-
für sei zunächst der Fall des Fortschreitens
auf ebener Kurve ins Auge gefasst. Aus
dem Begriff der Fläche folgt in diesem Fall,
dass alle ihre ebenen Schnitte parallel zur
Ebene der Leitlinie dieser kongruent sind.
Jede Lage der Erzeugenden lässt sich auf-
fassen und schattieren als eine niedrige
Zone einer Cylinderfläche, deren Basis die
Erzeugende ist und deren Mantellinien
parallel sind der Tangente an der Leitlinie
im Punkte der Erzeugenden. Die Cylinder-
flächen lassen sich mit Körperschaften ver-
sehen nach Art. 48. Ein Beispiel hiefür
bot schon das hyperbolische Paraboloid,
Art. 69e, das ja der dort beschriebenen
Erzeugungsweise nach ebenfalls zu den
Rückungsflächen mit unveränderlichen Er-
zeugenden gehört. Für die Schlagschatten
auf solchen Flächen sucht man zuerst den
Schlagschatten des schattenwerfenden Kör-
pers oder Randes auf der Ebene einer be-
liebigen Erzeugenden. Wo diese letzte
geschnitten wird von der Schlagschatten-
grenzlinie, da liegt ein Punkt der Schlag-
schattengrenze der Rückungsfläche. Für die



Figur 73.

die beiden Projektionen ganz in derselben Weise durch
Umklappungen zu beschaffen und durch Verbinden ähn-
lich liegender Punkte zu verwerthen, wie für die Flächen
mit unveränderlicher Erzeugenden am Schluss des Art. 72
beschrieben ist.

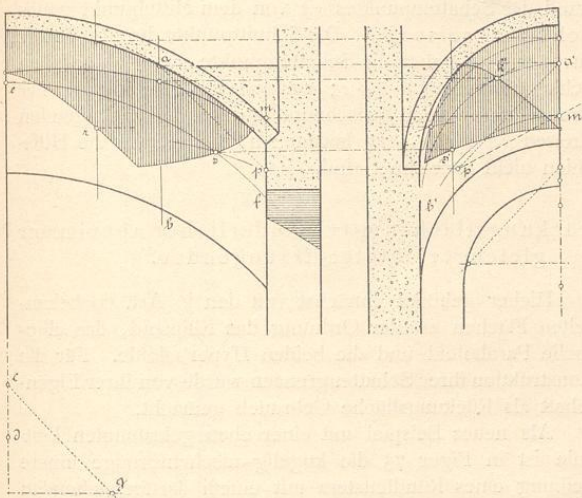
74. Rückungsflächen mit gleichgerichtet fortschrei-
tender, unveränderlicher Erzeugenden.
Steigendes Tonnengewölbe mit bogenför-
miger Scheitellinie. Gewundene Säule.

Rückungsflächen entstehen, wenn eine beliebige
ebene Kurve mit einem bestimmten Punkt ihrer Ebene
auf einer beliebigen Leitlinie derart fortschreitet, dass ihre
Ebene immer parallel bleibt, ihre Form immer unverändert
oder geometrisch ähnlich bleibt und im letzten Fall ihre
Grösse sich nach einem bestimmten Gesetz ändert, das
gewöhnlich durch eine zweite Kurve, die ein zweiter Punkt
der Erzeugenden oder ihrer Ebene beschreibt, dargestellt
ist. Gewöhnlich bleibt die rückende Kurve gleichgerichtet;
doch sollen hier zu den Rückungsflächen im weitesten
Sinn auch solche Flächen gerechnet werden, bei welchen
die Erzeugende, indem ihre Ebene parallel fortrückt, in
dieser Ebene sich dreht, und zwar nach irgend einem
Gesetz, das von demjenigen des Parallelrückens abhängig
ist. Hienach scheiden sich die hier im weitesten Sinne
gebrauchten Begriffe „Röhrenfläche“ und „Rückungsfläche“
dadurch, dass bei jener die Ebene der Erzeugenden immer

Ebene jeder weiteren Erzeugenden ist zu beachten, dass auf
ihr der Schlagschatten des schattenwerfenden Körpers oder
Randes kongruent wird dem ersterhaltenen und nur in
der Richtung des Lichtstrahls nach Massgabe der Entfer-
nung der Ebenen zu verschieben ist. Am einfachsten ge-
staltet sich diese Schlagschattenkonstruktion, wenn ein von
einer Erzeugenden gebildeter Rand der Fläche den Schlag-
schatten auf sie wirft; in dieser Form fand die Lösung
Anwendung beim hyperbolischen Paraboloid.

