



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

XI. Die Normalkugel.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

B. Beleuchtungskunde oder Lehre von den Lichtstufen.

Während in der Schattenkonstruktionslehre nur Lichtflächen, Körperschattenflächen und Schlag-schattenflächen an den dargestellten Gebilden auftraten und nur die Grenzlinien dieser drei Flächen zu suchen waren, ist die Beleuchtungskunde, wie früher ausgesprochen, die Lehre von den feineren Unterschieden der Schattierung, von der Abstufung der Lichtstärken auf den beleuchteten oder im Schatten befindlichen Flächen eines Körpers. Sie stellt sich zunächst die Frage: „Wie gross ist unter Voraussetzung der eingeführten Richtung der Lichtstrahlen die Stärke der Beleuchtung an jedem einzelnen Punkt der Oberfläche des darzustellenden Körpers?“ und sucht auf den gekrümmten Flächen ununterbrochene Linien, von welchen jede die Punkte einer bestimmten Lichtstärke zusammenfasst.

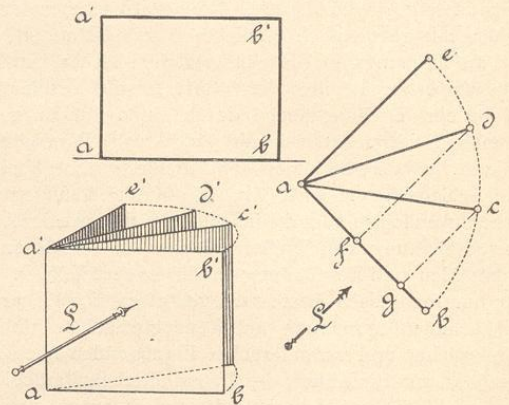
XI. Die Normalkugel.

81. Das Gesetz der Lichtstufen.

Eine genügend einfache und deutliche Formenwiedergabe der technischen Gebilde mit Hilfe der Schattierung ist nur möglich unter der Voraussetzung einfarbiger, nicht glänzender, nicht erheblich durchscheinender Oberflächen, für welche eine Aenderung der Stellung des anschauenden Auges eine merkliche Aenderung der wahrgenommenen Beleuchtungsstufen nicht herbeiführt. Gekrümmte Spiegel-flächen, die alles auf sie fallende Licht regelmässig zurückwerfen und ihr Aussehen mit jedem Standpunkt ändern, schattieren sich überhaupt nicht, sondern zeigen nur Spiegelbilder äusserer Dinge; für minder stark glänzende Oberflächen müsste immer ein bestimmtes Verhältnis zwischen der Menge des regelmässig zurückgeworfenen und zerstreut reflektierten Lichtes festgesetzt werden, um ihre Lichtstufen verfolgen zu können; auch wäre immer ausser der Lichtrichtung ein Standpunkt des betrachtenden Auges oder eine Richtung paralleler Sehstrahlen einzuführen, welchen gegenüber das physikalische Gesetz von der Zurückwerfung des Lichtes anzuwenden wäre, wodurch die Bestimmung der Lichtstufen äusserst umständlich und schwierig werden müsste. Eine so erhaltene Schattierung, etwa für ein Ellipsoid, würde das formale Gesetz der Fläche weit weniger deutlich fühlen lassen, als diejenige für eine nicht glänzende Oberfläche, wie am besten die Photographie beweisen kann; die Darstellung würde also trotz des grösseren Aufwandes weniger erklären als sie erklären soll. Wenn es auch der Theorie nach kaum eine Fläche geben mag, die nicht bei Sonnenbeleuchtung einiges Glanzlicht in einer bestimmten Richtung zurückwirft, so lehrt doch die Beobachtung, dass die Schattierung auf solchen Stoffen, die nach der gewöhnlichen Auffassung als glanzlos be-

zeichnet werden, sich mit der Bewegung des Auges nicht merklich ändert, dass es also gerechtfertigt ist, von einer scheinbaren Beleuchtung, die gleichzeitig von der Lichtrichtung und Sehstrahlenrichtung abhängig wäre, bei der Schattierung technischer Gebilde Umgang zu nehmen. Anders ist es in der künstlerischen Malerei.

Die Annahme einer Beleuchtung nicht glänzender, nicht erheblich durchscheinender Oberflächen durch par-



Figur 81.

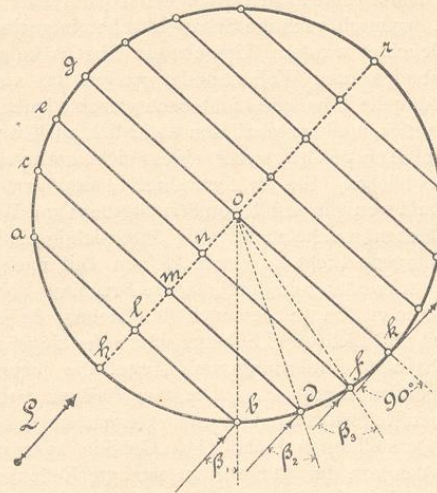
allele Lichtstrahlen, welche andere Lichtquellen nicht erzeugen, führt zu der von der Beobachtung bestätigten Folgerung, dass die vom Licht senkrecht getroffenen Stellen einer Körperoberfläche die hellsten sind, und dass die Lichtstärke um so geringer wird, je schiefer die Lichtstrahlen die Fläche treffen. Dabei richten sich die Lichtstärken nach folgendem Gesetz:

„Die Lichtstärken verschieden gerichteter beleuchteter Ebenen verhalten sich wie die Sinuse der Winkel, unter

denen die Ebenen von den Lichtstrahlen getroffen werden, oder, mit andern Worten, wie die Kosinuse der Winkel, welche die Lichtstrahlen mit den Senkrechten auf den Ebenen bilden. — Bei gekrümmten Flächen ist jedes Flächenelement ebenso hell wie die zugehörige tangierende Ebene. Die Lichtstärken verschiedener Punkte einer beleuchteten gekrümmten Fläche verhalten sich also wie die Kosinuse der Winkel, welche die Lichtstrahlen mit den Normalen der Fläche in diesen Punkten bilden.“

