



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

XII. Verwertung der Normalkugel zum Schattieren anderer Körper.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

der frühere Reflexpunkt r der hellste Punkt sein wird und dass die Parallelkreise gleicher Lichtstärke von diesem aus genau mit derselben Grösse und Entfernung und Lichtstärke auftreten wie früher auf der vollen Kugel vom hellsten Punkt h aus. Weil nun die Licht- und Schattenkreise symmetrisch liegen, so heisst das einfach: „Die Linien gleicher Lichtstärke für die Darstellung der halben Hohlkugel sind die auf der Darstellung der konvexen Normalkugel punktiert gezeichneten Ellipsen und Ellipsenteile unter Umkehrung der Vorzeichen plus und minus in ihrer Benennung.“

Die erste Lichtdrucktafel bietet in der mittleren Figur der oberen Reihe die konvexe Normalkugel mit ihren Lichtstufen als Aufrissbild, und zwar unter der Voraussetzung, dass ein Schlagschatten auf die Kugel falle, der ebenfalls alle sichtbaren Lichtstufenkreise umfasst. Es sind somit in dieser Darstellung alle Lichtstufen vereinigt mit Ausnahme von -0 , dessen Fläche in Vorder- und Oberansichten nie sichtbar wird, indem immer nur ein sehr schmaler Streifen von $-0,7$ das Endglied der Lichtstufenreihe im Reflex bilden kann. Nur Seitenprojektionen als Rechtsansichten und Grundrisse als Unteransichten können diese Lichtstufe mit sich bringen.

Die hohle Halbkugel ist schattiert auf der zweiten Lichtdrucktafel, und zwar erscheint sie unter dem gescheffelten Gesims als Ausfüllung der Friesfläche.

XII. Verwertung der Normalkugel zum Schattieren anderer Körper.

89. Die Normalkugel als Lichtstufenmassstab.

Wenn im früheren gesagt wurde, die Normalkugel sei ein „Lichtstufenmassstab“, so soll das nicht nur ausdrücken, dass alle Lichtstufen auf ihr verwirklicht sind, sondern auch, dass mit ihrer Hilfe die Lichtstufen anderer Körper gemessen werden können. Wie beim Anhalten des Längenmassstabes an eine Strecke ein Längenmass, so kann beim Anhalten der Normalkugel an einen Flächenpunkt die Lichtstufe dieses Punktes abgelesen werden. Wenn etwa an eine Seitenfläche eines regelmässigen Dodekaeders oder an das Innere einer ellipsoidischen Schale eine als Raumform ausgeführte Kugel mit Lichtstufenkreisen angelegt wird, so giebt der Berührungspunkt beider Körper die Lichtstufe der Seitenfläche oder des Punktes für eine Lichtrichtung, welche durch den Durchmesser der Kugel von $+0$ nach -0 ausgedrückt ist. Es ist nur das Vorzeichen der Lichtstufe umzukehren, weil eigentlich die Hohlkugel angehalten wird.

Die Verwertung dieser Thatsache für das Schattieren gezeichneter Körper mit Hilfe der gezeichneten Normalkugel geht von ihrer Begründung aus. Raumkugelpunkt und Raumflächenpunkt sind gleich hell, weil die Berührungsebenen der Kugel und der andern Fläche in diesem Punkt parallel sind. Ein durch die Zeichnung gegebener Flächenpunkt wird mit einem durch die Zeichnung gegebenen Normalkugelpunkt gleich hell sein, wenn die Berührungs-

ebenen in beiden Punkten gleich gerichtet sind. Dies ist der Grundgedanke der Verwertung der Normalkugel zum Schattieren anderer Körper.

Wenn die Frage gestellt ist: „Welche Lichtstufe hat ein gegebener Punkt einer Fläche?“ so ist in diesem Punkt eine Berührungsebene an die Fläche und an die Normalkugel eine parallele Berührungsebene zu legen; der Berührungspunkt dieser letzten hat dieselbe Lichtstufe wie der gegebene Punkt.

Damit ist nun das Beleuchtungsproblem wohl für einen ebenbegrenzten Körper, bei welchem ein Punkt für die Beleuchtung seiner ganzen Ebene massgebend ist, noch nicht aber für gekrümmte Flächen gelöst. Was wäre erreicht, wenn auf einer solchen Fläche noch so viele Punkte mit allerlei durch unganze Zahlen ausgedrückten Lichtstufen, z. B. $+3,25 + 0,62 - 2,85$ u. s. w., gefunden wären? Offenbar könnte damit die Fläche noch nicht mit zusammenhängenden und sich abstufigen Maltönen oder Strichlagen schattiert werden. Es bedarf vielmehr auf allen andern gekrümmten Flächen ähnlicher Lichtstufenlinien für die Punkte mit ganzen Zahlen, wie sie auf der Kugel durch die 9 Parallelkreise dargestellt sind; erst mit der Bestimmung dieser Lichtstufenlinien ist das Beleuchtungsproblem für eine Fläche gelöst, und mit Hilfe jener zufälligen Punkte wären die Linien nur durch eine unsichere Schätzung zu erhalten. Es wird also für jede Flächengattung eines bestimmten Verfahrens bedürfen, auf geeigneten Linien der Fläche die Punkte mit ganzzahligen Beleuchtungsstufen aufzufinden. Wenn hienach eine Gruppe zusammengehöriger ganzzahliger Lichtstufenpunkte, z. B. $+3$, auf der Fläche vorhanden ist und diese Punkte durch eine stetige Kurve zusammengefasst werden, so bildet diese eine „Linie gleicher Helle“ oder „Lichtstufenlinie“ $+3$, wie sie auf der Kugel durch den Parallelkreis $+3$ dargeboten ist, und nach Beschaffung aller solcher Kurven wird die Fläche in ähnlicher Weise durch sie gegliedert wie die Normalkugel durch die 9 Parallelkreise. Bei den andern Flächen erscheinen jedoch diese Linien meist nicht mehr so einfach, sondern zuweilen mit barocken Windungen und sogar plötzlichen Richtungsänderungen auch bei stetigen Umrissen der Körper. Man nennt diese Linien anderwärts auch „Hellenlinien“ oder mit gelehrterem Ausdruck „Isophoten“; hier soll der Ausdruck „Lichtstufenlinien“ ausschliesslich gebraucht werden.

Im folgenden ist zunächst die Verwertung der Normalkugel für eben begrenzte Körper, dann die Bestimmung der Lichtstufenlinien auf allen der praktischen Verwendung näherliegenden gekrümmten Flächen gezeigt und zum Schluss das Beleuchtungsproblem allgemein, für alle Arten von Flächen behandelt. Doch bedarf es zuvor noch einer nicht unwichtigen Betrachtung.

Lichtstufen am Aeussern und im Innern hohl-90. gedachter Körper.

Zu der Berührungsebene in einem bestimmten Punkt einer gekrümmten Fläche lassen sich immer zwei parallele Berührungsebenen an die Normalkugel legen. Man

erhält also eigentlich zwei Lichtstufen für den Punkt, die auf demselben Durchmesser der Normalkugel liegen, also durch gleiche Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen ausgedrückt sind. In der That hat jeder Flächenpunkt zwei Lichtstufen, wenn die Fläche als papierdünne Schale gedacht wird, eine für die dem Licht zugewandte Seite und eine für die Rückseite. So ist im Innern eines regelmässigen Dodekaeders eine Fläche -3 , wenn sie aussen $+3$ ist, und umgekehrt; nur ist sie als $+3$ im Innern Schlagschatten, nicht Licht. Nimmt man als Beispiel einer gekrümmten Fläche etwa den Mantel eines elliptischen einmanteligen Hyperboloids, wie es in Figur 103b dargestellt ist, so muss zuvor ausgesprochen werden, ob die Lichtstufen für das Aeussere des Mantels oder für das Innere anzugeben sind. Die Lichtstufenlinien sind zwar durchaus dieselben für innen und aussen, aber im Innern ist -3 , was im Aeussern $+3$, und umgekehrt; auch kann im Innern ein Schlagschatten neben dem Licht vorhanden sein, wo am Aeussern eine Körperschattenfläche ununterbrochen sich ausdehnt, also die Schlagschattengrenze keine Bedeutung hat, und umgekehrt. In manchen Fällen bedarf es wohl der Aufmerksamkeit und Ueberlegung, ob die Berührungsebene an der Lichtseite der Kugel oder diejenige an der Schattenseite für die Lichtstufe eines Flächenpunktes massgebend ist; aber im allgemeinen ist die Entscheidung nicht schwer und unmittelbar mit Hilfe der Anschauung zu treffen. Ein Hilfsmittel in zweifelhaften Fällen ist das Schneiden der Ebene oder gekrümmten Fläche oder des Körpers durch die vertikale Ebene eines beliebigen Lichtstrahls; die entstehende Schnittlinie zeigt sofort, welche Seite der Ebene oder welche Flächenteile dem Lichte zugewendet sind und welche nicht.