In Figur 74a ist als einfaches Beispiel mit kreisförmiger
vertikalstehender Erzeugenden und kreisförmiger Leitlinie
ein steigendes Tonnengewölbe mit bogenförmiger Scheitel-
linie gewählt und durch Längenschnitt und Vorderansicht
dazu dargestellt. Die Leibungsfläche erzeugt sich ent-
weder durch paralleles Rücken des (halben) Stirnbogens
an der Scheitellinie oder durch Rücken des Scheitelbogens
am Stirnbogen; beide Erzeugungen liefern dieselbe Fläche.
Zur Bestimmung der Körperschattengrenze ist für einen
ausgewählten Vertikalschnitt $ab'a'b'$, der sich im Längens-
schnitt als Vertikallinie projiziert, die Tangente am an die
Scheitellinie zu ziehen und auf das erhaltene kurze Stück
eines gerade steigenden Tonnengewölbs die Konstruktion
aus Art. 52 anzuwenden. Es ist also am bis zum Schnitt
mit der Bogenwandebene zu verlängern, m nach m' hin-
überzutragen und durch aa' der Lichtstrahl $ap'a'p'$ bis
zum Schnitt mit der Bogenwandebene in pp' zu ziehen.
Der Berührungspunkt k' einer an den Schnittkreis $a'b'$
parallel zu $m'p'$ gezogenen Tangente ist ein Körperschatten-

grenzpunkt. Die Punkte erscheinen zuerst in der Vorderansicht (oder Seitenprojektion) und sind in den Längenschnitt (oder Aufriss) hinüber zu linieren. Für die Bestimmung eines Schlagschattengrenzpunktes ist eine Lage der fortrückenden Scheiteltangentenlinie im Längenschnitt gezeichnet; sie bildet einen kongruenten Bogen ef mit vertikal fortgeschobenem Mittelpunkt d . Wo diese Erzeugende geschnitten wird von dem Schlagschatten, den der Scheiteltangentenbogen auf ihre Ebene wirft, da ist ein Schlagschattengrenzpunkt s . Der Schlagschattenkreis ist ein kongruenter Kreis aus dem Mittelpunkt g . Da auch der Stirnbogen einen Teil der Selbstbeschattungsgrenze der Fläche wirft, so ist für die Stirnbogenlinie in der Seitenprojektion dieselbe Konstruktion durchzuführen wie für den Scheiteltangentenbogen im Aufriss. (Die Konstruktion ist dargestellt durch den Schlagschattengrenzpunkt r mit seinen Hilfslinien.) Zu-



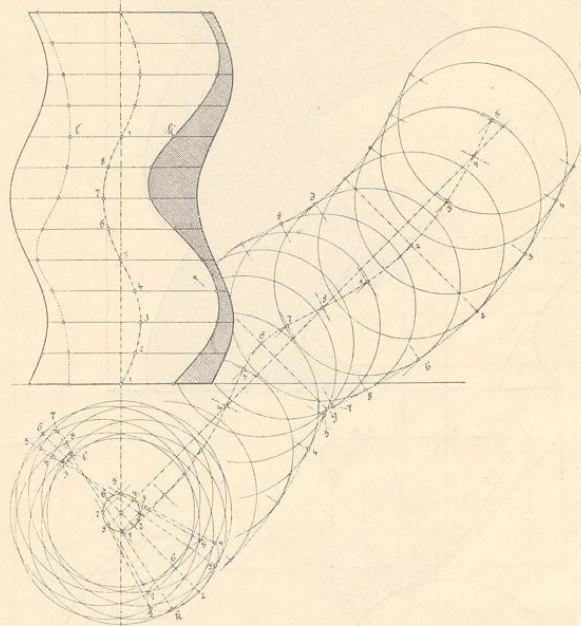
Figur 74 a.

letzt sind die im Aufriss erhaltenen Schlagschattenpunkte hinüberzuliniieren in die Seitenprojektion, ebenso die in dieser erhaltenen in den Aufriss.

Von den selten verwirklichten Rückungsflächen mit gewundener Leitlinie und unveränderlicher Erzeugenden ist die nächstliegende und interessanteste der Schaft der gewundenen Säule des Barockstils. Dieses Gebilde ist nicht etwa als steile schraubenförmige Wulstfläche nach Art. 71 zu gestalten, da der Horizontalschnitt einer solchen keinen Kreis liefert, also Basis und Kapitäl der Säule im Grundriss nicht kreisförmig sein könnten. Vielmehr ist die gewundene Säulenschaftfläche dadurch zu erzeugen, dass der Mittelpunkt eines horizontalen unveränderlichen Kreises auf einer steilen Schraubenlinie mit vertikaler Achse ansteigt (Figuren 74b und 74c). Die Umrisslinien im Aufriss werden der Projektion dieser Schraubenlinie kongruent, da alle Kreispunkte, also auch die beiden äussersten, im Aufsteigen kongruente Schraubenlinien beschreiben.

In Figur 74 b ist die Körperschattengrenze ähnlich bestimmt wie für die Drehungsflächen nach Art. 59. Auf der Horizontalebene sind die Schlagschatten einiger Lagen

123 u. s. w. des erzeugenden Kreises gezeichnet; die Umhüllungslinien dieser Kreise sind die Schlagschattengrenzen des Schaftes, also von den Körperschattengrenzen geworfen. Bestimmt man möglichst genau die Berührungspunkte b und d dieser Umhüllungslinien und eines Schattenkreises i , so erhält man in ihnen die Schlagschatten des Körperschattengrenzpunktes, die auf dem erzeugenden Kreis i liegen. Wenn daher durch die Punkte b und d ein Lichtstrahl rückwärts gezogen oder im Grundriss durch den Mittelpunkt i des erzeugenden Kreises eine Parallele zu dem Durchmesser bd des Schattenkreises i gezogen wird, so schneidet der Lichtstrahl oder diese Parallele den Grundrisskreis i in den Körperschattenpunkten k und l , die in den Aufriss nach k' und l' hinaufzuloten sind.