Dieses Gesetz wird durch folgende Betrachtung gewonnen. Es sei in Figur 81 die Horizontallinie L die Richtung des Lichtstrahls (das heisst, das Grundebenensystem sei so gewählt, dass die im Raum geneigte Richtung des Lichtstrahls als horizontale Linie auftritt). ab sei ein ebenes Rechteck, senkrecht zum Lichtstrahl gerichtet und von der Höhe h . Dieses Rechteck wird getroffen von einem vierseitig prismatischen Lichtstrahlenbüschel, dessen Querschnittsfläche gleich ist der Fläche des Rechtecks, also ausgedrückt ist durch $ab \cdot h$. — Denkt man sich nun das Rechteck um seine Kante aa' in die Lage ac gedreht, so wird das Lichtstrahlenbüschel, das in dieser Lage seine Ebene trifft, kleiner sein; es wird einen Querschnitt haben gleich $ag \cdot h$. — Dreht man das Rechteck weiter in die Lage ad , so wird das Lichtstrahlenbüschel abermals kleiner; es wird einen Querschnitt haben gleich $af \cdot h$. Daraus folgt, dass die Lichtmengen auf dem Rechteck in den zwei beliebigen Lagen ac und ad sich verhalten wie ag zu af oder wie $\sin acg$ zu $\sin adf$; denn $\sin acg = \frac{ag}{ab}$ und $\sin adf = \frac{af}{ab}$. Also verhalten sich die Lichtstrahlenbüschel, welche zwei beliebige Lagen der rechteckigen Ebene treffen, mit andern Worten die Lichtmengen auf der Ebene, wie die Sinuse der Winkel, welche die Lichtstrahlen mit dieser Ebene bilden. Dies trifft nicht etwa nur beim Rechteck zu, sondern eine einfache Betrachtung kann lehren, dass für jede beliebige ebene Figur der Querschnitt des Lichtstrahlenbündels gleich ist der Fläche der Figur mal dem Sinus des Winkels der Lichtstrahlen mit der Fläche.

auf der Kugelfläche, denselben Winkel β_2 ; denn wie dieser Winkel in der Figur erscheint, so ist er in jeder andern Ebene, die durch den Durchmesser hr gelegt wird. Also wird die Lichtstärke der Kugelfläche längs des ganzen Parallelkreises cd dieselbe sein. Dasselbe gilt für den Parallelkreis ab , weil in allen seinen Punkten der Winkel



Figur 82.

β_1 derselbe sein muss, endlich für den Parallelkreis ef mit dem gleichbleibenden Winkel β_3 .

Wendet man das Gesetz an, dass sich die Lichtstärken verschiedener Flächenpunkte verhalten wie die Kosinuse der Winkel des Lichtstrahls mit den Normalen in diesen Punkten, so findet sich, wenn mit h die Lichtstärke im Punkt h und mit ab die Lichtstärke längs des Kreises ab bezeichnet wird, die Proportion:

$$h : ab : cd : ef : gk = \cos 0^\circ : \cos \beta_1 : \cos \beta_2 : \cos \beta_3 : \cos 90^\circ.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \cos 0^\circ &= 1 \\ \cos \beta_1 &= \cos boh = 0|ob = \frac{3}{4} \\ \cos \beta_2 &= \cos doh = 0m/od = \frac{2}{4} \\ \cos \beta_3 &= \cos foh = 0n/of = \frac{1}{4} \\ \cos 90^\circ &= 0. \end{aligned}$$

Also verhalten sich jene Lichtstärken wie $1 : \frac{3}{4} : \frac{2}{4} : \frac{1}{4} : 0$, oder wie $4 : 3 : 2 : 1 : 0$.

Hätte man etwa den Kugelradius oh in 6 gleiche Teile anstatt in 4 geteilt, so wäre für die Lichtstärken erschienen das Verhältnis $6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1 : 0$, und damit ein geringerer Unterschied der Lichtstärke von einem Parallelkreis zum andern.

Reflexlichtwirkung. Lichtstufen auf der Schatten-83. seite der Kugel.

Was die vom Sonnenlicht abgewandte Hälfte der Kugel betrifft, so wäre sie unter der gemachten Voraussetzung, dass die direkten Lichtstrahlen keine weiteren Lichtquellen hervorrufen, durchaus gleich dunkel wie der schattenabgrenzende Grosskreis; sie würde also durchaus

82. Lichtstufen auf der Lichtseite der Kugel.

Als erster Gegenstand der Verwertung des Gesetzes über die Lichtstärken sei die Kugel gewählt. Der gezeichnete Kreis (Figur 82) sei die Horizontalprojektion einer Kugel in einem Grundebenensystem, in welchem die Richtung des Lichtstrahls wieder dargestellt ist durch die Horizontallinie L . Man zieht einen Kugeldurchmesser parallel zum Lichtstrahl und teilt ihn in 8 gleiche Teile; durch die Teilpunkte legt man Ebenen senkrecht zum Lichtstrahl; diese schneiden die Kugel nach 7 Kreisen, die sich in der Figur als gerade Linien projizieren und von welchen der mittlere als Grosskreis die Grenze zwischen Licht und Körperschatten bildet, indem längs dieses Kreises die Lichtstrahlen die Kugel berühren. Der Punkt h , in welchem der Lichtstrahl zusammenfällt mit der Normalen auf der Kugelfläche, wird der hellste Punkt sein. In jedem Punkt des Parallelkreises cd bildet der Lichtstrahl mit dem Kugelradius, das heisst mit der Normalen

die Lichtstärke Null darbieten. Diese Voraussetzung kann aber nur etwa bei der Mondkugel als erfüllt erklärt werden; sie hat bei dieser zur Folge, dass der im Schatten befindliche Teil der Mondscheibe unsichtbar oder fast unsichtbar ist. Bei allen Beleuchtungen auf der Erde giebt es keine Lichtstärke Null, eben weil die direkten Lichtstrahlen immer Reflexlicht oder Widerschein reichlich hervorgerufen, wodurch auch die Schattenflächen in geringerem Grad beleuchtet werden. Umgebende Gegenstände oder der Fussboden oder Wolkenränder werfen das von der Hauptlichtquelle erhaltene Licht nach verschiedenen Richtungen zurück, und ausser diesen Reflexlichtquellen widerstrahlt die Atmosphäre selber einen nicht geringen Teil des Sonnenlichts. Sie ist fortwährend, und zwar bald stärker, bald weniger, erfüllt von Staubkörnern und Wasserdampfbläschen, welche nicht völlig durchsichtig sind, also das empfangene Licht zu einem kleinen Teil nach allen Seiten zurückwerfen und durch innere Brechung ablenken oder zerstreuen, von welchen auch die abnehmende Farbenkräftigkeit und Licht- und Schattenstärke der Gegenstände mit wachsender Entfernung vom Auge, die sogenannte Luftperspektive herrührt. — Die von Fall zu Fall veränderlichen Reflexe von umgebenden Gegenständen bleiben für die Darstellungen technischer Gebilde ausser Spiel und nur das von der Atmosphäre erzeugte Reflexlicht ist zu berücksichtigen. Es lässt sich nachweisen, dass dieses zwar nach allen Richtungen des Raums, am stärksten aber in derjenigen Richtung wirkt, welche dem Sonnenstrahl genau entgegengesetzt ist und in dieser Weise führt man es in die Darstellungen ein. Es wird auf die Schattenseite der Kugel in derselben Weise wirken wie das direkte Licht auf die Lichtseite, nur weit schwächer. Der dem hellsten Punkt gerade entgegengesetzte Punkt der Kugel-*fläche* (h) erhält die Reflexlichtstrahlen normal zu seiner Fläche, wird also der hellste Punkt des Körperschattens sein. Die Parallelkreise der Lichtseite werden sich auf der Schattenseite symmetrisch als Linien gleicher Schattenstärke wiederholen, um so dunkler, je näher sie der Körperschattengrenze liegen; nur wird der Unterschied zwischen zwei benachbarten Schattenkreisen ein weit kleinerer sein als zwischen zwei Kreisen im Licht. Somit finden sich die Lichtstärken vom hellsten Punkt h an abnehmend bis zur Schattengrenze, dann wieder um ein Geringes stetig zunehmend bis zum hellsten Reflexpunkt r .