91. Körper mit ebenen Grenzflächen.

Die dem Schattieren ebenbegrenzter Körper zu Grunde liegende Aufgabe ist die Bestimmung der Lichtstufe einer durch ihre beiden Projektionen gegebenen ebenen Figur.

Das in Figur 91a durch seine beiden Projektionen dargestellte Fünfeck $ABCDE$ sei eine Seitenfläche irgend eines Polyeders. Es ist die Lichtstufe seiner Ebene zu bestimmen, das heisst, es ist derjenige Punkt der Normalkugel zu suchen, der dieselbe Lichtstufe darbietet, indem eine in diesem Punkt an die Normalkugel gelegte Berührungsebene mit der Ebene der gegebenen Figur gleichgerichtet ist.

Die Neigung einer solchen Berührungsebene ist dieselbe wie die der Tangente am vertikalstehenden Meridian durch den Berührungspunkt, und denkt man sich die Ebene mit gleichbleibender Neigung auf der Normalkugel gedreht, so beschreibt der Berührungspunkt einen horizontalen Kreis, dessen Höhenlage sich bestimmt aus dem Berührungspunkt einer Tangente am Umriss des Kugelaufrißbildes, welche dieselbe Neigung hat wie die Ebene der gegebenen Figur. Die Gefällslinien aller Lagen der gedrehten Ebene bilden eine Kegelfläche, welche die Kugel längs des Kreises berührt und deren Spitze in der vertikalen Kugelachse liegt. Diejenige Mantellinie dieser Kegel-

fläche, welche der Gefällslinie der gegebenen Ebene parallel ist, geht durch den gesuchten Kugelpunkt. Es ist also diese Gefällslinie nach Neigung und Richtung aufzusuchen.

Man zieht in der Vertikalprojektion der gegebenen Figur eine beliebige Horizontale $x'y'$, lotet die Punkte $x'y'$ in den Grundriss nach x und y , fällt aus d eine Senkrechte auf xy und lotet deren Fusspunkt z wieder hinauf in den Aufriss; DZ ist eine Gefällslinie oder Linie der grössten Neigung in der Ebene der gegebenen Figur. Von d fällt man noch das Lot $d'v'$ auf $x'y'$. Im Dreieck spq , das die Umklappung des Dreiecks DVZ darstellt, ist pq horizontal und $= dz$, sp vertikal und $= d'v'$; sq ist also die Umklappung der Gefällslinie in die Vertikalebene. Man zieht an den Aufriss der Normalkugel (Figur 91b rechts) eine Tangente $f'g'$ parallel zu sq , zeichnet den Horizontalkreis $k'g'$ durch den Berührungspunkt g' und zieht aus f' eine Parallele $f'l'$ zu $d'z'$. Wo diese Parallele den Horizontalkreis $k'g'$ schneidet, liegt der gesuchte Kugelpunkt l' , der mit der Ebene der gegebenen Figur gleiche Lichtstufe hat.

Im Grundplan der Normalkugel (Figur 91b links) würde der Lichtstufenpunkt unabhängig von jener Kegelfläche durch folgende Betrachtung gefunden. Man zeichnet als ersten geometrischen Ort des Punktes den Parallelkreis $k'g'$ im Grundriss als konzentrischen Kreis mit dem Radius $kg = k'g'$. Eine Horizontallinie durch den Berührungspunkt von Kugel und Ebene auf dieser letzten gezogen gedacht, ist Tangente an diesem Kreis. Für weitere Berührungsebenen mit gleicher Horizontalrichtung, aber anderen Neigungen, würden andere Parallelkreise erscheinen; doch wären die Richtungen der Tangenten an diesen Kreisen dieselben; die Berührungspunkte würden im Grundriss alle auf demselben Radius kn und im Raum auf einem vertikalen Grosskreis liegen, der sich in diesen Radius projiziert. Hienach ist für alle Ebenen gleicher Horizontalrichtung der geometrische Ort der Lichtstufenpunkte auf der Normalkugel ein vertikaler Grosskreis, dessen Ebene senkrecht steht auf der Horizontalrichtung der Ebenen und der sich im Grundriss der Normalkugel als ein Radius senkrecht zu dieser Horizontalrichtung projiziert.

Die Horizontalrichtung der gegebenen Ebene ist in der Linie xy schon vorhanden. Man hat also, um den Lichtstufenpunkt im Grundriss der Normalkugel zu erhalten, nur den Radius kn senkrecht zu xy oder parallel zu dz zu ziehen und auf diesem Radius $kl = k'g'$ aufzutragen; l ist der Lichtstufenpunkt im Grundriss. Um keinen Aufriss der Normalkugel beiziehen zu müssen, kann man sich den Radius $k'g'$ verschaffen, indem man für das Ziehen der Tangente $f'g'$ den Grundriss zeitweilig als Aufriss auffasst.

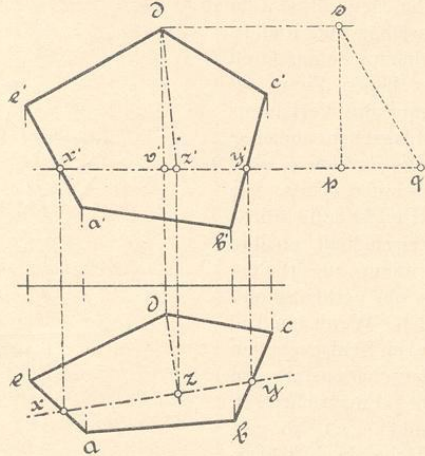
Fällt im Aufriss der Schnittpunkt f' von Tangente und Kugelachse über das Blatt hinaus, so benützt man die im Grundriss gezeigte Konstruktion, indem man den Horizontalkreis $k'g'$ in die Vertikalebene umklappt und in der Umklappung $k'i'$ parallel zu dz oder senkrecht zu xy zieht. Das Zurückklappen des Punktes i' durch $i'l'$ senkrecht zu $k'g'$ liefert dann den Punkt l' unabhängig von f' .

Die Thatfachen, durch deren Betrachtung der Punkt L sich gefunden hat, sind als wichtig für spätere Probleme

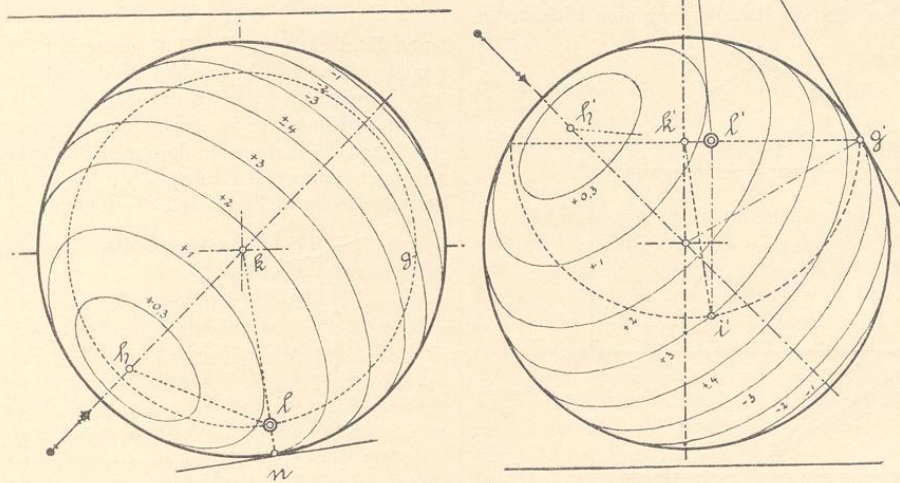
hervorzuheben und zusammenzufassen. Jede Ebene, die nicht ganz horizontal ist, hat eine Horizontalrichtung, die als Richtung der Schnittlinie mit einer beliebigen horizontalen Ebene erhalten wird, und eine dazu senkrechte Richtung der Gefällslinie oder grössten Neigung, die im Grundriss senkrecht zu jener Richtungslinie erscheint (Art. 8e). Die Horizontalrichtung bestimmt als ersten geometrischen Ort des Lichtstufenpunktes auf der Normalkugel einen Grosskreis, dessen vertikale Ebene senkrecht zu ihr gerichtet ist; sie bestimmt — um die Ortsbezeichnung auf der Erdkugel zu gebrauchen — die geographische Länge des Lichtstufenpunktes der Ebene. Die Gefällslinie bestimmt durch ihre Neigung als zweiten geometrischen Ort einen horizontalen Parallelkreis, an welchem jeder vertikale Grosskreis oder Meridian dieselbe Neigung hat wie die Ge-

Ist eine Ebene durch ihre Spuren gegeben, so giebt die Horizontalspur die Horizontalrichtung unmittelbar; die Gefällslinie erscheint im Grundriss senkrecht zur Horizontalspur.

