



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

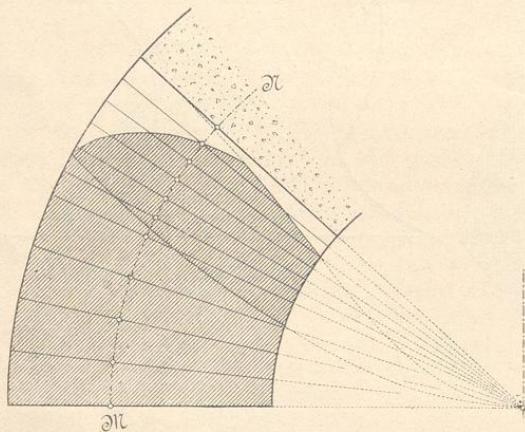
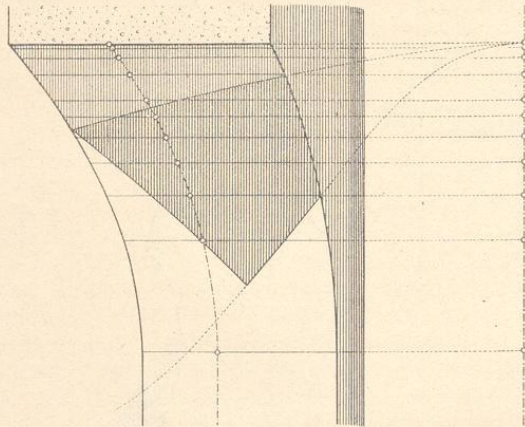
Stuttgart, 1895

X. Rückblick auf die Lehre von den Schattengrenzlinien.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

eine Erzeugende gebildet ist, wie in Figur 77 a am rechts liegenden Stück der Schlagschattengrenze.

In ähnlicher Weise lässt sich auch die Körperschattengrenze dadurch bestimmen, dass man auf einer zur Richtebeine parallelen Ebene die Schlagschatten einer genügenden Zahl von Mantellinien sucht, die Umhüllungskurve dieser Schlagschatten zeichnet, für jede Schlagschattenlinie möglichst scharf den Berührungspunkt mit der Kurve bestimmt und von diesem Punkt auf einem

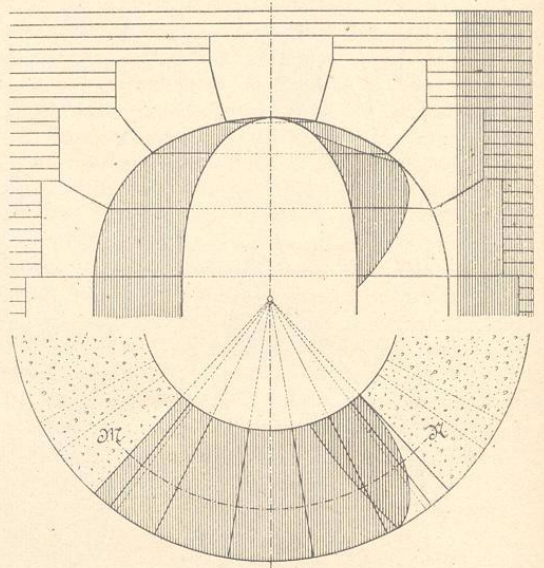


Figur 77 a.

Lichtstrahl rückwärts geht bis zu der Mantellinie, von welcher die Schlagschattenlinie herrührt. Der auf der Mantellinie erhaltene Punkt ist ein Körperschattengrenzpunkt. In der praktischen Ausführung dieses Verfahrens findet sich jedoch, dass die Berührungspunkte innerhalb weiter Grenzen unsicher einzuschätzen sind, also die Festsetzung der Schattenpunkte ganz unsicher oder sogar unmöglich ist.