84. Lichtstufen im Schlagschatten auf der Kugel.

Noch ist zu sprechen über die Abstufung der Schlagschatten. Irgend ein Gegenstand werfe einen Schlagschatten auf die Kugel, oder die ganze Kugel sei im Schlagschatten, so wird zunächst die Kugelhälfte mit Körperschatten vom Reflexlicht getroffen werden nach wie vor, also unverändert bleiben wie bei der beleuchteten Kugel. Die Schlagschattenfläche wird aber von den Reflexlichtstrahlen der oben für die Lichtkugel angegebenen Richtung nicht mehr erhellt werden können, also dunkler sein als der Körperschatten, und dies entspricht der Beobachtung. Doch wirkt immer auch noch auf den Schlagschatten dasjenige Reflexlicht, das die Wasserbläschen

und Staubkörner der Atmosphäre seitlich zurückwerfen oder durch Brechung seitlich ablenken. Man kann sich dieses Licht als parallel zur Ebene des schattenabgrenzenden Grosskreises gk von allen Seiten gegen die Kugel strahlend vorstellen, natürlich äusserst schwach. Seine Wirkung muss wieder um so geringer sein, je schiefer es die Kugelfläche trifft. Im früheren hellsten Lichtpunkt h streift es die Fläche nur, also wird dieser Punkt als Schlagschattenpunkt s der dunkelste Punkt sein. Jeder Parallelkreis der früheren beleuchteten Kugelhälfte wird auch für den Schlagschatten eine Linie gleich heller Punkte sein und die Lichtstärke wird vom dunkelsten Schlagschattenpunkt s an mit jedem solchen Kreis ein wenig zunehmen, bis sie im Grosskreis gk dieselbe Stufe erreicht wie bei der beleuchteten Kugel. Hienach findet sich auf der im Schlagschatten befindlichen Kugel eine stetige Abnahme der Lichtstärke vom hellsten Reflexpunkt r bis zum dunkelsten Schlagschattenpunkt s ; bei der beleuchteten Kugel erschien die Lichtstärke abnehmend und dann wieder wachsend.

Auch der dunkelste Schlagschattenpunkt s hat nicht die Lichtstärke Null; er ist noch immer von demjenigen Reflexlicht beleuchtet, das nach allen Seiten strahlt, und erreicht dadurch eine Lichtstufe, die zwar gegenüber den Lichtflächen verhältnismässig dunkel ist, aber als absoluter Wert der Lichtempfindung noch immer recht ansehnlich sein kann.

Es ist also dreierlei Reflexlicht zu Hilfe genommen, um die nun abgeleiteten Lichtstufen auf den Schattenflächen der Kugel zu begründen, erstens ein stärkstes Reflexlicht, dem direkten entgegengesetzt, das die Körperschattenfläche abstuft, zweitens ein mittleres, in der Richtung des schattenabgrenzenden Grosskreises von allen Seiten senkrecht zum direkten Licht wirkend, das Streiflicht erhellend und die Schlagschattenfläche abstufend, drittens ein schwächstes Reflexlicht, nach allen Richtungen gleichmässig wirkend und auch die dunkelste Schlagschattenfläche erhellend. Diese Annahmen über die Reflexwirkungen mögen vielleicht ungenügend begründet und willkürlich erscheinen; aber es ist für den vorliegenden Zweck notwendig, an die Stelle der zahllosen Zufälligkeiten der Wirklichkeit etwas Unveränderliches zu setzen, dessen Ergebnis wenigstens vielen Fällen der Wirklichkeit nahe kommt und eine Schattierung mit guter Anschauung der Formen liefert. Dieses Ergebnis muss die Annahme rechtfertigen.

Die vier Hauptlichtstufen.

85.

Wie gross man die Unterschiede zwischen den vier Hauptlichtstufen h (hellster Punkt im Licht), k (Körperschattengrenzlicht), r (hellster Reflexpunkt) und s (dunkelster Schlagschattenpunkt) und im Zusammenhang damit diejenigen zwischen je zwei Parallelkreisen halten soll, kann nicht durch allgemeingültige Verhältniszahlen festgesetzt werden, sondern muss der Beobachtung und dem Gefühl überlassen bleiben.

Die Beobachtung ergibt, dass diese vier Werte mit sehr weiten Grenzen für ihre Verhältnisse mit gleichem

Recht gewählt werden können. Einerseits hängen sie als absolute Werte und in ihren gegenseitigen Verhältnissen von der jeweiligen Stärke des Sonnenlichtes ab, andererseits von der Körperfarbe und dem Grad der Durchstrahlbarkeit der Stoffe, aus welchen die Körper bestehen.