Ist eine Ebene durch ihre Horizontalrichtung H und eine beliebige ihr zugehörige unter dem Winkel β geneigte Gerade N gegeben, so kann der Lichtstufenpunkt auch ohne Aufsuchen der Gefällslinie gefunden werden. Der geometrische Ort der Berührungspunkte aller Tangenten, welche parallel zu der geneigten Geraden N an die Normalkugel gezogen werden können, ist ein Grosskreis, dessen Ebene normal zu N steht; er projiziert sich im Grundriss der Normalkugel als eine Ellipse, deren grosse Achse senkrecht zur Horizontalprojektion von N gerichtet und deren kleine Achse gleich ist dem Normalkugeldurchmesser mal $\sin \beta$.



Figur 91 a.



Figur 91 b.

fällslinie; sie bestimmt hienach die geographische Breite oder den Polabstand des Lichtstufenpunktes.

Ist eine Ebene durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade gegeben, so bestimmt man die Horizontalrichtung ebenfalls als Verbindungslinie der Schnittpunkte der Geraden mit einer beliebigen horizontalen Schnittebene, und die Gefällslinie durch ihre im Grundriss zur Richtungslinie senkrechte Horizontalprojektion. Die Horizontalneigung der Gefällslinie findet sich wieder durch Umklappen oder getrenntes Herausragen ihrer horizontalprojizierenden Ebene.

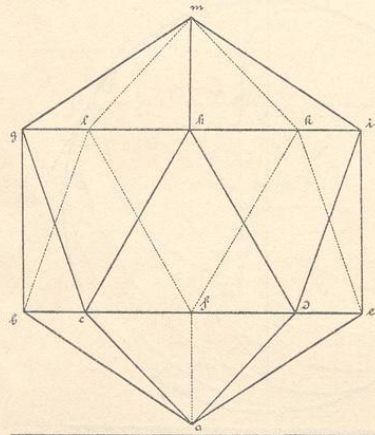
Der Schnittpunkt dieser Ellipse mit dem aus der Horizontalrichtung H erhaltenen Radius ist der Lichtstufenpunkt für die gegebene Ebene.

Die Zahlenbenennung des für eine Ebene gefundenen Berührungspunktes L auf der Normalkugel findet sich meist schon durch Schätzung für das praktische Schattieren genügend, indem man sich die Lichtstufenellipse durch den Punkt gezogen denkt und ihre Abstände von den Nachbar-ellipsen abwägt. Zu einer genauen Benennung führt jedoch diese Schätzung nicht; sie kann um so stärker irren, je näher der Berührungspunkt den Punkten $+o$

und $-o$ gelegen ist. Schärfere Bestimmung ist dadurch erreichbar, dass man die Verbindungslinie des Lichtstufenspunktes mit dem hellsten Punkt in beiden Projektionen zeichnet und durch Umklappung einer projizierenden Ebene dieser Linie deren wahre Grösse bestimmt. Diese wahre Grösse in ein nach Figur 82 gezeichnetes Normalkugelbild vom hellsten Punkt aus als Sehne eingetragen und auf den Lichtstrahldurchmesser projiziert, liefert in ihrem inneren Endpunkt die genaue Lichtstufenzahl. Denn diese Zahl verhält sich zu vier, wie die Projektionslänge zum Radius.

Die Anwendung der Lichtstufenbestimmung einer durch ihre beiden Projektionen gegebenen ebenen Figur auf ganze Körper ist nur die Wiederholung des Verfahrens für jede einzelne Grenzebene. Die Schlagschattenumrisse auf denjenigen Grenzebenen, die solche darbieten, sind unabhängig hievon in bekannter Weise aufzusuchen. Die Körperschattengrenze zu bestimmen, ist meist entbehrlich; für die meisten Grenzebenen ist nicht zweifelhaft, ob ihre Lichtstufe das Vorzeichen plus oder minus zu erhalten hat; wo Zweifel bestehen können, muss ein Vertikalschnitt mit einer Lichtstrahlenebene entscheiden. Wenn ein Teil einer Grenzebene im Licht, der andere im Schlagschatten ist, so ist nach dem früheren die Schlagschattenstufe von gleicher Benennung wie die Lichtstufe. Entspricht z. B. einer Grenzfläche ein Normalkugelpunkt $+2,2$, so entspricht der Schlagschatten auf dieser Fläche einem Schlagschattenpunkt $+2,2$ der Normalkugel.

Das regelmässige Ikosaeder, Figur 91 c, ist ein nahe-
liegendes Problem für die Bestimmung der Lichtstufen.



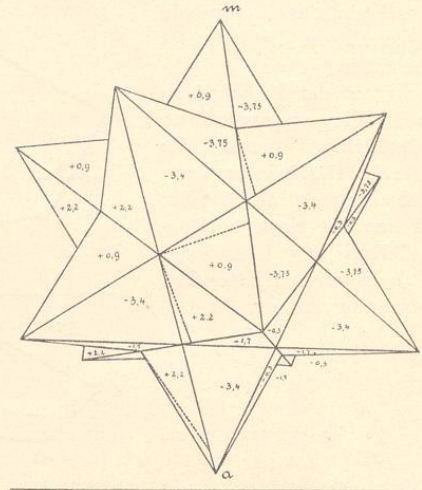
Figur 91 c.

Vier horizontale Parallelkreise der Normalkugel entsprechen den hier auftretenden Neigungswinkeln der Grenzebenen, und zehn Tangenten oder Radien im Grundriss der Normalkugel deren Horizontalrichtungen. Die Lichtstufen wurden für die angegebene Stellung etwa bestimmt wie folgt:

$a c d = -3,5$	$c d h = +2,2$	$k f l = -2,2$	$g h m = +2,5$
$a d e = -1,2$	$d h i = +3,1$	$f l b = -3,1$	$h i m = +1,85$
$a e f = -0,25$	$d i e = -2,1$	$l b g = +2,1$	$i k m = +4$
$a f b = -1,85$	$e i k = -1,65$	$b g c = +1,65$	$k l m = +3,5$
$a b c = +4$	$e k f = -0,5$	$g c h = +0,5$	$l g m = +1,2$

Die Parallelrichtung der Flächenpaare ist aus der Gleichheit je zweier Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen zu erkennen.

Je fünf der dreiseitigen Grenzflächen des Ikosaeders bilden eine Pyramide. Betrachtet man die Diagonalen der zwölf fünfseitigen Grundflächen dieser Pyramiden als Kanten eines neuen Körpers, so entsteht das in Figur 91 d perspektivisch dargestellte Sternikosaeder, in welchem von



Figur 91 d.