In den Figuren 77 a und b ist als einfaches Beispiel einer Konoidfläche ein windschiefes Tonnengewölbe in einer cylindrischen Mauer gezeichnet. Auf einem beliebigen, zu beiden Mauerflächen konzentrischen Vertikalcyliner MN ist ein Halbkreisfeld (oder Segmentbogenfeld oder halb-

elliptisches Feld) mit horizontalem Durchmesser so aufgewickelt, dass der vertikale Radius vertikal bleibt. (Es könnte auch einer der Stirnbögen selber die aufgewickelte Linie sein.) Eine horizontale Gerade gleitet einerseits an dieser Bogenlinie, andererseits an der vertikalen Achse der Cylinderflächen und erzeugt dadurch die Leibung des Ge-



Figur 77 b.

wölbs. Es ist in Figur 77 a im Längenschnitt gezeichnet, so dass die oberste Mantellinie und Scheitellinie mit einem Teil des Stirnbogens den Schlagschatten wirft. Mit punktierten Linien ist angegeben, wie die Schattengrenzen sich fortsetzen würden, wenn die Fläche bis zur vertikalen Leitlinie fortgesetzt wäre. Figur 77 b bietet die Vorderansicht desselben Gewölbs. Die Schattengrenzen, abgesehen von derjenigen aus der wagrechten Randlinie, sind dieselben wie in Figur 77 a, nur symmetrisch zur Mittelachse verlegt.

X. Rückblick auf die Lehre von den Schattengrenzlinien.

Zwei Grundgedanken in der Schattenkonstruktion.

Alle beschriebenen Lösungen teilen sich in zwei scharf getrennte Gruppen; es ist ebenso interessant als nützlich, die gemeinschaftlichen Züge jeder Gruppe festzustellen. Das Hervorheben der hiedurch erhaltenen zwei Grundgedanken der Schattenkonstruktion liefert gleichsam eine in wenige Sätze zusammengedrückte Schattenkonstruktionslehre; es macht nicht nur die für die verschiedenen Arten von Körpern eingeschlagenen Wege leichter verständlich, indem es die Lösungen jeder Gruppe als verschiedene Formen eines und desselben Grundverfahrens erkennen

lässt, sondern erleichtert auch deren Beherrschung durch das Gedächtnis.

79. Die unmittelbare Schattenbestimmung und ihre vier Fälle.

Bei aller Schlagschattenkonstruktion hat man immer und immer wieder den Schlagschatten eines Punktes auf einem Körper zu suchen. Alle Konstruktionen der ersten Gruppe haben das Gemeinsame, dass man durch den schattenwerfenden Punkt einen Lichtstrahl zieht, durch den Lichtstrahl eine Ebene legt und die Schnittlinie dieser Ebene mit dem beschatteten Körper aufsucht. Wo diese Schnittlinie getroffen wird vom Lichtstrahl, da ist der Schlagschattenpunkt.

Auch für die Bestimmung der Körperschattengrenzen wurden diese Schnittlinien verwertet. Wo die zu einem Lichtstrahl gehörige Schnittlinie (als Schnittpolygon bei eben begrenzten Körpern und als Schnittkurve bei gekrümmten Flächen) gestreift oder berührt wird vom Lichtstrahl, da ist ein Punkt der Körperschattengrenze.

Für die Wahl der durch den Lichtstrahl zu legenden Schnittebene erschienen vier Fälle, die dadurch bedingt sind, dass man immer auf eine möglichst einfache und rasch darstellbare, womöglich also eine gerade oder kreisförmige Schnittlinie ausgeht. Die vier Fälle waren die folgenden:

- a) Benützung der vertikalen Ebene des Lichtstrahls, die ihn auf die horizontale Grundebene projiziert.
- b) Benützung der unter 45° geneigten Ebene des Lichtstrahls, die ihn auf die vertikale Grundebene projiziert (der sogenannten vertikalprojizierenden Ebene).
- c) Benützung der unter 45° geneigten Ebene des Lichtstrahls, die ihn auf die Seitenebene projiziert.
- d) Benützung einer Ebene, die durch den Lichtstrahl und die Spitze eines Kegels gelegt ist, bei Schatten auf einer Kegelfläche, oder durch den Lichtstrahl parallel zu den Mantellinien einer Cylinderfläche gelegt ist, bei Schatten auf einer schiefgerichteten Cylinderfläche.

79a. mit vertikalstehenden Schnittebenen parallel zur Lichtrichtung.