Bei grellem Licht ist der Gegensatz von Licht und Schatten sehr gross und die Abstufung sowohl innerhalb der beleuchteten als der im Schatten befindlichen Flächen (wenn zufällige Reflexlichtquellen ferngehalten werden) nur wenig fühlbar. Die Lichtstärke der direkt beleuchteten Flächen scheint bis nahe zur Körperschattengrenze fast durchaus dieselbe zu sein, dann mit schmaler Abstufungszone fast sprunghaft in das sehr dunkle Streiflicht überzugehen und von diesem aus gegen den hellsten Reflexpunkt nur wenig heller zu werden. Dies ist wohl dadurch zu erklären, dass auch bei der ausschliesslichen Sonnenbeleuchtung noch viele konvergierende sehr kräftige gebrochene Strahlen die parallelen durchkreuzen, dass ferner bei grellem Licht die Stärke der Lichtempfindung nicht proportional der Lichtstärke zunimmt, sondern schwächer, wonach die Unterschiede greller Lichtstufen von einer gewissen Grenze an nicht mehr erkannt werden. Eine von der Sonne beleuchtete Kugel aus hellem Material widerspricht hienach, wenn auch nur scheinbar, allem früher für die Lichtstufen Abgeleiteten; sie macht aber auch, genau nachschattiert oder photographiert, weit weniger den Eindruck einer Kugel und lässt das Gesetz der Kugelgestalt, das unveränderliche Krümmungsmass, weit weniger fühlen als eine mässig beleuchtete. Wenn in einer solchen Darstellung der Umriss verdeckt wird, erkennt man die Kugelfläche nicht mehr als solche. Als ein hieher gehöriger Beleg ist auch die Mondkugel zu nennen, welche aus Mangel an Lichtabstufungen den Eindruck einer ebenen Scheibe giebt. Für das eingehende Schattieren der technischen Gebilde ist also das Streben nach der Nachbildung der bei Sonnenbeleuchtung erscheinenden Lichtstufen nur nachteilig, und es empfiehlt sich weit mehr, eine mässige Lichtstärke der Parallelbeleuchtung vorauszusetzen, welche weniger starke Unterschiede von Licht und Schatten darbietet, dafür aber die Abstufungen zwischen beiden möglichst voll zur Geltung gelangen lässt; aus diesen heraus wird die Krümmung der Fläche am deutlichsten gefühlt.

Die Körperfarbe ist nicht nur von Einfluss auf die absoluten Werte der vier Lichtstärken, die selbstverständlich bei heller Körperfarbe grösser sind als bei dunkler, sondern auch auf ihre Verhältnisse, indem dunkle Körperfarbe die Schattentöne einander stärker nähert, als das Licht dem Schatten und dadurch die Abstufungen der Schattentöne stärker beeinträchtigt als die der Lichtflächen. Hiedurch wird die Schattierung dunkelfarbiger Körper in zwei Richtungen abgeschwächt. Rote, gelbe, grüne, blaue Färbungen der Körperfläche scheinen die Verhältnisse der vier Lichtstärken in verschiedener Weise zu beeinflussen.

In hohem Grad richten sich die vier Lichtstärken mit ihren Verhältnissen und Zwischenstufen nach dem Grad der Durchstrahlbarkeit der Stoffe, aus welchen die Körper bestehen. Es sind zwar oben „nicht erheblich

durchscheinende“ Stoffe vorausgesetzt worden, aber in einem bestimmten Grad, bis zu einer bestimmten Dicke, sind alle Stoffe durchstrahlbar für das Licht, selbst die Metalle, und die meisten in solchem Grad, dass ihre Schattierung dadurch beeinflusst wird. Vergleicht man z. B. ein Gebilde kleinerer Dimensionen aus weissem Marmor mit einem gleichgeformten aus trockenem Gips, so findet sich bei jenem wegen des stärkeren Durchscheinens ein geringerer Unterschied von Licht und Schatten als beim Gips; das Licht ist milder, der Schatten weniger kräftig, insbesondere aber das Reflexlicht weniger fühlbar, daher die ganze Schattierung ruhiger, weicher, edler als beim Gipsmodell. Auf Gebilden aus dem noch stärker durchscheinenden Alabaster giebt es kein kräftiges Licht und keinen kräftigen Schatten mehr; nur wenig Licht wird von der Oberfläche zurückgeworfen; weit mehr wird vom Innern verschluckt und erhellt von innen heraus die Schatten, ihnen jede Kraft und Bestimmtheit raubend.

Gegenüber dieser dreifachen Veränderlichkeit der Bedingungen für die in der Wirklichkeit erscheinenden vier Hauptlichtstärken der Schattierungen dürfte innerhalb bestimmter Grenzen jede dem Gefühl nach getroffene Wahl derselben in den Schattierungen technischer Gebilde gerechtfertigt sein, wenn auch nicht alle Annahmen gleich günstig für die Formendeutlichkeit sind. Nach Wahl der vier Lichtstärken wären die Zwischenstufen so einzuschalten, dass überall stetige Zu- und Abnahme besteht und die Lichtstärken der Parallelkreise zwischen je zweien der angenommenen Grenzwerte gleiche Unterschiede aufweisen, somit eine arithmetische Reihe bilden.

Um die praktische Verwertung der abgeleiteten Lichtstufen zu zeigen, müssen nun aber doch, alle Freiheit für den einzelnen Fall vorbehalten, bestimmte Annahmen für die vier Werte getroffen werden, worüber auf Art. 115 zu verweisen ist.

Abweichende Annahme der Reflexrichtung für 86. Gebilde auf ebener Wand.

Was über die einzuführende Richtung des Reflexlichtes gesagt wurde, erleidet eine Aenderung, wenn es sich um die Schattierung nahezu ebener Gebilde, z. B. von Reliefdarstellungen oder ganzen Fassaden handelt. Es würde ja hier das Reflexlicht mit der angegebenen Richtung die Ebene von der Rückseite her, also ihre Vorderseite gar nicht treffen, somit ohne Einfluss auf die Schattierung sein. Daher denkt man sich bei Schattierung derartiger Gebilde den Reflexlichtstrahl zwar auch unter 45° in beiden Projektionen und im Aufriss auch entgegengesetzt der Projektion des direkten Lichtstrahls, im Grundriss aber senkrecht zu derselben. Dieses Reflexlicht wirkt also gegen die Vertikalebene von rechts unten nach links oben. Sogar leichte Schlagschatten innerhalb der Fläche des vom direkten Licht erzeugten Schlagschattens, sogenannte „Gegenschatten“, werden als von diesem Reflexlicht hervorgerufen häufig eingeführt und sind für Darstellungen in grösserem Massstab meist von günstiger Wirkung. Die erste Figur auf der dritten

Lichtdrucktafel (Partie vom Palast Strozzi in Florenz) bietet ein Beispiel für die beschriebene Reflexrichtung und solche „Gegenschatten“, ebenso das Gebälk der dori-schen Säulenordnung aus der Renaissance auf der vierten Lichtdrucktafel. Die unter dem Gebälk stehende Säule ist als Drehungsfläche mit den zuerst genannten, für die Kugel eingeführten Reflexlichtwirkungen schattiert, so dass in diesem Beispiel vier Reflexlichtwirkungen unterschieden werden können und streng genommen ein unschädlicher Widerspruch zwischen der Schattierung von Gebälk und Säule besteht.