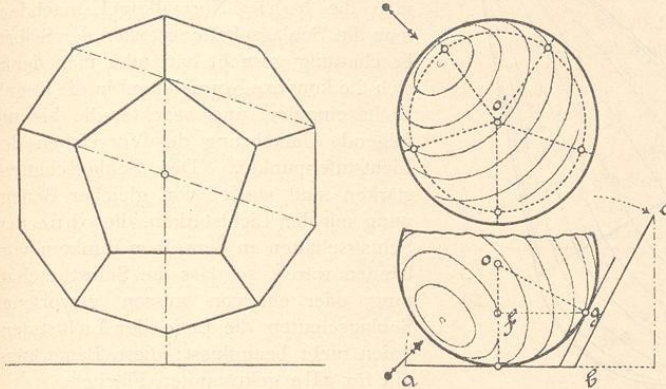
jenen Fünfecken je die fünf äusseren Dreiecke des Diagonalenpentagramms erhalten sind und das eine Selbstbeschattung darbietet. Unter der Voraussetzung unveränderter Stellung des neuen Körpers gegenüber dem Lichtstrahl sind die Lichtstufen der zwölf Fünfecke in Figur 91 c, also auch der zwölf Gruppen von je fünf Dreiecken am Sternikosaeder in Figur 91 d die folgenden:

$b c h m l = +0,3$	(Basis zur Spitze g)
$f e i m l = -2,2$	(" " " k)
$c d i m g = +0,9$	(" " " h)
$b f k m g = +3,4$	(" " " l)
$d e k m h = -3,75$	(" " " i)
$g h i k l = +1,7$	(" " " m)
$k i d a f = -0,3$	(" " " e)
$g h d a b = +2,2$	(" " " c)
$k l b a e = -0,9$	(" " " f)
$i h c a e = -3,4$	(" " " d)
$g l f a c = +3,75$	(" " " b)
$b c d e f = -1,7$	(" " " a)

Auf der ersten Lichtdrucktafel ist das Sternikosaeder mit durchgeführten Lichtstufen dargestellt, ebenso ein Gussstück (Fuss einer quadratischen Eisensäule mit Vertikalrippen), das vertikale und geneigte Flächen verschiedener Richtungen darbietet.

In bestimmten Fällen liegt es näher, anstatt der Horizontalrichtung der gegebenen Ebene ihre zur Vertikalebene parallele Richtungsline zu benützen, ebenso anstatt der Horizontalneigung den mit der Vertikalebene gebildeten Winkel. In Figur 91 e ist ein regelmässiges Zwölf-

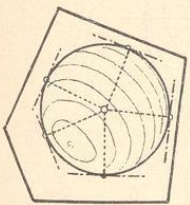
flach, das mit der Vorderfläche parallel zur Vertikalebene gerichtet ist, in dieser Weise behandelt, und es führt diese Lösung schneller zum Ziel, weil die fünf Nebenseiten gleiche Winkel mit der Vorderfläche, also auch mit der Vertikalebene bilden, so dass sie ihre Lichtstufenpunkte auf demselben mit



Figur 91 e.

der Vertikalebene gleichgerichteten Parallelkreis der Kugel finden. Aus der Verkürzung der Höhenlote der Nebenseiten ist der Winkel zwischen Vorderseite und Nebenseite abc abgeleitet, aus diesem der Berührungspunkt g einer vertikal gedachten Nebenseite mit der Normalkugel in deren Grundriss. Im Aufriss der Normalkugel ist mit einem Radius gleich fg ein konzentrischer Kreis beschrieben; die Schnittpunkte dieses Kreises mit Radien, die senkrecht zu den Seiten der Vorderfläche des Körpers gezogen wurden, sind die Lichtstufenpunkte der fünf Nebenseiten. Die Vorderfläche entspricht dem Mittelpunkt im Aufriss der Normalkugel, also der Lichtstufe $+1,7$; die fünf Nebenseiten haben etwa die Lichtstufen $+0,15 + 2,4 - 2,4 - 3 + 1,6$. Auf dem ersten Lichtdruckblatt ist der Körper schattiert.

Die Konstruktion des Lichtstufenpunktes einer Ebene in dieser oder der ursprünglichen Gestalt vereinfacht sich wesentlich bei Ebenen, die senkrecht zu einer Grundebene stehen und im Zusammenhang damit die Lichtstufenbestimmung bei prismatisch gestalteten Körpern dieser Richtung. Figur 91 f deutet an, wie z. B. für ein vertikalstehendes Prisma die Lichtstufenpunkte für die Seitenflächen aus dem Grundriss der Normalkugel als Berührungspunkte von Tangenten parallel den Seiten der Grundfläche erhalten werden. In gleicher Weise wäre der Aufriss der Normalkugel für ein zur Vertikalebene senkrechtes Prisma zu benützen.



Figur 91 f.

Die Grundebenen selbst und alle gleichgerichteten Ebenen haben ihre Lichtstufenpunkte in den Endpunkten von drei Durchmessern der Normalkugel, die senkrecht zu den drei Grundebenen stehen. Die Zahlenbenennung dieser Punkte ist fast genau $+1,7$. Die genaue Zahl ist $4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1,6908$.

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

Schiefgerichtete, aber einer Grundebene parallele Prismen verwerten die Thatsache, dass in Beziehung auf diese Grundebene die Richtungslinien ihrer Seitenflächen dieselben sind, also die Lichtstufenpunkte dieser Seitenflächen denselben Grosskreis als ersten geometrischen Ort haben. Für ein zur Vertikalebene paralleles Prisma liegen die Lichtstufenpunkte auf einem Grosskreis, der im Aufriss der Normalkugel als Durchmesser senkrecht zu den Kanten des Prismas erscheint. Die Ebene dieses Kreises ist samt seinen Lichtstufenpunkten und dem Normalschnitt des Prismas in die Vertikalebene umzuklappen. In der Umklappung wird wieder eine Tangente parallel zu jeder Seite des Normalschnittpolygons an den Kreis gezogen; der Berührungspunkt dieser Tangente ist der Lichtstufenpunkt für die zu der Polygonseite gehörige Grenzfläche des Prismas.

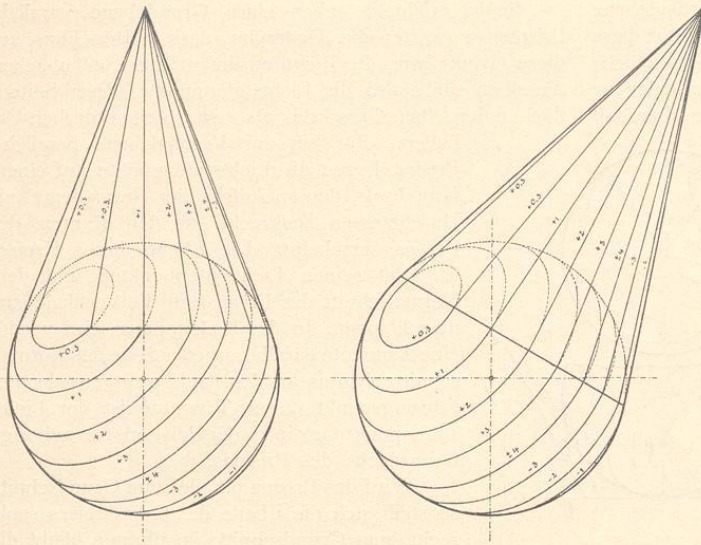
Wird das Prisma parallel zum Grundschnitt, so stellt sich die Ebene des Grosskreises senkrecht zum Grundschnitt; im übrigen bleibt die Konstruktion unverändert.

Die Anwendung der Konstruktion auf horizontale Prismen bedarf keiner Erklärung.

Auch für beliebig schief gerichtete Prismen von vielen Seiten ergibt sich oft noch eine Abkürzung der Arbeit gegenüber dem für beliebige eben begrenzte Körper gezeigten Verfahren, wenn der Grosskreis der Normalkugel aufgesucht wird, dessen Ebene senkrecht zu den Prismenkanten gerichtet ist. Die Bestimmung dieses Grosskreises geschieht wie bei den beliebig schief gerichteten Cylinderflächen in Art. 100.

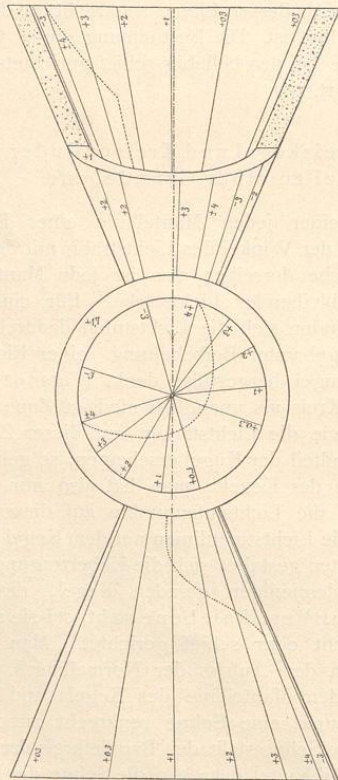
Gerade Kreiskegel und Kreiscylinder mit Achse 92. parallel zu einer Grundebene.