Der erste Fall (Benützung der vertikalen Ebene des Lichtstrahls) erschien als „allgemeine Lösung“

1) bei Schlagschatten auf der vertikalen Grundebene, Art. 9–11 (denn das Lot auf dem Grundschnitt im Schnittpunkt der Horizontalprojektion des Lichtstrahls ist ja nichts anderes als die Schnittlinie der vertikalen Ebene des Lichtstrahls mit der beschatteten Fläche),

2) bei Schatten auf eben begrenzten Körpern, Art. 15 bis 18, mit Einschluss der Körperschattenbestimmung auf solchen durch Vertikalschnitte, Art. 12 zweiter Teil. Die einfachste Schnittlinie, nämlich die vertikale Gerade, ergab sich bei vertikalstehenden Prismen, zu denen auch die vertikalstehenden Cylinderflächen gerechnet werden konnten, Art. 22,

3) bei Schatten auf gekrümmten Flächen, Art. 28, insbesondere auf Kegelflächen und Drehungsflächen mit verti-

kaler Achse. Kugelflächen (Art. 65) erfuhren eine besondere Behandlung insofern, als die Schnittlinie und der Lichtstrahl nicht in der Projektion, sondern in der Umklappung gezeichnet wurden, weil in dieser die Schnittlinie sich als Kreis darstellt, also weit einfacher zu zeichnen ist als die elliptische Linie, die sie in der Projektion werden würde. Auch für andere gekrümmte Flächen war die Umklappung oder das getrennte Herausragen der Schnittlinie und des Lichtstrahls zuweilen als ein Hilfsmittel zur Erlangung grösserer Klarheit und zur Erprobung des Resultats in verwickelten Raumformverhältnissen zu empfehlen.

mit vertikalprojizierenden Schnittebenen par-79b.
allel zur Lichtrichtung.

Der zweite Fall (Benützung der vertikalprojizierenden Ebene des Lichtstrahls) umfasst die Lösungen

1) für Schlagschatten auf der horizontalen Grundebene (denn das Lot auf dem Grundschnitt im Schnittpunkt der Vertikalprojektion des Lichtstrahls ist ja nichts anderes als die Schnittlinie der vertikalprojizierenden Ebene des Lichtstrahls mit der beschatteten Fläche), Art. 9–11,

2) für Schatten auf prismatischen und cylindrischen Flächen senkrecht zur Vertikalebene, Art. 23,

3) für Schatten auf Drehungs-, Wendel- und Schraubenflächen mit Achse senkrecht zur Vertikalebene, Art. 36. Auch Kugelflächen, wenn deren Schatten vorwiegend oder ausschliesslich im Aufriss verlangt sind, reihen sich hier mit derselben besonderen Behandlung an, wie im ersten Fall, nämlich mit dem Zeichnen der Schnittlinie in der Umklappung anstatt in der Projektion, Art. 65. Andere eben begrenzte Körper und gekrümmte Flächen als die eben unter 2) 3) genannten können zwar ebenfalls mit den vertikalprojizierenden Ebenen der Lichtstrahlen behandelt werden, folgen aber im allgemeinen dem ersten Fall.

mit seitlich projizierenden Schnittebenen par-79c.
allel zur Lichtrichtung.

Der dritte Fall (Benützung der seitlich projizierenden Ebene des Lichtstrahls) erschien in den Lösungen

1) für Schlagschatten auf der Seitenebene,

2) für Schatten auf prismatischen und cylindrischen Flächen mit Kanten und Mantellinien parallel zum Grundschnitt, Art. 25,

3) für Schatten auf Drehungs-, Wendel- und Schraubenflächen mit Achse parallel zum Grundschnitt, Art. 37.

mit Schnittebenen parallel zur Lichtrichtung 79d.
gelegt durch die Spitze eines Kegels oder die Mantellinien eines schiefgerichteten Cylinders.