Noch andere Annahmen über die Richtung des Reflexlichtes gegenüber dem direkten Licht sind nicht ausgeschlossen und werden besonders in Deutschland beim Schattieren von architektonischen Aufrissen und Perspektiven häufig getroffen, wogegen sich die französischen Darstellungen strenger an die zuvor beschriebenen zu binden pflegen. Zuweilen wird im Schlag- und Körperschatten weiter schattiert, als ob das Reflexlicht mit dem direkten annähernd gleichgerichtet und nur weit schwächer, zuweilen auch, als ob es gar nicht da wäre, und für kleineren Massstab ist diese letzte Annahme die dankbarste. Die Erfahrung und die Beobachtung der Photographie kann lehren, dass fast alle Annahmen, wenn nur einheitlich durchgeführt, eine gute Modellierung der Gebilde erzielen können. Die Anpassungsfähigkeit des Formenvorstellungsvermögens an die Schattierung geht sehr weit.

87. Zusammenstellung aller Lichtstufen.

Die Kugel mit Licht- und Schlagschattenpartien bietet alle überhaupt vorkommenden Neigungen einer Fläche gegen den Lichtstrahl und damit alle vorkommenden Stufen von Licht und Dunkel. Man benützt sie deshalb als „Lichtmassstab“, als Hilfsmittel zum Ausdruck für bestimmte Lichtstufen, indem man den Durchmesser parallel zum Lichtstrahl in 8 oder 12 gleiche Teile teilt; die Parallelkreise, die diesen Punkten entsprechen, bilden mit dem schattenabgrenzenden Grosskreis und den drei Einzelpunkten *h*, *r* und *s* die Stufen der Flächenbeleuchtung. Bei Teilung in 8 Teile erscheinen 13 Lichtstufen. Doch ist es zweckmässig, bei dieser Teilung nicht stehen zu bleiben, sondern den äussersten Teil vom hellsten Punkt, beziehungsweise Reflexpunkt her noch einmal im Verhältnis 3:7 einzuteilen und damit zwei weitere Lichtstufenlinien einzuführen. Die Zahl der Lichtstufen kommt hiedurch auf 16, die mit Unterscheidung durch verschiedene Vorzeichen für Licht und Schlagschatten einerseits und Körperschatten andererseits in folgender Weise bezeichnet werden.

+ 0 im Licht (hellster Punkt)	+ 0 im Schlagschatten (dunkelster Punkt)
+ 0,3 „ „	+ 0,3 „ „
+ 1 „ „	+ 1 „ „
+ 2 „ „	+ 2 „ „
+ 3 „ „	+ 3 „ „
± 4 (Körperschattengrenze)	
— 3 im Reflex- oder Körperschatten	
— 2 „ „ „ „	
— 1 „ „ „ „	
— 0,3 „ „ „ „	
— 0 (hellster Punkt im Körperschatten oder Reflexpunkt).	

Würde man bei der Achtteilung stehen bleiben, so würde die Fläche mit vollem Licht erfahrungsgemäss viel zu gross, der Uebergang von + 0 zu + 1 zu hart und die Gesetzmässigkeit der Krümmung der Fläche nahe dem hellsten Punkt durch eine grosse ebene Platte empfindlich gestört erscheinen. Bisher wurde, um diesem Uebelstand abzuweichen, zuweilen ein Parallelkreis + $\frac{1}{2}$ eingeführt; doch bleibt auch hiebei (ursprüngliche Achtteilung des Durchmessers vorausgesetzt) die Fläche hellsten Lichtes noch zu gross; insbesondere aber hat diese Halbierung des äussersten Teils den Mangel, dass der Abstand von + 1 bis + $\frac{1}{2}$ als zu klein und derjenige von + $\frac{1}{2}$ bis + 0 als zu gross die Aufeinanderfolge der Abstände der Lichtstufenlinien unstetig und willkürlich erscheinen lassen, wogegen bei der hier gewählten Einführung von + 0,3 die Fläche hellsten Lichtes auf ein günstiges Mass gebracht und die Aufeinanderfolge der Kreise auf der Kugel in deren Darstellung für die eingebürgerte Lichtrichtung gesetzmässig und gefällig wird, wie Figur 88b beweisen kann. Diese schönere Lage der Lichtstufenlinien kommt nicht nur der Kugel selber zu gut, sondern auch der Darstellung aller andern Körper mit gekrümmter Oberfläche, für deren Schattierung die „Normalkugel“ in später zu erklärender Weise verwertet wird.

Wenn je eine Kugel oder ein nach ihr zu schattierender anderer Körper in so grossem Massstab gezeichnet ist, dass die Streifen zwischen den Lichtstufenlinien mit der Achtteilung zu breit und die Uebergänge zu hart würden, so ist es nicht schwer, durch Schätzung oder genaue Konstruktion noch Zwischenlinien von + 0,6 (nicht 0,65), + 1,5 + 2,5 + 3,5 — 3,5 u. s. f. einzuschalten. Vgl. z. B. Figur 103b.

Bei einer Einteilung des Durchmessers in zwölf Teile anstatt in acht würden anstatt der 13 Lichtstufen der unergänzten Achtteilung deren 19, und anstatt der 16 Lichtstufen der durch + 0,3 ergänzten Achtteilung deren 22 erscheinen; bei Einteilung in zwanzig Teile sogar 31. Für die praktische Verwertung des Verfahrens, das im folgenden zu erklären ist, dürfte es sich empfehlen, die Zahl der durch graphische Konstruktion zu bestimmen Linien möglichst einzuschränken; auch schon bei wenigen solchen ist die Arbeit noch immer gross genug, und bei Bedarf an weiteren im eben berührten Fall reicht deren Einschaltung nach Schätzung auch strengen Anforderungen gegenüber meist vollkommen aus.

Darstellung der Normalkugel mit der eingebürgerten Lichtrichtung.