Längs einer jeden Mantellinie eines Kegels oder Cylinders ist der Winkel des Lichtstrahls mit der Normalen auf der Fläche derselbe; also ist jede Mantellinie eine Linie gleichbleibender Lichtstärke. Für einen geraden Kreiskegel finden sich die Lichtstufen dadurch, dass man sich den Kegel unter Beibehaltung seiner Richtung über die Normalkugel hergestülpt denkt (Figur 92 a). Er hat dann einen Kreis als unendlich niedrige Zone mit ihr gemein, und wie die Lichtstärken auf dieser Zone als auf einem Bestandteil der Kugel erscheinen, so gelten sie auch für die Zone des Kegels; man hat also nur die Mantellinien durch die Lichtstufenpunkte auf diesem Kreis zu ziehen, um die Lichtstufenlinien auf dem Kegel zu erhalten. Am einfachsten gestaltet sich die Uebertragung der Lichtstufen bei demjenigen geraden Kegel, dessen Achse parallel zur Vertikalebene steht, sei sie nun lotrecht oder wagrecht oder schief gerichtet. Man zieht eine Tangente an den Aufriss der Normalkugel parallel zur umrissbildenden Mantellinie des Kegels und durch den Berührungspunkt eine Sehne senkrecht zur Achse des Kegels; diese Sehne stellt den Parallelkreis der Berührung von Kegel und Kugel dar. Wo die Sehne die Lichtstufenlinien der Kugel schneidet, da liegen die Lichtstufenpunkte



Figur 92 a.

für den gleich grossen Parallelkreis des Kegels und dürfen auf diesem nur noch mit der Spitze verbunden werden. Das Verfahren liefert in den Mantellinien + 4 gleichzeitig die Körperschattengrenzen auf dem Kegel, so dass diese nicht vorher besonders konstruiert werden müssen. Am



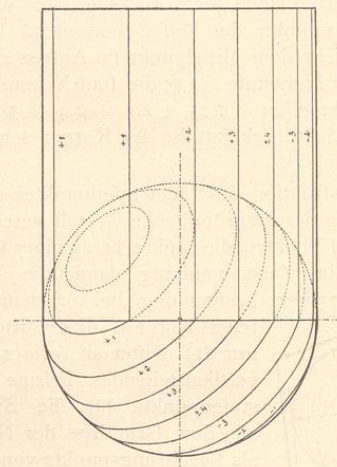
Figur 92 b.

häufigsten wird der gerade Kreiskegel mit lotrechter Achse auftreten; es wird dann jener Parallelkreis von Kegel und Kugel horizontal.

Für die hohle Kegelfläche benützt man die hohle Normalkugel, nachdem man die Schlagschattengrenzen der Selbstbeschattung gesucht hat, oder man denkt sich die konvexe Normalkugel in die Kegelfläche eingelegt und beachtet die hieraus folgende Umkehrung der Vorzeichen der Lichtstufenpunkte. Die Schlagschattenstärken sind wieder von gleicher Benennung mit den Lichtstärken, die ohne den Schlagschatten an denselben Punkten vorhanden wären, so dass die Selbstbeschattung oder ein von aussen geworfener Schlagschatten die Lage der Lichtstufenlinien nicht beeinflusst; diese Bemerkung gilt für alle gekrümmten Flächen.

Wie der Aufriss der Normalkugel für die geraden Kreiskegelflächen mit Achse parallel zur Vertikalebene, so dient der

Grundriss der Normalkugel für dieselbe Art von Kegelflächen parallel zur Horizontalebene, wenn sie als Grundrisse auftreten. In Figur 92 b erscheint in Verbindung mit vertikalen konvexen und hohlen Kreiskegeln ein horizontaler Kreiskegel mit Achse senkrecht zur Vertikalebene als Aufriss gezeichnet. Für diesen Fall bestimmen sich die Lichtstufenlinien zwar wieder dadurch, dass man

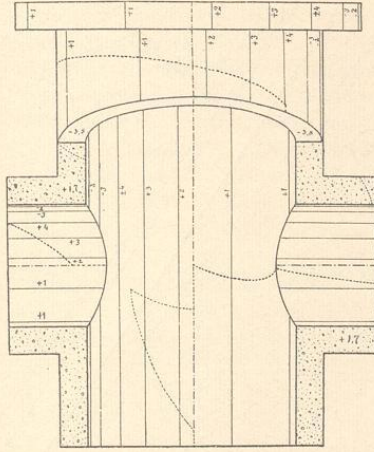


Figur 92 c.

sich den Kegel unter Beibehaltung seiner Richtung über die Normalkugel hergeschoben denkt; doch ist der Berührungskreis, nachdem sein Radius aus dem Grundriss von Kegel und Kugel bestimmt ist, im Aufriss der Normalkugel als ein mit dem Umriss konzentrischer Kreis zu zeichnen, und die Lichtstufenlinien des Kegelbildes sind die Radien dieses Kreises nach seinen Schnittpunkten mit den punktierten Lichtstufenlinien des Kugelbildes. Die

erste Lichtdrucktafel enthält die in Figur 92 b dargestellten Kegelflächen mit Durchführung der Lichtstufen.

Für Cylinderflächen, voll oder hohl, von kreisförmigem Querschnitt und mit Achse parallel zu einer



Figur 92 d.

Grundebene bedarf es keiner weiteren Vorschrift; der Cylinder wird als Kegel mit unendlich ferner Spitze behandelt; der Kreis der Berührung von Cylinder und Kugel wird ein Grosskreis, der sich im Aufriss, beziehungsweise Grundriss der Kugel geradlinig und senkrecht zur Cylinderachse projiziert (Figur 92 c). Freilich setzt dies zunächst voraus, dass eine Normalkugel gezeichnet sei, deren Durchmesser gleich dem des Cylinders ist. Aber es lässt sich

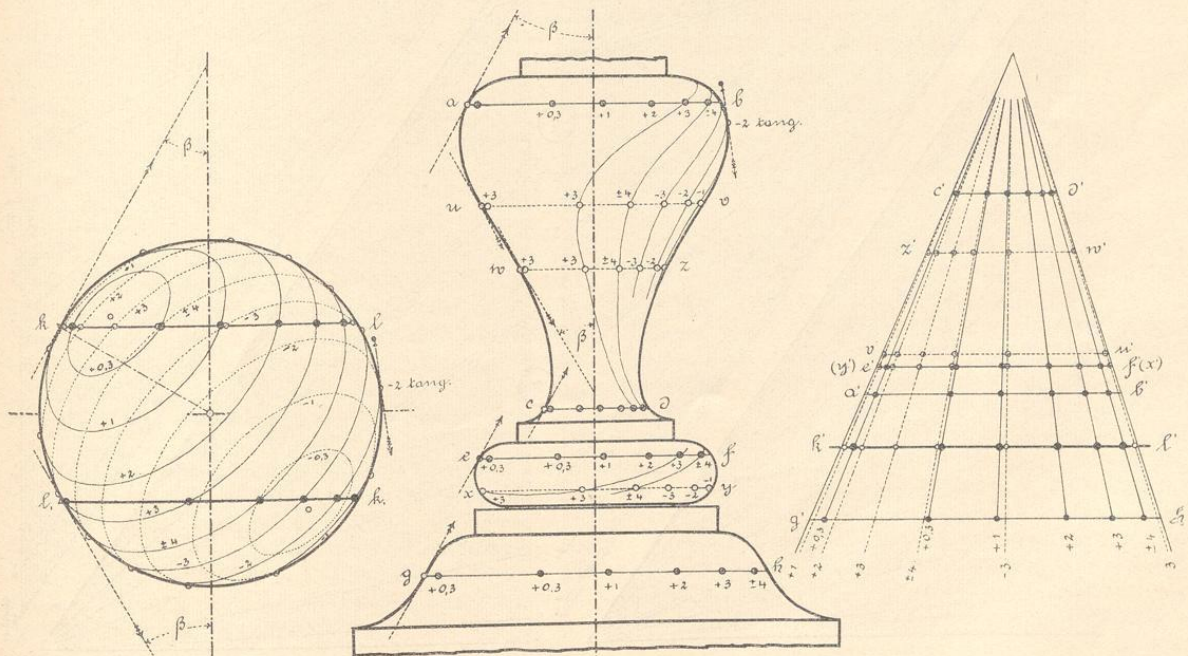
jede andere Normalkugel ebenfalls verwerten, indem man die auf dem Grosskreis der Kugel erscheinende Lichtstufeneinteilung proportional vergrößert oder verkleinert. Figur 92 d bietet horizontale und vertikale volle und hohle Cylinderflächen mit ihren Lichtstufenlinien und ihrer Selbstbeschattung; auf der ersten Lichtdrucktafel ist die Schattierung durchgeführt.