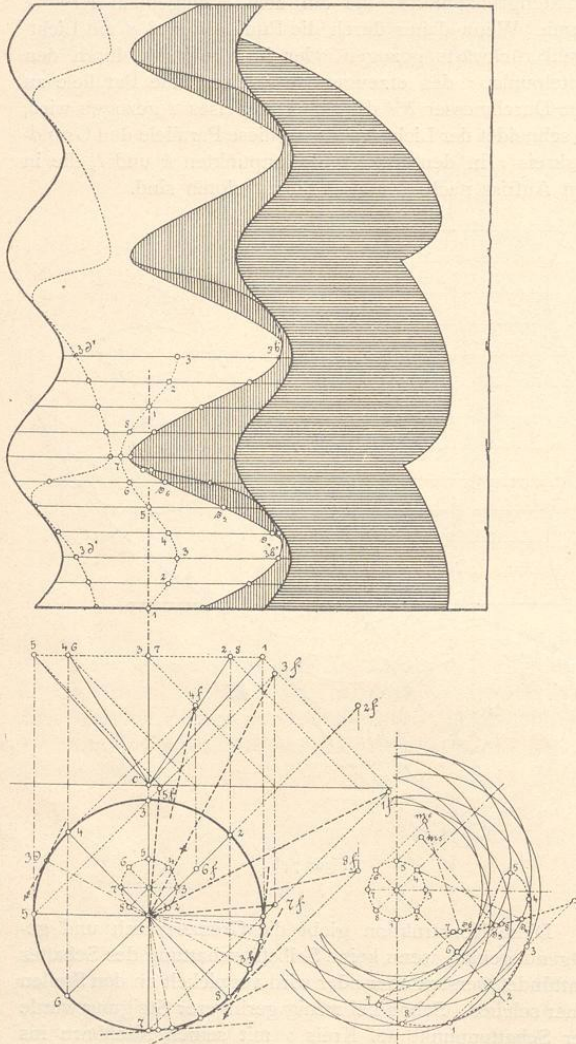
Figur 74 b.

Diese Konstruktion giebt die Grenze rasch und genügend genau, wenn keine Selbstbeschattung des Schaftes stattfindet, versagt aber oder wird verwickelt an den Stellen einer solchen. Schon bei wenig geringerer Steigung würde der Schattenpunkt auf Kreis 6 mit seinen Nachbarn ins Innere der Schattenfläche rücken und daraus Selbstbeschattung der Schaftfläche zu erkennen sein.

Figur 74c bietet neben der Bestimmung einer solchen Selbstbeschattung eine andere, kaum minder einfache Konstruktion für die Körperschattengrenze. Jeder Horizontalkreis des Schaftes ist aufgefasst als Zone eines niedrigen schiefen Cylinders, dessen Basis der Horizontalkreis und dessen Achse die Tangente an der leitenden Schraubenlinie im Mittelpunkt des Kreises. Wo die Körperschattenpunkte auf diesem Kreis liegen als auf einem Bestandteil der Cylinderfläche, da müssen sie auch für die Schaftfläche liegen. Die Schattenpunkte auf den Cylindern sind nach Art. 49 bestimmt; der grössere Grundrisskreis

um c ist als gemeinschaftlicher Basiskreis für alle Cylinderflächen benützt.

Durch einen beliebigen Punkt cc' der Horizontalebene sind Parallelen zu den Tangenten in den Punkten 1 bis 8 an der leitenden Schraubenlinie gezogen, wofür die Steigung dieser durch Verstreckung ihres Grundrisskreises zu



Figur 74 c.

bestimmen war. Diese Parallelen bilden 8 Mantellinien $c'1$ $c'2$ $c'3$ u. s. w. einer geraden Kreiskegelfläche mit nach unten gerichteter Spitze cc' . Durch die Basispunkte 1 2 3 u. s. w. dieser Kegelfläche sind Lichtstrahlen bis zum Schnitt mit der Horizontalebene gezogen. Die Verbindungslinie des hiedurch erhaltenen Schnittpunktes $3f$ mit c giebt die Richtung $3fc$, mit welcher an den erzeugenden Kreis 3 die Tangenten zu ziehen sind, deren Berührungspunkte $3b$ und $3d$ die Körperschattenpunkte der Schafffläche auf Kreis 3 darstellen. Im Aufriss können nun von Punkt 3 der Leitlinie aus die im Grundriss er-

haltenen Horizontalmasse für die Schattengrenzpunkte $3b'$ und $3d'$ aufgetragen werden, und in derselben Weise dient der einzige Grundrisskreis für alle Lagen des Horizontal-schnittkreises.