Die erste Darstellung der Normalkugel (Figur 82), ein Grundriss derselben in einem Grundebenensystem, in welchem der Lichtstrahl als eine horizontale Linie gedacht ist, hat sich so einfach gestaltet, weil die Kugel projiziert wurde auf eine zum Lichtstrahl parallele Ebene. Anders gestaltet sich das Bild der Kugel im ursprünglichen Grundebenensystem, in welchem die beiden Lichtstrahlprojektionen einen Winkel von 45° mit dem Querschnitt bilden; die Projektionen der Parallelkreise werden hier Ellipsen sein, und zwar finden sie sich auf folgendem Weg:

Man denkt sich die Kugel nach den beiden in Fig. 88a gezeichneten Projektionen auf der Horizontalebene liegend und samt ihren Lichtstufenlinien auf die horizontalprojizierende Ebene des Lichtstrahls $p q$ projiziert, dann diese Ebene in die Horizontalebene umgeklappt. Der Lichtstrahl durch den Kugelmittelpunkt projiziert sich auf die Vertikalebene $p q$ als eine Gerade, die mit ihrer Horizontalprojektion den aus Art. 38 bekannten Winkel $\alpha = 35^\circ 15,9'$ einschliesst; in der Umklappung wird also der Durchmesserlichtstrahl diesen Winkel mit der Umklappungsbasis $p q$ einschliessen. Die Lichtstufenkreise der Kugel erscheinen in der Projektion auf der Vertikalebene $p q$ als gerade Linien senkrecht zum Durchmesserlichtstrahl; so erscheinen sie also auch in der Umklappung.

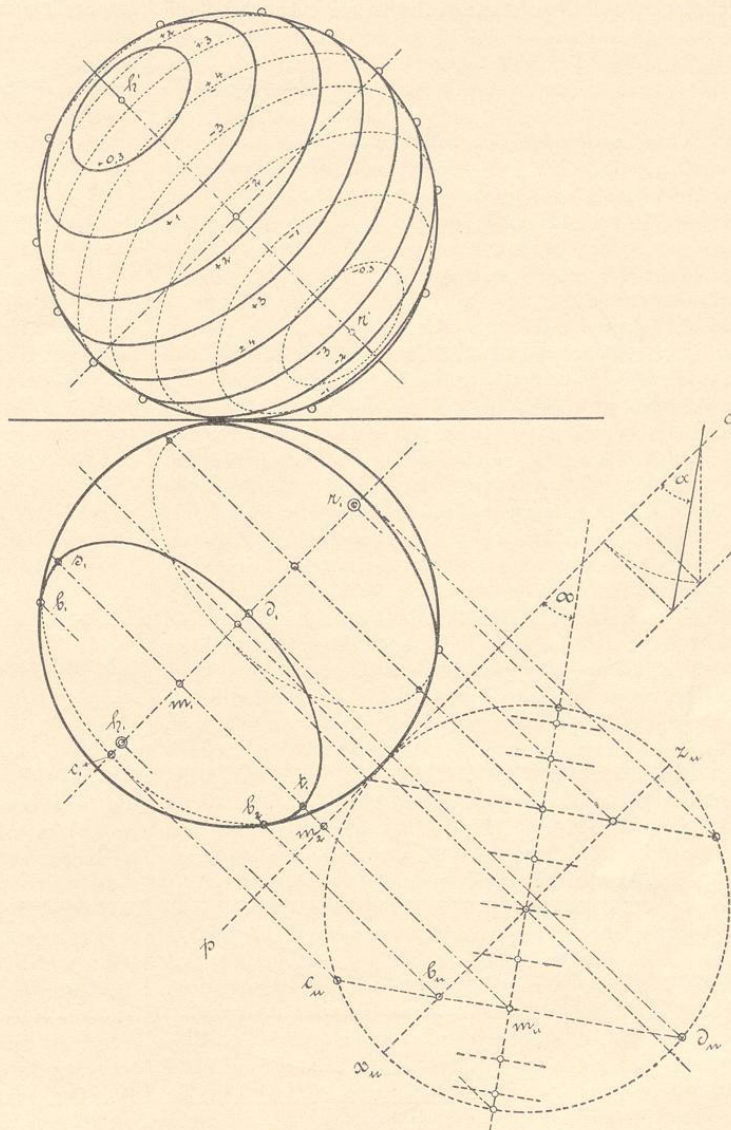
Denkt man sich nun einen der Lichtstufenkreise der Kugel aus Figur 82, z. B. $c d$, auf die horizontale Grundebene projiziert, so wird sich in der umgeklappten Ebene $p q$ dessen Mittelpunkt m_u nach m_2 projizieren, also im Raum der Mittelpunkt m selbst nach m , projizieren, wobei $m_u m$, senkrecht zur Lichtstrahlprojektion gerichtet ist. Der Kreis selbst wird sich als Ellipse projizieren, deren grosse Achse s, t , durch m , geht, senkrecht zur Lichtstrahlprojektion steht und gleich dem Kreisdurchmesser $c d$ oder $c_u d_u$ ist; denn der horizontale Durchmesser des Raumkreises $c d$ ist senkrecht zur Lichtstrahlprojektion gerichtet und projiziert sich auf die Horizontalebene in wahrer Grösse. Der tiefste Punkt c und der höchste Punkt d des Raumkreises $c d$ werden sich nach c , und d , projizieren, wobei $c_u c$, und $d_u d$, senkrecht zur Lichtstrahlprojektion gerichtet sind und c, d , die kleine Achse der Ellipse darstellt.

In derselben Weise werden alle anderen Lichtstufenkreise der Kugel in deren Grundriss übertragen werden können und als Ellipsen erscheinen.

Für die später zu betrachtende Verwertung der Normalkugel zum Schattieren anderer gekrümmter Flächen ist es zweckmässig, sich die Punkte b_1, b_2 u. s. w. zu verschaffen, in welchen die elliptischen Lichtstufenlinien des Kugelbildes dessen Umriss berühren. Der Umrisskreis der Horizontalprojektion der Kugel erscheint in der Umklappung als Linie $x_u z_u$ parallel $p q$, somit die zwei Schnittpunkte des Lichtstufenkreises $c d$ mit dem Umrisskreis in b_u ; das Zurückklappen von b_u auf den Umrisskreis im Grundriss liefert dort die Berührungspunkte b_1 und b_2 .

Das ganze Verfahren hätte sich auch in der Vertikalprojektion der Kugel mit Umklappen um die Vertikalprojektion des Lichtstrahls durchführen lassen und es wäre

dann die Figur samt allen Hilfslinien völlig kongruent der nun erhaltenen geworden, nur mit symmetrischer Lage zur Horizontalrichtung. Die Vertikalprojektion der Normalkugel bietet also in Beziehung zur Vertikalprojektion



Figur 88 a.

des Lichtstrahls genau dasselbe Bild, das im Grundriss der Kugel gegenüber dem Grundriss des Lichtstrahls erschien. Es folgt daraus, dass man nur eine Projektion der Normalkugel zu zeichnen nötig hat und diese bald als Grundriss, bald als Aufriss betrachten kann.