Die Drehungsfläche mit vertikaler Achse.

93.

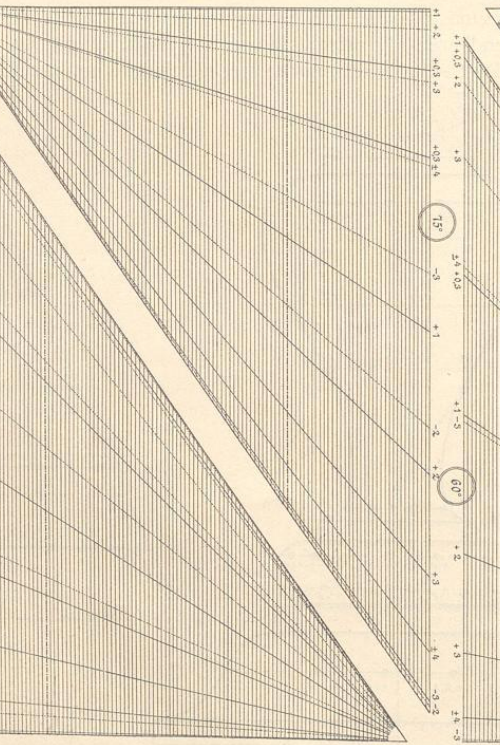
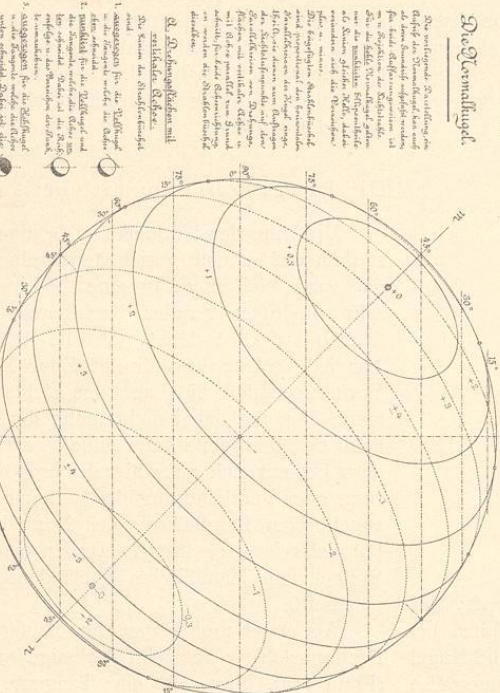
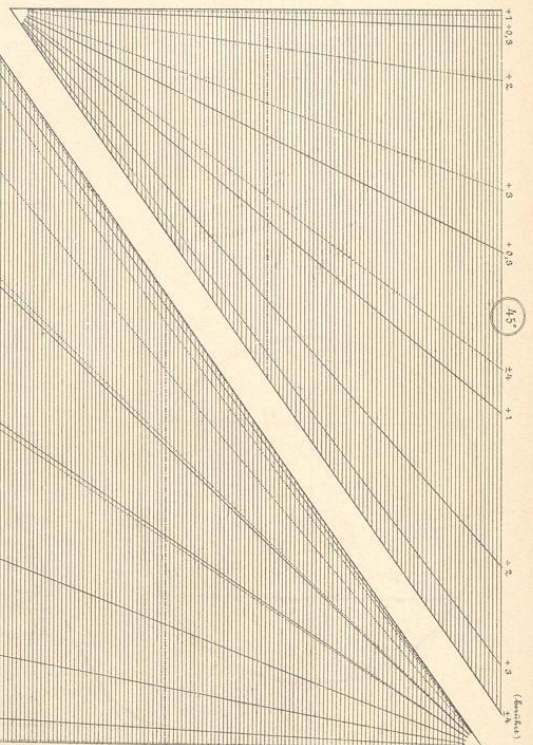
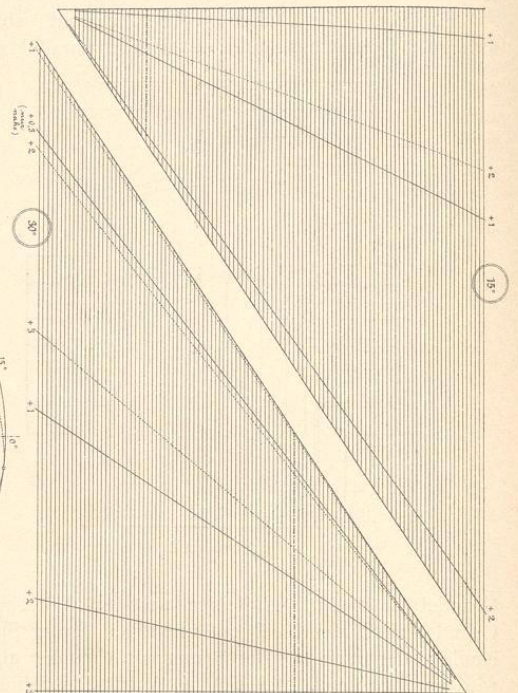
Mit Hilfe der Normalkugel bestimmen sich die Lichtstärken auf beliebig gerichteten Drehungsflächen dadurch, dass man sich diese in eine Aufeinanderstellung vieler sehr niedriger gerader Kreiskegel- und Kreiscylinderflächen aufgelöst denkt, die alle dieselbe Achse haben. Für jede solche kreisförmige Zone lässt sich nach dem Vorhergehenden die Lage der Lichtstufenpunkte bestimmen. Man hat dabei nicht nötig, den Kegel, dessen Element eine bestimmte Zone bildet, ganz zu zeichnen, sondern bedient sich auch hier der proportionalen Vergrößerung oder Verkleinerung der Einteilung, die man auf dem zugehörigen Parallelkreis der Normalkugel erhält. Alle Parallelkreise eines Kegels werden ja durch ein beliebiges System von Mantellinien nach denselben Verhältnissen eingeteilt.

Als erster und weitaus am häufigsten vorkommender Drehungskörper erscheint derjenige mit lotrechter Achse (Figur 93 a). Man zieht eine Tangente beliebiger Neigung an den Umriss des Drehungskörpers und eine gleich gerichtete Tangente an den Umriss der Kugel, ferner die Horizontallinien ab beziehungsweise kl durch die Berührungspunkte, welche die horizontalen Parallelkreise des



Figur 93 a.

Die Vermählung



Die Vermählung ist die Verbindung zweier Personen, die durch eine gewisse Anzahl von Jahren zusammengelebt haben, und die durch eine gewisse Anzahl von Jahren zusammengelebt haben, und die durch eine gewisse Anzahl von Jahren zusammengelebt haben.

Die Vermählung ist die Verbindung zweier Personen, die durch eine gewisse Anzahl von Jahren zusammengelebt haben, und die durch eine gewisse Anzahl von Jahren zusammengelebt haben, und die durch eine gewisse Anzahl von Jahren zusammengelebt haben.

Die Vermählung ist die Verbindung zweier Personen, die durch eine gewisse Anzahl von Jahren zusammengelebt haben, und die durch eine gewisse Anzahl von Jahren zusammengelebt haben, und die durch eine gewisse Anzahl von Jahren zusammengelebt haben.

Die Vermählung ist die Verbindung zweier Personen, die durch eine gewisse Anzahl von Jahren zusammengelebt haben, und die durch eine gewisse Anzahl von Jahren zusammengelebt haben, und die durch eine gewisse Anzahl von Jahren zusammengelebt haben.