Zur Bestimmung der Grenze der Selbstbeschattung ist im Hilfsgrundriss rechts der Schlagschatten des Körperschattengrenzstücks 781 auf der Horizontalebene des erzeugenden Kreises 4 gezeichnet. Wo dieses Schattenstück geschnitten wird von dem Grundrisskreis 4, da ist der Schlagschattenpunkt auf dem Kreis 4; wo es geschnitten wird von den leicht erhältlichen Schlagschatten der Kreise 5 und 6 auf derselben horizontalen Ebene, da sind die Schlagschattenpunkte für die Kreise 5 und 6 in dem Sinne, dass im Aufriss die horizontale Entfernung des Schattenpunktes s_5 von seinem Mittelpunkt 5 dieselbe sein muss, wie im Hilfsgrundriss der horizontale Abstand des Schattenpunktes s_5 von dem Mittelpunkt seines Schattenkreises m_5 . Die Schnittpunkte der drei Kreise aus 4 m 5 m 6 gaben die Schattenpunkte s_4 s_5 s_6 auf dem Schlagschattenstück 781; zur sicheren Bestimmung der Grenze waren noch Zwischenpunkte auf den erzeugenden Kreisen 5,5 und 6,5 zu bestimmen, für welche die Hilfslinien nicht gezeichnet sind.

Rückungsflächen mit veränderlicher, aber immer 75, gleichgerichteter Erzeugenden.

Hierher gehören zunächst von den in Art. 69 behandelten Flächen zweiter Ordnung das Ellipsoid, das elliptische Paraboloid und die beiden Hyperboloide. Für die Konstruktion ihrer Schattengrenzen wurde von ihrer Eigenschaft als Rückungsfläche Gebrauch gemacht.

Als neues Beispiel mit einer eben gekrümmten Leitlinie ist in Figur 75 die kugelig-nischenförmige innere Leibung eines Rundfensters mit einem darüberstehenden „Kernbogen“ gewählt. Für die Fensterleibung ist zunächst der Höhenschnitt mit dem oberen und unteren Umriss der Fläche festgesetzt, und zwar jener gerade, dieser als konkave Kreislinie. Die Fläche selbst ist dann durch Rücken eines veränderlichen Kreises parallel zur Wandebene erzeugt, wobei die Endpunkte des vertikalen Kreisdurchmessers immer auf jenen beiden Leitlinien bleiben.

Jede Zone einer solchen Rückungsfläche zwischen zwei einander nahe liegenden verschieden grossen Erzeugenden lässt sich auffassen und schattieren als niedrige Zone einer Kegelfläche, wobei die kurzen Stücke der von geometrisch-ähnlich liegenden Punkten bei der Erzeugung beschriebenen Kurven zu Mantellinien der Kegelfläche geworden sind. Fallen die beiden Erzeugenden in eine zusammen, so gehen die Mantellinien in Tangenten an jenen Kurven über. Die Spitze des gedachten Kegels ist erhältlich als Schnittpunkt zweier solcher Tangenten. Wo die Körperschattenpunkte auf der Erzeugenden liegen als auf der Basis des Kegels, da liegen sie auch für die Rückungsfläche. (Die Betrachtung würde auch für eine gewundene Leitlinie gelten.)

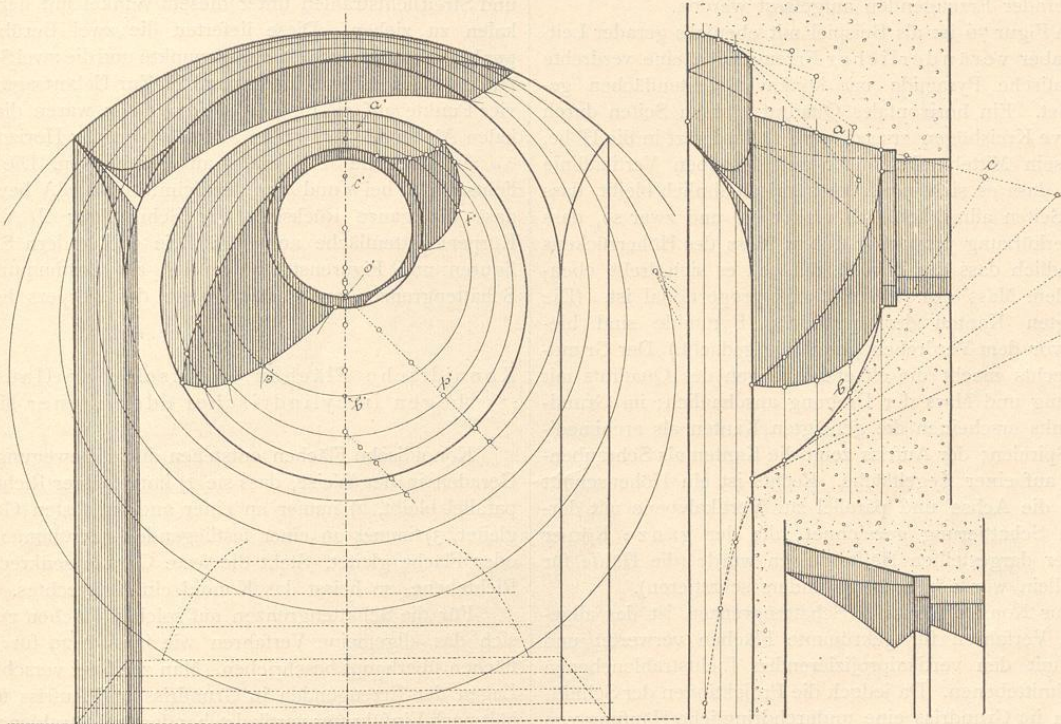
In dem eingeführten Beispiel wird für die Lage ab der Erzeugenden die Spitze c des Kegels im Höhenschnitt der Leibungsfläche erhalten als Schnitt der verlängerten oberen

Leitlinie mit der Tangente bc an der unteren Leitlinie im Fusspunkt b der Erzeugenden. Die Bestimmung der Körperschattenpunkte auf der Erzeugenden erfolgt nach Art. 46; Hilfslinien hiefür sind nicht eingezeichnet.