Der vierte und letzte Fall, in welchem beim Aufsuchen der Schatten auf Kegelflächen (Art. 41) durch die Lichtstrahlen verschiedene gerichtete Ebenen gelegt werden, welche die beschattete Fläche nach Mantellinien schneiden, enthielt als Schlüssel den Punkt, in welchem ein aus der Kegelspitze gezogener Lichtstrahl die Basis-

ebene schneidet. Von diesem Punkt aus war eine Sekante in die Basis zu ziehen, und zwar durch den Schatten des gegebenen Punktes auf der Basisebene, ferner eine Tangente an die Basislinie zu ziehen. Die Sekante lieferte die schlagschattenaufnehmende Mantellinie, die Tangente diejenige der Körperschattengrenze.

Die Schattenkonstruktion auf schiefgerichteten Cylinderflächen nach Art. 48 kann als besonderer Fall der vorgenannten Lösung für den als Kegel mit unendlich ferner Spitze aufgefassten Cylinder erklärt werden. Ihr Grundgedanke war das Projizieren der Lichtrichtung und der schattenwerfenden Punkte auf die Basisebene des Cylinders, mit der Richtung der Mantellinien als Projektionsrichtung. Die so erhaltene Projektion des Lichtstrahls war als die in der Basisebene gültige Lichtrichtung zu benützen und ergab in den Berührungspunkten ihrer Tangenten die Endpunkte der körperschattenabgrenzenden Mantellinien, ferner in den Schnittpunkten mit der Basislinie die Endpunkte der schlagschattenaufnehmenden Mantellinien. Die Schnittebenen werden hier zwar wieder parallel, weil die Mantellinien parallel sind; doch ist ihre Lage noch immer eine andere als in den drei ersten Fällen.

Alle in den vier Fällen enthaltenen Lösungen haben das Gemeinsame, dass bei ihnen der Schlagschatten eines zuvor ausgewählten Punktes oder ein Körperschattenpunkt auf der beschatteten Fläche unmittelbar erhalten wird. Diese Lösungen können hienach als diejenigen der unmittelbaren oder direkten Schattenbestimmung zusammengefasst werden. Sie bilden ihres einfachen Grundgedankens wegen gleichsam die „Landstrassen“ der Schattenkonstruktion und können immer aushelfen, wo die andern Konstruktionen unbekannt oder unmöglich sind; nur erfordern sie bei bestimmten Flächen weit mehr Arbeit als diese andern. Ja schon von den in den drei ersten Fällen enthaltenen Lösungen lässt sich aussagen, dass mit ihnen allein alle Probleme überwindbar sind, wenn es sich nicht um geringen Arbeitsaufwand und Schönheit der Lösung handelt, da auch die Kegel- und schiefgerichteten Cylinderflächen mit Schnitten parallel zu den drei Grundebenen behandelt werden können.

80. Die mittelbare Schattenbestimmung und ihre vier Fälle.

Die Konstruktionen der zweiten Hauptgruppe haben das Gemeinsame, dass man bei ihnen den Schatten auf einem andern Gebilde zu Hilfe nimmt, um denjenigen auf dem gegebenen Körper zu erhalten, und es liegt eben hierin ihr entschiedener Gegensatz zu denen der ersten Gruppe. Sie können hienach als die mittelbar bestimmenden oder indirekten Schattenkonstruktionen bezeichnet werden. Ihr Grundgedanke ist selbstverständlich nur da von Wert, wo sich der Schatten auf dem Hilfsgebilde rasch erhalten lässt. Auch diese Gruppe lässt vier Fälle unterscheiden, und zwar die folgenden:

- a) Man bestimmt eine Körperschattengrenze aus dem Schlagschatten, den sie auf eine Ebene, meist eine Grundebene, wirft.

- b) Man bestimmt eine Körperschattengrenze auf Drehungs-, Röhren- und Rückungsflächen, indem man Parallelkreisschnitte, beziehungsweise Normalschnitte oder parallele Schnitte nach Lagen der rückenden Figur, als niedrige Zonen von Kegeln, oder Kugeln oder Cylindern auffasst und schattiert.
- c) Man erhält auf Drehungs- und Rückungsflächen den Schlagschatten eines Randes oder Körpers durch dessen immer kongruenten Schlagschatten auf verschiedenen Parallelkreis-, beziehungsweise Parallelschnittebenen mit Lagen der rückenden Figur.
- d) Man erhält eine Schlagschattengrenze aus den beiden Schlagschatten, die ein schattenwerfendes Gebilde und das von ihm beschattete auf eine Ebene, meist eine Grundebene, werfen.