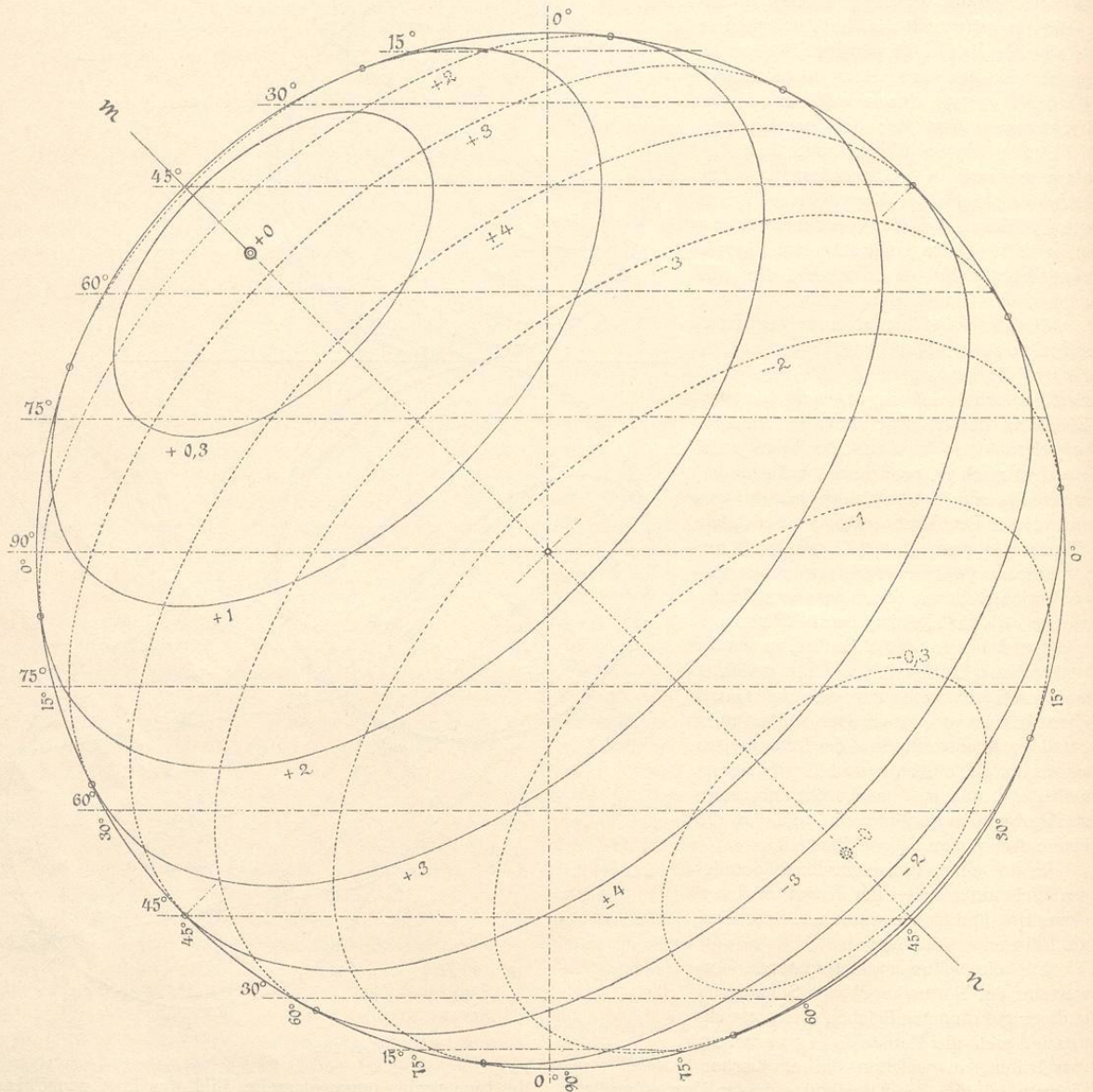
Figur 88a bietet die Normalkugelprojektion im Aufriss in kleinerem, Figur 88b in möglichst grossem Massstab. Für beide Auffassungen ist die Richtung $m n$ oder die Richtung der kleinen Ellipsenachsen als Lichtstrahlprojektion festzuhalten. Soll also die Figur als Grundriss

aufgefasst werden, so ist sie so zu legen, dass der hellste Punkt $+o$ links unten zu liegen kommt; bei Auffassung als Aufriss muss dieser Punkt links oben stehen.

Eine Seitenprojektion der Normalkugel wird selten gebraucht. Als Rechtsansicht ist sie entweder durch

Als Linksansicht erhält man die Seitenprojektion der Normalkugel durch Drehung ihres Aufrissbildes um 90° in der Weise, dass der hellste Punkt $+o$ nach rechts oben rückt; die Vorzeichen bleiben dabei unverändert.

Stellt man sich die Frage, wie sich die hohle Halb-



Figur 88 b.

Vertauschen der ausgezogenen und punktierten Linien des Aufrissbildes oder durch dessen Drehen um 180° erhältlich, so dass der frühere hellste Lichtpunkt rechts unten erscheint; im letzten Fall sind die Vorzeichen der Lichtstufenlinien zu vertauschen. Der neue hellste Punkt $+o$ und die Linie $+0,3$ werden unsichtbar und dafür der hellste Reflexpunkt $-o$ und die Linie $-0,3$ sichtbar.

kugel schattiert, die in die Vertikal- oder Horizontalebene vertieft ist, so ergibt sich die Antwort aus folgender Betrachtung. Jedes überhaupt beleuchtete Element der Hohlkugelfläche ist ebenso beleuchtet wie das ihm diametral entgegengesetzte im Aeussern der Vollkugel, weil die Richtung der tangierenden Ebene für beide Elemente dieselbe ist. Daraus folgt, dass auf der hohlen Halbkugel

der frühere Reflexpunkt r der hellste Punkt sein wird und dass die Parallelkreise gleicher Lichtstärke von diesem aus genau mit derselben Grösse und Entfernung und Lichtstärke auftreten wie früher auf der vollen Kugel vom hellsten Punkt h aus. Weil nun die Licht- und Schattenkreise symmetrisch liegen, so heisst das einfach: „Die Linien gleicher Lichtstärke für die Darstellung der halben Hohlkugel sind die auf der Darstellung der konvexen Normalkugel punktiert gezeichneten Ellipsen und Ellipsenteile unter Umkehrung der Vorzeichen plus und minus in ihrer Benennung.“