Der Schlagschatten auf einer solchen Rückungsfläche wird auf demselben Weg erhalten wie für die Rückungsflächen mit unveränderlichen Erzeugenden. Bei dem gewählten Beispiel wirkt für die Frontansicht des Fensters der kreisförmige Rand den Schlagschatten, so dass die Schattenpunkte in einfacher Weise je als Schnittpunkte zweier in Frontansicht erscheinender Kreise auftreten. So sind z. B. die Punkte s' und t' erhalten als Schnitte des aus p' mit dem Radius des Randkreises o' beschriebenen Kreises mit

den Höhenschnitt auf die Vertikallinie für die Ebene der Erzeugenden hinüberliniert werden kann. Zu beachten ist, dass hiefür die Lichtstrahlrichtung in der Frontansicht von rechts oben nach links unten geht.

Was den über dem Rundfenster befindlichen „Kernbogen“ betrifft, so ist er erzeugt wie folgt: Als gegeben ist betrachtet die untere halbkreisförmige Stirnbogenlinie, die zwei Bogenlinien in den Vertikalebenen der seitlichen Leibungsflächen, welche diese nach oben begrenzen, und die ebenfalls kreisbogenförmige Scheitellinie des Bogens. Der untere Stirnbogen gleitet nun parallel bleibend und sich allmählich vergrößernd einerseits an den zwei Leibungsbögen, andererseits am Scheiteltbogen. Zur Kon-



Figur 75.

dem Kreis $a'b'$. Punkt p' liegt unter o' um die horizontale Entfernung der Ebenen des Randkreises und des Schnittkreises ab .

Der erste Höhenschnitt zeigt die Ansicht der linken Hälfte des Fensters mit den Schatten wie sie die Frontansicht darbietet; die Schattenlinien der rechten Seite sind einpunktig; wogegen der zweite Höhenschnitt dieselbe Hälfte so zeigt, als ob die rechte Hälfte nicht da und die Richtung des Lichtstrahls für den Grundriss dieser Figur die gewöhnliche wäre. Um in diesem zweiten Höhenschnitt den Schlagschatten der geraden oberen Schnittkante auf der Leibungsfläche zu suchen, zeichnet man in der Vorderansicht die leicht erhältlichen Schlagschatten dieser Kante auf den Ebenen der Erzeugenden. Wo ein solcher Schlagschatten die erzeugende Kreislinie seiner Ebene schneidet, da ist ein Schlagschattenpunkt, der in

struktion sind verschiedene Lagen des erzeugenden Kreises gezeichnet und zu Vollkreisen ergänzt, um im Höhenschnitt die untere Umrisslinie der erzeugten Fläche zu erhalten, welche (wie die untere Umrisslinie der Fensterleibung) zur Bestimmung der Kegelspitzen notwendig ist. Im übrigen ist die Konstruktion der Schattengrenzen von derjenigen bei der Fensterleibung nur darin verschieden, dass bei Bestimmung der Kegelspitzen anstatt der geraden oberen Umrisslinie die Tangenten der gekrümmten zu benützen sind.

Ein Beispiel einer hieher gehörigen Rückungsfläche mit gewundener Leitlinie wäre der Schaft einer gewundenen Säule mit Verjüngung nach oben, wobei entweder die Durchmesser der erzeugenden Kreise der Figuren 74b und c proportional dem Mass des Höherrückens kleiner würden, oder alle Horizontalschnitte den gleich hochliegen-

den einer nicht gewundenen, aber „geschwellten“ Säule kongruent wären.

76. Rückungsflächen mit drehend fortschreitender, veränderlicher oder unveränderlicher Erzeugenden.

Hierher gehören als einfache Beispiele mit unveränderlichen Erzeugenden die Wendelflächen und die verdrehten Stabformen aus Art. 70 und 106; die Leitlinie ist hiebei eine Gerade; der Winkel der Drehung ist proportional dem Masse des Fortrückens. Auch die Konoide (Art. 77) können als solche Rückungsflächen mit drehender gerader Erzeugenden aufgefasst werden.

In Figur 76 ist als Beispiel mit ebenfalls gerader Leitlinie, aber veränderlicher Erzeugenden eine verdrehte quadratische Pyramide mit konkaven Seitenflächen gezeichnet. Ein horizontales Quadrat, dessen Seiten durch konkave Kreisbögen ersetzt sind, rückt derart in die Höhe, dass sein Mittelpunkt immer auf derselben Vertikallinie bleibt, dass es sich immer geometrisch ähnlich bleibt, dass seine Seiten allmählich sich verkürzen, und zwar so, dass die Verkürzung proportional dem Masse des Höherrückens ist, endlich dass der Winkel, um den es sich dreht, ebenfalls dem Masse des Höherrückens proportional ist. (Die geneigten Kanten der verdrehten Pyramide sind hienach vor dem Verdrehen geradlinig gedacht.) Der Grundriss rechts macht die elf ersten Lagen des Quadrats mit Richtung und Masse der Drehung anschaulich; im Grundriss links erscheinen die geneigten Kanten als archimedische Spiralen; der Aufriss zeigt die Kanten als Schraubenlinien auf einer Kegelfläche. Rechts ist ein Höhenschnitt durch die Achse und parallel zur Vertikalebene mit derselben Schattierung gezeichnet, die der ganze Körper auf der dargestellten Hälfte zeigen würde (die Hälfte für sich allein würde sich etwas anders schattieren).