Eine Körperschattengrenze erhalten aus ihrem 80a, Schlagschatten auf einer Grundebene.

Der erste Fall ist in erster Linie verwirklicht durch die in Art. 12 erklärte Selbstschattenbestimmung auf eben begrenzten Körpern nach dem Satz: „Diejenigen Kanten des Körpers, deren Schatten im Umriss der Schlagschattenfigur erscheinen, sind die Grenzen von Licht und Schatten auf dem Körper“. Selbstverständlich kann auch der Schlagschatten auf anderen Gebilden als einer Grundebene über die Selbstschattengrenze des schattenwerfenden Körpers Auskunft geben; aber im allgemeinen wird erst der Schlagschatten mit Hilfe dieser Grenze zu bestimmen sein, nicht umgekehrt. Daher sind bei den gekrümmten Flächen nur drei Beispiele zu nennen, nämlich die in Art. 59 erklärte Ableitung des Körperschattens einer Drehungsfläche aus deren leicht erhältlichem Schlagschatten auf einer Parallelkreisebene, und die sehr unsichere Bestimmung der Körperschattengrenze der Schraubenfläche aus der Umhüllungslinie der Schlagschatten ihrer Mantellinien auf einer Ebene senkrecht oder parallel zur Achse (Art. 70), endlich die Körperschattenbestimmung auf der gewundenen Säule durch die Schatten ihrer Parallelschnitte auf der Horizontalebene. Uebrigens könnte auch die Bestimmung der schattenbegrenzenden Mantellinien des Kegels durch die Tangenten aus dem Schlagschatten der Spitze, die ja nichts anderes sind als die Schlagschatten jener Mantellinien, hieher gerechnet werden (Art. 42).

Eine Körperschattengrenze auf Drehungs-, 80b. Röhren- und Rückungsflächen erhalten durch Hilfskegel oder Hilfskugeln oder Hilfscylinder.

Dieser Fall schliesst das wichtigste Beispiel für indirekte Körperschattenbestimmung ein, nämlich diejenige auf Drehungsflächen durch Auffassung ihrer Parallelkreise als niedriger Kegelzonen oder Kugelzonen, Art. 56 und 57, ferner diejenige auf Wulstflächen, schraubenförmigen Röhren und anderen kreisförmigen Röhren mit unveränderlichem Normalschnitt durch Auffassung des letzteren als des Grosskreises einer berührenden Kugel oder als der niedrigen Zone eines berührenden Cylinders (Art. 58 u. 71).

Auch die Behandlung von Röhrenflächen mit beliebigen unveränderlichen Normalschnitten durch Hilfszylinder, die längs der Normalschnitte die Flächen berühren (Art. 72), findet nicht selten praktische Verwertung; sogar noch von der Auffassung der kongruenten Parallelschnitte der Rückungsflächen nach Art. 74 als der Zonen schiefgerichteter Cylinderflächen, z. B. bei der gewundenen Säule, ist dies zu sagen (ein besonderer Fall einer solchen Rückungsfläche ist das hyperbolische Paraboloid aus Art. 69e). Dagegen ist die Behandlung der Rückungsflächen mit veränderlichen Erzeugenden (Art. 75) durch Hilfskegel, welche die Flächen längs Parallelschnitten berühren, und wofür das einmantelige elliptische Hyperboloid in Art. 69d ein Beispiel war, mehr nur theoretisch interessant.

80c. Eine Schlagschattengrenze auf Drehungs- und Rückungsflächen erhalten durch die Schlagschatten auf Parallelkreisebenen, beziehungsweise auf Ebenen der fortrückenden Figur.