Die erste Lichtdrucktafel bietet in der mittleren Figur der oberen Reihe die konvexe Normalkugel mit ihren Lichtstufen als Aufrissbild, und zwar unter der Voraussetzung, dass ein Schlagschatten auf die Kugel falle, der ebenfalls alle sichtbaren Lichtstufenkreise umfasst. Es sind somit in dieser Darstellung alle Lichtstufen vereinigt mit Ausnahme von -0 , dessen Fläche in Vorder- und Oberansichten nie sichtbar wird, indem immer nur ein sehr schmaler Streifen von $-0,7$ das Endglied der Lichtstufenreihe im Reflex bilden kann. Nur Seitenprojektionen als Rechtsansichten und Grundrisse als Unteransichten können diese Lichtstufe mit sich bringen.

Die hohle Halbkugel ist schattiert auf der zweiten Lichtdrucktafel, und zwar erscheint sie unter dem gescheffelten Gesims als Ausfüllung der Friesfläche.

XII. Verwertung der Normalkugel zum Schattieren anderer Körper.

89. Die Normalkugel als Lichtstufenmassstab.

Wenn im früheren gesagt wurde, die Normalkugel sei ein „Lichtstufenmassstab“, so soll das nicht nur ausdrücken, dass alle Lichtstufen auf ihr verwirklicht sind, sondern auch, dass mit ihrer Hilfe die Lichtstufen anderer Körper gemessen werden können. Wie beim Anhalten des Längenmassstabes an eine Strecke ein Längenmass, so kann beim Anhalten der Normalkugel an einen Flächenpunkt die Lichtstufe dieses Punktes abgelesen werden. Wenn etwa an eine Seitenfläche eines regelmässigen Dodekaeders oder an das Innere einer ellipsoidischen Schale eine als Raumform ausgeführte Kugel mit Lichtstufenkreisen angelegt wird, so giebt der Berührungspunkt beider Körper die Lichtstufe der Seitenfläche oder des Punktes für eine Lichtrichtung, welche durch den Durchmesser der Kugel von $+0$ nach -0 ausgedrückt ist. Es ist nur das Vorzeichen der Lichtstufe umzukehren, weil eigentlich die Hohlkugel angehalten wird.

Die Verwertung dieser Thatsache für das Schattieren gezeichneter Körper mit Hilfe der gezeichneten Normalkugel geht von ihrer Begründung aus. Raumkugelpunkt und Raumflächenpunkt sind gleich hell, weil die Berührungsebenen der Kugel und der andern Fläche in diesem Punkt parallel sind. Ein durch die Zeichnung gegebener Flächenpunkt wird mit einem durch die Zeichnung gegebenen Normalkugelpunkt gleich hell sein, wenn die Berührungs-

ebenen in beiden Punkten gleich gerichtet sind. Dies ist der Grundgedanke der Verwertung der Normalkugel zum Schattieren anderer Körper.

Wenn die Frage gestellt ist: „Welche Lichtstufe hat ein gegebener Punkt einer Fläche?“ so ist in diesem Punkt eine Berührungsebene an die Fläche und an die Normalkugel eine parallele Berührungsebene zu legen; der Berührungspunkt dieser letzten hat dieselbe Lichtstufe wie der gegebene Punkt.

Damit ist nun das Beleuchtungsproblem wohl für einen ebenbegrenzten Körper, bei welchem ein Punkt für die Beleuchtung seiner ganzen Ebene massgebend ist, noch nicht aber für gekrümmte Flächen gelöst. Was wäre erreicht, wenn auf einer solchen Fläche noch so viele Punkte mit allerlei durch unganze Zahlen ausgedrückten Lichtstufen, z. B. $+3,25 + 0,62 - 2,85$ u. s. w., gefunden wären? Offenbar könnte damit die Fläche noch nicht mit zusammenhängenden und sich abstufigen Maltönen oder Strichlagen schattiert werden. Es bedarf vielmehr auf allen andern gekrümmten Flächen ähnlicher Lichtstufenlinien für die Punkte mit ganzen Zahlen, wie sie auf der Kugel durch die 9 Parallelkreise dargestellt sind; erst mit der Bestimmung dieser Lichtstufenlinien ist das Beleuchtungsproblem für eine Fläche gelöst, und mit Hilfe jener zufälligen Punkte wären die Linien nur durch eine unsichere Schätzung zu erhalten. Es wird also für jede Flächengattung eines bestimmten Verfahrens bedürfen, auf geeigneten Linien der Fläche die Punkte mit ganzzahligen Beleuchtungsstufen aufzufinden. Wenn hienach eine Gruppe zusammengehöriger ganzzahliger Lichtstufenpunkte, z. B. $+3$, auf der Fläche vorhanden ist und diese Punkte durch eine stetige Kurve zusammengefasst werden, so bildet diese eine „Linie gleicher Helle“ oder „Lichtstufenlinie“ $+3$, wie sie auf der Kugel durch den Parallelkreis $+3$ dargeboten ist, und nach Beschaffung aller solcher Kurven wird die Fläche in ähnlicher Weise durch sie gegliedert wie die Normalkugel durch die 9 Parallelkreise. Bei den andern Flächen erscheinen jedoch diese Linien meist nicht mehr so einfach, sondern zuweilen mit barocken Windungen und sogar plötzlichen Richtungsänderungen auch bei stetigen Umrissen der Körper. Man nennt diese Linien anderwärts auch „Hellenlinien“ oder mit gelehrterem Ausdruck „Isophoten“; hier soll der Ausdruck „Lichtstufenlinien“ ausschliesslich gebraucht werden.

Im folgenden ist zunächst die Verwertung der Normalkugel für eben begrenzte Körper, dann die Bestimmung der Lichtstufenlinien auf allen der praktischen Verwendung näherliegenden gekrümmten Flächen gezeigt und zum Schluss das Beleuchtungsproblem allgemein, für alle Arten von Flächen behandelt. Doch bedarf es zuvor noch einer nicht unwichtigen Betrachtung.

Lichtstufen am Aeussern und im Innern hohl-90. gedachter Körper.

Zu der Berührungsebene in einem bestimmten Punkt einer gekrümmten Fläche lassen sich immer zwei parallele Berührungsebenen an die Normalkugel legen. Man