Zur Konstruktion der Schattengrenzen ist das allgemeine Verfahren für gekrümmte Flächen verwertet und zwar mit den vertikalprojizierenden Lichtstrahlenebenen als Schnittebenen. Da jedoch die Projektionen der Schnittkurven im Grundriss eine undurchdringliche Häufung von Linien ergeben hätten, so sind sie in wahrer Gestalt getrennt herausgetragen worden, wie in Figur 72a. Für den Schnitt MN z. B. wurde zuerst (Figur rechts oben) auf einer Vertikallinie 1 2 3 . . . 8 die Strecke $a'h'$ mit ihrer Einteilung durch die Punkte $b'c'd'e'f'g'$ aufgetragen. Dann wurden aus dem linksseitigen Grundriss die Schnittpunkte der Kanten mit der Schnittebene geholt, das heisst die horizontalen, senkrecht zur Vertikalebene gerichteten Abstände der Kantenpunkte $a'b'e'h'$ von der zur Vertikalebene parallelen Achsenschnittebene des Körpers entnommen und in den Schnitt MN eingetragen. (In diesem ist also 1 a für Punkt $a' = 1a$ im Grundriss, 2 b für Punkt $b' = 2b$ im Grundriss, 5 e für $e' = 5e$ im Grundriss u. s. w., wobei der Grundriss von rechts betrachtet wurde, also Abstände von der Achse aus gegen den Grundschnitt von der Vertikalen im Schnitt MN aus nach rechts aufzutragen waren). In den Punkten $a'c'd'e'f'g'$ schneidet die Schnittebene die Lagen VIII VII VI V IV des erzeugenden

Quadrats. Diese Punkte $a'c'd'e'$ u. s. w. wurden im rechtsseitigen Grundriss aufgesucht; es wurde 1 a im Schnitt $MN = 1a$ im Grundriss nach rechts getragen (Probe mit dem Kantenpunkt), 3 c im Schnitt $MN = 3c$ im Grundriss nach rechts getragen, 4 d im Schnitt $MN = 4d$ im Grundriss nach links getragen, 4 d_1 im Schnitt $MN = 4d_1$ im Grundriss nach rechts getragen u. s. w. Die Verbindung der erhaltenen Kantenpunkte und Kreisflächenpunkte ergab die Schnittfigur MN .