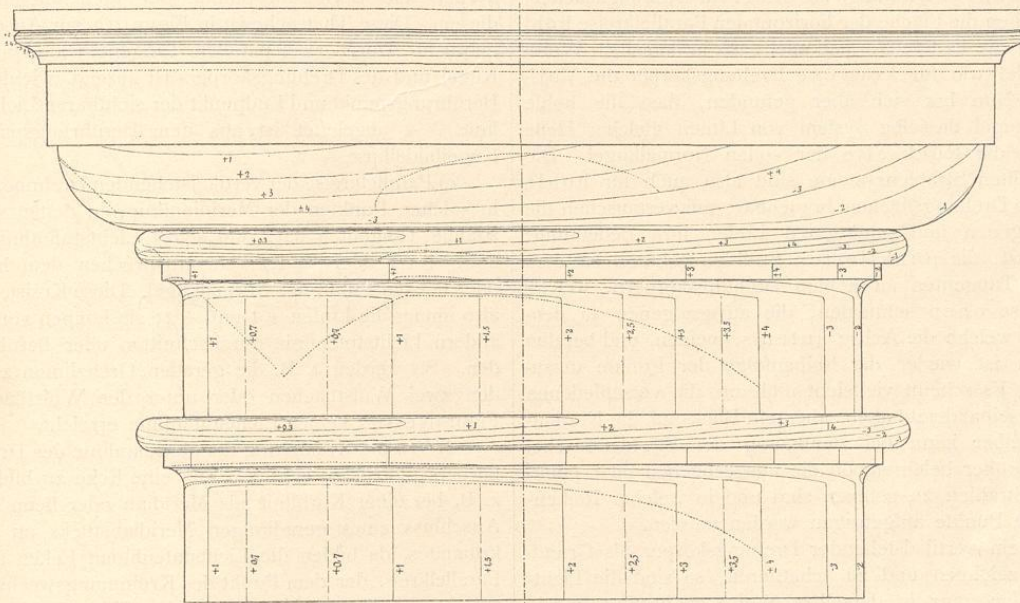
Figur 93 b.

Drehungskörpers und der Kugel darstellen. Auf der Horizontallinie der Kugel entsteht eine Teilung durch die Lichtstufenlinien; diese Teilung überträgt man proportional vergrößert oder verkleinert auf die Horizontallinie des Drehungskörpers und benennt jeden Teilpunkt mit derselben Zahl wie auf der Kugel. Führt man dieses Verfahren für eine genügende Zahl von verschiedenen gerichteten Tangenten durch, so erscheint auf der Drehungsfläche eine Gruppe von Punkten, von denen die gleichbenannten sich leicht zusammenfinden und durch eine stetige Kurve verbinden lassen. Damit sind die Lichtstufenlinien der Drehungsfläche bestimmt; in allen Punkten einer solchen Linie hat die Fläche dieselbe Lichtstärke oder Helle, wie der gleichbenannte Lichtstufenkreis auf der Normalkugel.

Für alle Tangenten gleicher Neigung, die man am

welcher an irgend einem vertikalstehenden Drehungskörper derselben Neigung der Tangente angehört, die Teilung mit einem Papierstreifen abnehmen können. Auf dem Normalkugelblatt (Figur 93 b) ist dieses Verfahren durchgeführt für die Neigungen von 90° , 75° , 60° , 45° , 30° und 15° , wovon man die meisten an den Schiebdreiecken hat und diejenigen von 15° und 75° durch Halbieren des Winkels von 30° rasch erhalten kann. Für 0° oder die horizontale Tangente erscheint natürlich kein Strahlenbüschel; hierfür ist die Lichtstärke immer dieselbe, nämlich nahezu + 1,7.

Zieht man (Figur 93 a links) an den Normalkugelumriss eine Tangente, welche die vertikale Achse unter demselben Winkel β unten schneidet, den die früher gezogene Tangente nach oben bildet, so findet sich, dass der untere horizontale Parallelkreis l, k , durch die sicht-



Figur 93 c.

Umriss vertikalstehender Drehungskörper ziehen kann, wie z. B. in den Punkten $ac eg$ der Figur 93 a, ist derselbe Horizontalkreis der Normalkugel massgebend, wonach die Strecken $ab cd ef gh$ in gleichem Verhältnis einzuteilen sind wie die Strecke kl . Hiefür dient in bekannter Weise ein Strahlenbüschel, das von einem beliebigen Pol aus nach den Teilpunkten der getrennt herausgetragenen Linie $k'l' = kl$ gezogen wird (Figur 93 a rechts). Die parallel zu $k'l'$ eingepassten Strecken $a'b' = ab$, $c'd' = cd$, $e'f' = ef$, $g'h' = gh$ werden durch die Strahlen in denselben Verhältnissen eingeteilt wie die Strecke kl . Wenn man also ein- für allemal zu einer bestimmten Neigung der Tangente die Teilung der horizontalen Sehne des Kugelbildes heraus trägt, ein Strahlenbüschel nach den Teilpunkten zieht und die Strahlen durch eine grosse Zahl von weiteren parallelen Linien durchschneidet, so wird man an diesem Liniensystem für jeden Horizontalkreis,

baren ausgezogenen Lichtstufenlinien ganz ebenso eingeteilt wird, wie der gleich grosse obere Parallelkreis kl durch die punktierten, für die Kugelmückseite gültigen Ellipsenteile, nur mit Umkehrung der Reihenfolge und der Vorzeichen der Punkte. Wenn man also in die Strahlenbüschel der oberen Parallelkreise als punktierte Strahlen auch diejenigen aufnimmt, welche für die Lichtstufenpunkte der Kugelmückseite gelten würden, so können diese Strahlenbüschel zugleich für diejenigen Parallelkreise auf der Vorderseite des Drehungskörpers dienen, deren Tangenten die Achsen unter denselben Winkeln unten schneiden.

In den Punkten uw und x sind solche Tangenten gezogen; die Strecken $uv wz$ und xy sind mit $u'v' w'z'$ und $x'z'$ in das für den Winkel β gültige Strahlenbüschel parallel eingepasst; die Abstände der dort auf den punktierten Strahlen erhaltenen Punkte waren von w nach z mit derjenigen Reihenfolge einzutragen, wie sie im Strahlen-

büschel von w' nach z' auftreten, ebenso für $uv = u'v'$ und für $xy = x'y'$; ausserdem waren die Vorzeichen der Lichtstufenpunkte umzukehren, z. B. anstatt $+3$ zu setzen -3 .

Die in Figur 93b gezeichneten sechs Strahlenbüschel enthalten ebenfalls die punktierten Strahlen; sie gelten auch für diejenigen Tangenten ihrer Winkel, welche die Achsen der Drehungskörper unten schneiden. Andernfalls wären zwölf Strahlenbüschel notwendig geworden.

Ein durchgeführtes Beispiel für die Lichtstufenlinien auf einem vertikalstehenden Drehungskörper ist Fig. 93c; das dargestellte Kapitäl ist schattiert auf der vierten Lichtdrucktafel, die auch die Hälfte der Säulenbasis als zweiten solchen Körper darbietet. Stärker bewegte Umrisslinien erscheinen an den Balustern der zweiten Lichtdrucktafel.

Für die hohlen Drehungsflächen mit lotrechter Achse und konkaver Drehung, das heisst für Drehungsflächen, bei welchen die Fläche der horizontalen Parallelkreise hohl ist, wird die hohle Normalkugel ganz in derselben Weise verwendet wie für konvexe Drehungskörper die Vollkugel. Nun hat sich aber gefunden, dass die hohle Normalkugel dasselbe System von Linien gleicher Helle hat wie die Rückseite der vollen Normalkugel. Die aufgestellten Strahlensysteme sind also auch für hohle lotrechte Drehungsflächen brauchbar; nur vertauschen die ausgezogenen und punktierten Linien ihre Bedeutung; das heisst, die punktierten Strahlen gehören zu denjenigen Tangenten an hohlen Drehungskörpern, welche die Achse oben schneiden, die ausgezogenen zu denjenigen, welche die Achse unten schneiden, und bei den letzteren ist wieder die Reihenfolge der Punkte umzukehren. Es scheint vielleicht mühsam, die verschiedenen Fälle auseinanderzuhalten, aber ein Blick auf die Normalkugel selber kann bei Benützung der Strahlenbüschel rasch darüber belehren, ob die ausgezogenen oder punktierten Strahlen zu nehmen sind und in welcher Reihenfolge die Punkte aufgetragen werden müssen.

Ist ein vertikalstehender Drehungskörper als Grundriss zu zeichnen und zu schattieren, so sind die Lichtstufenlinien ganz in derselben Weise zu bestimmen wie nach Art. 95 diejenigen für Drehungsflächen mit Achsen senkrecht zur Vertikalebene, wenn sie als Aufrissbilder auftreten.