Der dritte Fall der mittelbaren Schattenbestimmung ist derjenige, bei welchem der Schlagschatten eines schattenwerfenden Körpers oder Randes zuerst auf einer Ebene gesucht wird, in welcher eine Schnittlinie des beschatteten Körpers liegt. Wo die Hilfsschlagschattengrenze diese Schnittlinie schneidet, da ist ein Schlagschattenpunkt auf dem beschatteten Körper. Dieser Gedanke ist zwar auch verwertbar, wenn die Schnittlinien aus verschiedenen parallelen Schnitten des Körpers verschiedene Formen haben, wofür sie nur einfach und rasch gezeichnet werden können, so dass im Grunde das Verfahren für vielerlei Flächen zur Anwendung gelangen könnte. Doch wird es zumeist auf Flächen mit geometrisch ähnlichen Parallelschnitten, das heisst auf Drehungs- und Rückungsflächen beschränkt. Die meist verwertete Lösung dieser Art ist die Bestimmung des auf eine Drehungsfläche durch einen Randkreis geworfenen Schlagschattens mit Hilfe von Parallelkreisschnitten, auf deren Ebenen der Randkreis seine kongruenten Schlagschatten wirft (Art. 61). Minder häufige praktische Anwendung findet die im selben Artikel beschriebene Selbstbeschattung von Drehungsflächen mit berührenden Lichtstrahlen und Beschattung durch äussere Körper. Als mehr nur theoretisch interessant gehört endlich hieher die Schlagschattenbestimmung auf Rückungsflächen mit unveränderlicher und veränderlicher Erzeugenden nach Art. 74 und 75 mit Einschluss des hyperbolischen Paraboloids und des elliptischen Hyperboloids (Art. 69e und d).

Eine Schlagschattengrenze erhalten aus den 80d. beiden Schlagschatten, die ein schattenwerfendes Gebilde und das von ihm beschattete auf eine Grundebene werfen.

Im vierten Fall der mittelbaren Schlagschattenbestimmung wird auf einer Ebene, meist Grundebene, als dem Hilfsgebilde sowohl der Schlagschatten des schattenwerfenden Körpers oder Randes als derjenige einer Erzeugenden der beschatteten Fläche gesucht. Wo die beiden Schlagschattenlinien einander schneiden, da ist der gemeinschaftliche Schlagschatten eines Punktes der schattenwerfenden Grenzlinie und seines Schlagschattens auf der Erzeugenden, also auf der Fläche. Ein rückwärts durch diesen gemeinschaftlichen Schlagschattenpunkt bis zur Erzeugenden gezogener Lichtstrahl führt also zu einem Punkt der Schlagschattengrenze auf der Fläche. Das wichtigste Beispiel ist die Bestimmung des Schlagschattens auf einer Drehungsfläche nach Art. 62 durch die beiden Schlagschatten, die von der schattenwerfenden Grenzlinie und von einem Parallelkreis auf eine zur Achse senkrechte Ebene geworfen werden; ferner gehören hieher das Aufsuchen der Schlagschattenpunkte einer Linie auf den Kanten eines Vielfachs oder auf einer andern Linie mit Hilfe der Schlagschatten beider auf einer Grundebene (Art. 17), die Bestimmung der Selbstbeschattung (oder äusseren Beschattung) einer Schraubenfläche oder Wendelfläche durch die Schlagschatten des schraubenlinienförmigen Randes (oder der schattenwerfenden Grenzlinie) und einiger Mantellinien auf der Grundebene (Art. 70), endlich die Schlagschattenbestimmung auf der Rückungsfläche (Art. 74, gewundene Säule) und der Konoidfläche (Art. 77).

Mit Hilfe der mittelbaren Schattenbestimmung werden besonders auf Drehungsflächen und anderen gekrümmten Flächen mehr verwickelter Erzeugung die Schatten im allgemeinen rascher und bestimmter erhalten, als mit den direkten Lösungen; ihre Konstruktionen sind auch meist interessanter und schöner als diese. Beispiele für ihre vier Fälle finden sich für bestimmte Formen und Lagen der Körper wohl noch manche ausser den genannten; wenn aber auch die Schattenkonstruktionslehre in dieser Richtung noch beliebig weit ausgesponnen werden könnte, so dürften sich doch sogar bei Hereinziehen von Flächen höherer Ordnungen weitere Fälle neben die vier aufgezählten nicht stellen lassen.

Eine mittelbare Schattenbestimmung ist der Theorie nach immer möglich, aber oft undurchführbar.