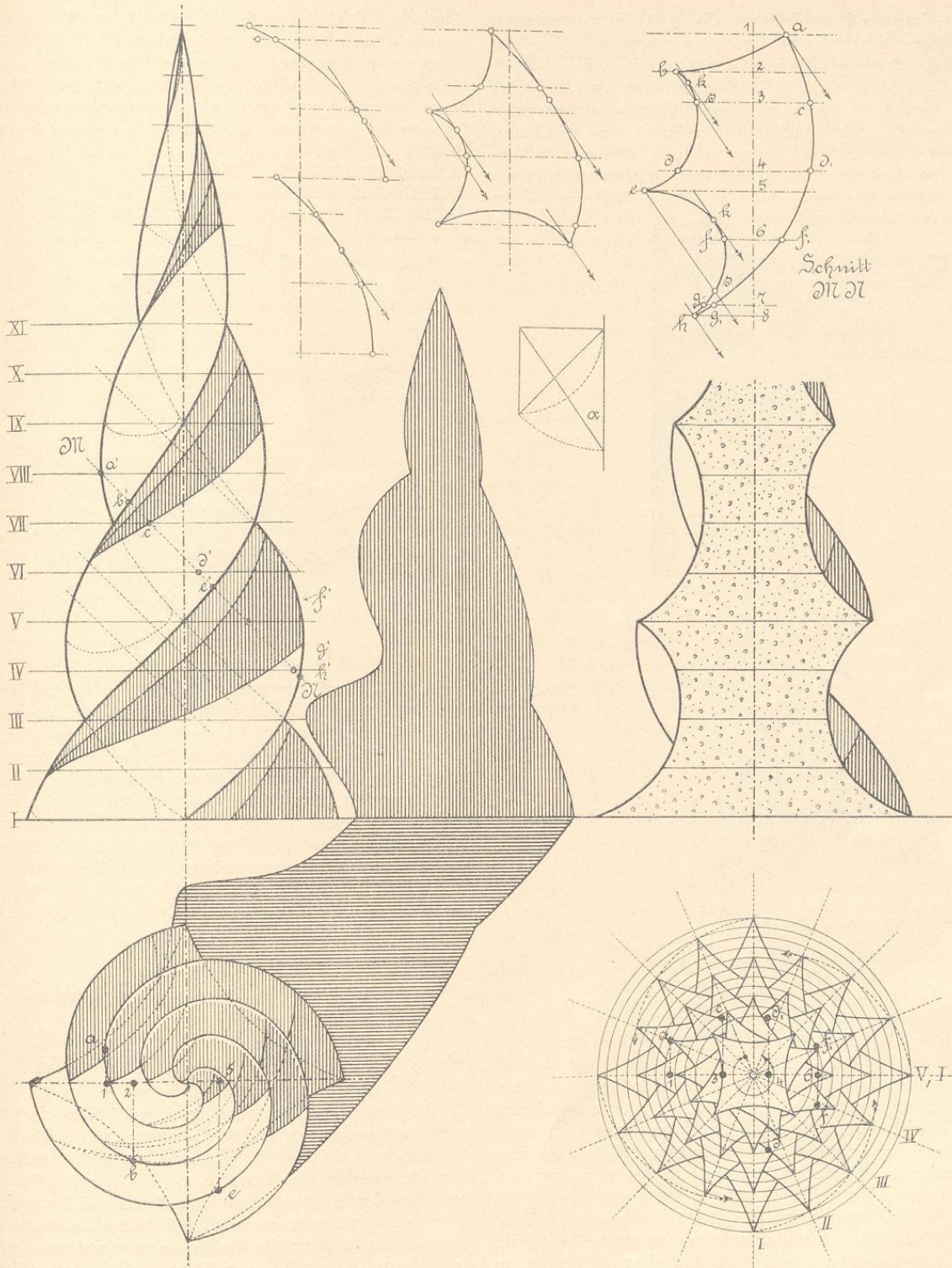
In der Schnittebene MN bildet der Lichtstrahl mit der Gefällslinie 12 . . . 8 oder mit der herausgetragenen Vertikalprojektion des Lichtstrahls den bekannten Winkel α ; an die erhaltene Schnittkurve MN waren also Tangenten und Streiflichtstrahlen unter diesem Winkel mit der Vertikalen zu ziehen. Diese lieferten die zwei Berührungspunkte k als Körperschattengrenzpunkte und die zwei Schnittpunkte s als Schlagschattenpunkte. Zur Uebertragung der vier Punkte auf die Linie MN im Aufriss waren die vertikalen Abstände der Punkte k und s von der Horizontalen 1 a auf der Linie MN von a' aus abzumessen. Die Streiflichtstrahlen bei a und h an der Schnittfigur MN beweisen, dass die ganze Rückseite der Schnittfigur MN einer Körperschattenfläche angehört. Die drei andern Schnittfiguren und Figurenstücke wurden zur Bestimmung der Schattengrenzen auf der Rückseite des Körpers benutzt.

Konoidische Flächen; windschiefer Haustein-77. bogen in cylindrischer oder ebener Mauer.

Konoidische Flächen entstehen durch Bewegung einer Geraden in der Weise, dass sie 1) immer einer Richtebene parallel bleibt, 2) immer an einer andern, festen Geraden gleitet, 3) immer an einer festliegenden gekrümmten Linie oder Fläche gleitet. Steht die feste Gerade senkrecht zur Richtebene, so heisst das Konoid ein senkrechtes.

Für die Schattengrenzen auf solchen Flächen gestaltet sich das allgemeine Verfahren wie in Art. 29 für Regelflächen überhaupt beschrieben. Man zeichnet verschiedene Lagen der Erzeugenden in Grundriss und Aufriss und erhält nach Einführung vertikalstehender Lichtstrahlenebenen durch Hinaufloten der Grundrisschnittpunkte in den Aufriss die Schnittkurven, die in bekannter Weise zu benutzen sind. Ein Beispiel war schon Figur 29b.

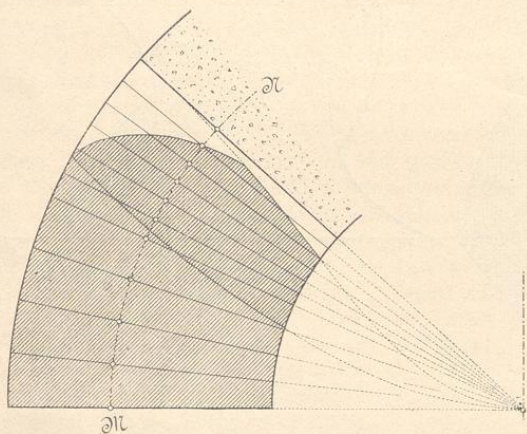
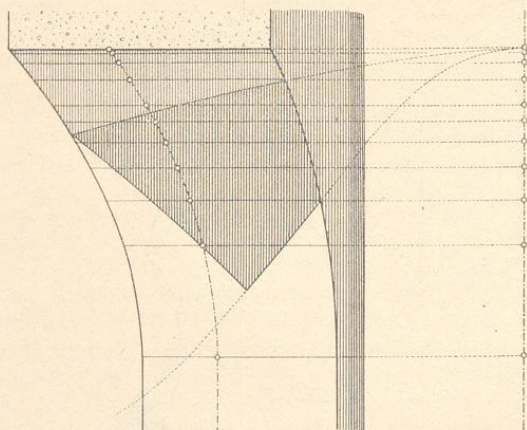
Eine weitere Konstruktion für Schlagschattengrenzen ist die folgende, welche auf der Eigenschaft der Konoidfläche als Rückungsfläche mit gerader Erzeugenden beruht. Man sucht auf einer beliebigen, zur Richtebene parallelen Schnittebene den Schlagschatten derjenigen Linie, welche die Konoidfläche beschattet, sei nun diese Linie eine Randlinie der Fläche selbst, wie bei der Selbstbeschattung, oder sei sie die Selbstschattengrenze eines andern Körpers. Wo die in der gewählten Ebene liegende Erzeugende die Schlagschattenlinie schneidet, da ist ein Punkt der Schlagschattengrenze auf der Fläche. Für weitere Parallelebenen werden die Schlagschattenlinien kongruent der ersterhaltenen und erscheinen nur in der Richtung des Lichtstrahls verschoben. Besonders einfach gestaltet sich die Lösung, wenn ein schattenwerfender Rand durch



Figur 76.

eine Erzeugende gebildet ist, wie in Figur 77 a am rechts liegenden Stück der Schlagschattengrenze.

In ähnlicher Weise lässt sich auch die Körperschattengrenze dadurch bestimmen, dass man auf einer zur Richtebeine parallelen Ebene die Schlagschatten einer genügenden Zahl von Mantellinien sucht, die Umhüllungskurve dieser Schlagschatten zeichnet, für jede Schlagschattenlinie möglichst scharf den Berührungspunkt mit der Kurve bestimmt und von diesem Punkt auf einem

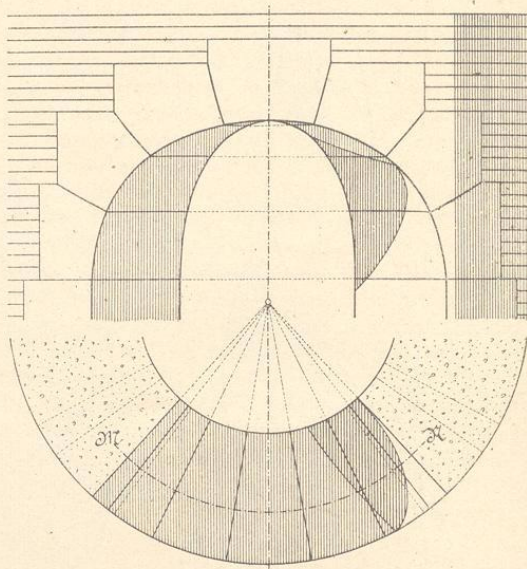


Figur 77 a.

Lichtstrahl rückwärts geht bis zu der Mantellinie, von welcher die Schlagschattenlinie herrührt. Der auf der Mantellinie erhaltene Punkt ist ein Körperschattengrenzpunkt. In der praktischen Ausführung dieses Verfahrens findet sich jedoch, dass die Berührungspunkte innerhalb weiter Grenzen unsicher einzuschätzen sind, also die Festsetzung der Schattenpunkte ganz unsicher oder sogar unmöglich ist.

In den Figuren 77 a und b ist als einfaches Beispiel einer Konoidfläche ein windschiefes Tonnengewölbe in einer cylindrischen Mauer gezeichnet. Auf einem beliebigen, zu beiden Mauerflächen konzentrischen Vertikalcyliner MN ist ein Halbkreisfeld (oder Segmentbogenfeld oder halb-

elliptisches Feld) mit horizontalem Durchmesser so aufgewickelt, dass der vertikale Radius vertikal bleibt. (Es könnte auch einer der Stirnbögen selber die aufgewickelte Linie sein.) Eine horizontale Gerade gleitet einerseits an dieser Bogenlinie, andererseits an der vertikalen Achse der Cylinderflächen und erzeugt dadurch die Leibung des Ge-



Figur 77 b.

wölbs. Es ist in Figur 77 a im Längenschnitt gezeichnet, so dass die oberste Mantellinie und Scheitellinie mit einem Teil des Stirnbogens den Schlagschatten wirft. Mit punktierten Linien ist angegeben, wie die Schattengrenzen sich fortsetzen würden, wenn die Fläche bis zur vertikalen Leitlinie fortgesetzt wäre. Figur 77 b bietet die Vorderansicht desselben Gewölbs. Die Schattengrenzen, abgesehen von derjenigen aus der wagrechten Randlinie, sind dieselben wie in Figur 77 a, nur symmetrisch zur Mittelachse verlegt.

X. Rückblick auf die Lehre von den Schattengrenzlinien.

Zwei Grundgedanken in der Schattenkonstruktion.

Alle beschriebenen Lösungen teilen sich in zwei scharf getrennte Gruppen; es ist ebenso interessant als nützlich, die gemeinschaftlichen Züge jeder Gruppe festzustellen. Das Hervorheben der hiedurch erhaltenen zwei Grundgedanken der Schattenkonstruktion liefert gleichsam eine in wenige Sätze zusammengedrückte Schattenkonstruktionslehre; es macht nicht nur die für die verschiedenen Arten von Körpern eingeschlagenen Wege leichter verständlich, indem es die Lösungen jeder Gruppe als verschiedene Formen eines und desselben Grundverfahrens erkennen