94. Sätze über den Verlauf der Lichtstufenlinien auf solchen Flächen.

Die Lichtstufenlinien auf vertikalstehenden, als Aufrisse gezeichneten Drehungskörpern lassen folgende Tatsachen erkennen:

a) Dem höchsten Punkt einer Lichtstufenlinie auf der Drehungsfläche und dem höchsten Punkt der gleichnamigen Ellipse auf der Normalkugel entsprechen zwei Parallelkreise, an welchen die Umrisse des Drehungskörpers und der Kugel gleichgerichtete Tangenten haben. Da auch beide Parallelkreise durch die Lichtstufenpunkte proportional geteilt sind, so lässt sich mit diesem Satz der höchste Punkt jeder Lichtstufenlinie auf dem Drehungskörper, in welchem die Kurve eine horizontale Tangente

hat, scharf bestimmen. Dasselbe gilt für die tiefsten Punkte aller Lichtstufenlinien. Höchste Punkte können in Vorderansichten nur haben die Kurven $+0,3$ und $+1$, tiefste Punkte die Kurven $+0,3 + 1 + 2 + 3 \pm 4 - 3 - 2$.

b) Die Lichtstufenlinien kommen berührend am Umriss der Drehungsfläche an; wenn auch die Berührung eine solche mit sehr starker Krümmung sein kann, die sich von einem Schnitt kaum unterscheidet. In einem jeden Berührungspunkt hat der Umriss der Drehungsfläche dieselbe Richtung der Tangente, wie der Normalkugelumriss am Berührungspunkt der gleichnamigen Lichtstufenellipse. Wenn man also auf dem Normalkugelblatt die Berührungspunkte bezeichnet (wie in Art. 88 gezeigt und in Figur 88a und b geschehen), so liefern die Tangenten am Umriss der Normalkugel in diesen Punkten und gleichgerichtete Tangenten am Umriss des Drehungskörpers die Berührungspunkte der Lichtstufenlinien an diesem. Diese Tatsache ist in Figur 93a zur Anschauung gebracht. Durch zwei parallele Tangenten am Umriss der Kugel und des Drehungskörpers ist gezeigt, wie der obere Berührungspunkt und Endpunkt der sichtbaren Lichtstufenlinie -2 abgeleitet ist aus dem Berührungspunkt der Kugelbildellipse -2 .

c) Parallelkreise der vertikalstehenden Drehungsflächen in solchen Punkten der Meridianlinie, in denen sie horizontale Tangenten hat, sind selbst Lichtstufenlinien, und zwar $+1,7$ oder $-1,7$; sie entsprechen dem höchsten oder tiefsten Punkt der Normalkugel. Diese Kreise trennen also immer die Linien $+1$ und $+2$; sie können von keiner andern Lichtstufenlinie durchschnitten oder berührt werden. So werden z. B. die geraden Grenzlinien zwischen den zwei Wulstflächen oder unter den Wulstflächen in Figur 93c von keiner Lichtstufenlinie erreicht.

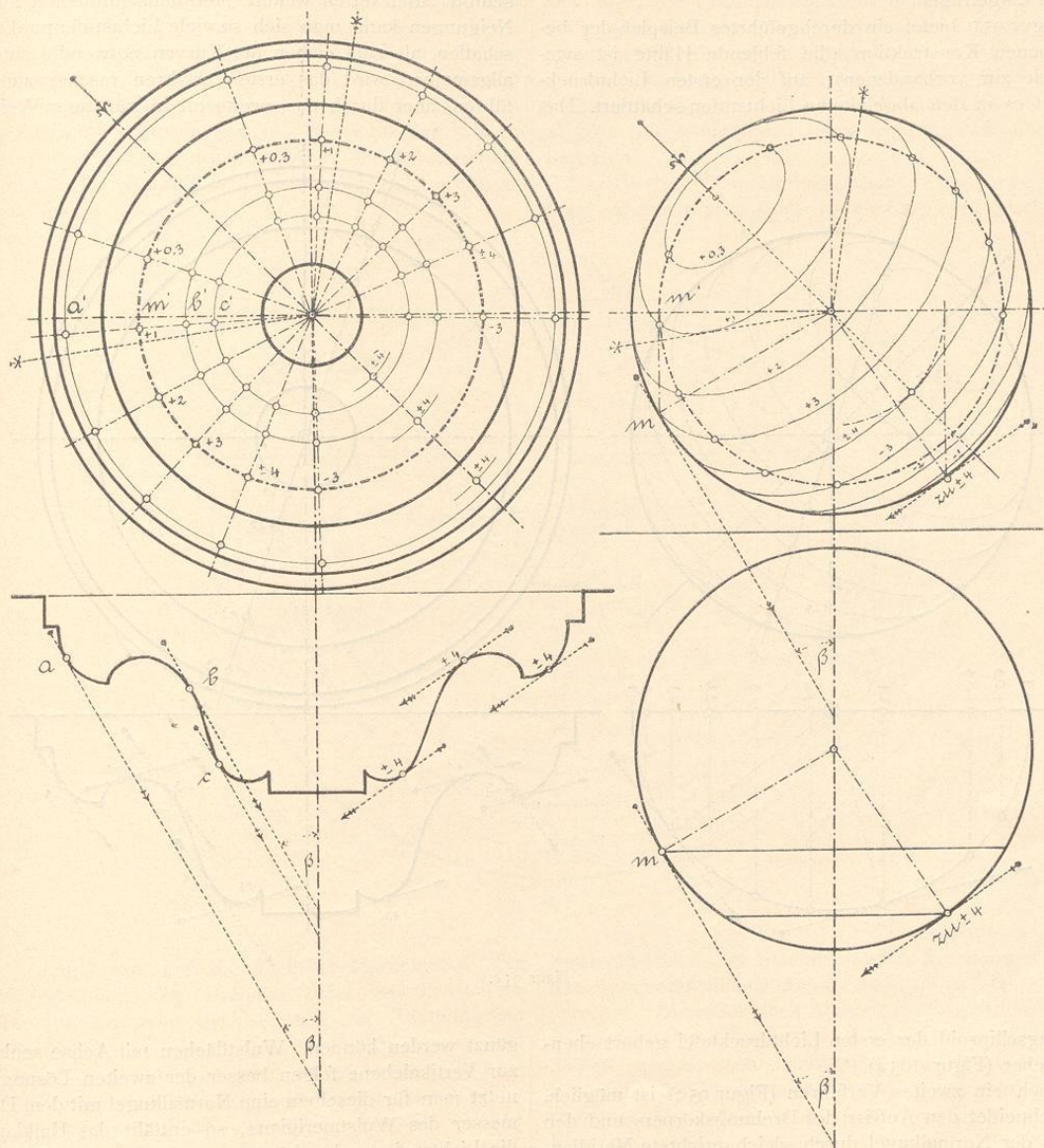
d) Wo die Krümmung der Meridianlinie des Drehungskörpers plötzlich wechselt, ohne eine Ecke zu bilden, wie z. B. bei einer Korblinie als Meridian oder beim stetigen Anschluss eines geradlinigen Meridianstücks an ein gekrümmtes, da bilden die Lichtstufenlinien Ecken auf dem Parallelkreis, der dem Punkt des Krümmungswechsels entspricht, obgleich der Umriss keine Ecke darbietet. Ein Beispiel ist schon in Figur 92c enthalten, wenn man sich das verdeckte Normalkugelstück weggenommen denkt.

Die Drehungsfläche mit Achse senkrecht zur 95. Vertikalebene.

Wenn für eine solche Fläche die Lichtstufenlinien in der Horizontalprojektion gesucht werden sollen, so ist die Lösung ganz entsprechend derjenigen bei vertikalstehenden Drehungskörpern; nur wird der Grundriss der Normalkugel anstatt des Aufrisses benützt, und es sind dann die sechs Strahlenbüschel zur Normalkugel abermals verwertbar. Anders jedoch, wenn die Schattierung nur in der Vertikalprojektion verlangt wird. Als Beispiel hierfür mag eine gedrehte Rosette auf vertikaler Wandfläche dienen. Ein passendes Beispiel für hohle Drehungsflächen dieser Art wäre das mit einer grossen Hohlkehle und Wulsten zurücktretende Rahmengesims eines gotischen Rosenfensters oder Hochfensters.

An den Horizontaldurchschnitt der Rosette (Fig. 95a) zieht man in den Punkten $a b c$ parallele Tangenten unter einem beliebigen Winkel β . Ihnen entsprechen die der Vertikalebene parallelen Kreise $a' b' c'$ im Aufriss. Bestimmt man auf dem horizontalen Grosskreis der Normalkugel den Berührungspunkt m einer Tangente, die den

rung oder Verkleinerung, sind auch die drei Parallelkreise im Aufriss der Rosette einzuteilen, um auf ihnen die Lichtstufenpunkte zu erhalten. Dies geschieht, indem man den Kugelkreis mit seiner Einteilung auch in den Aufriss der Rosette zeichnet und Radien durch seine Teilpunkte zieht; bei reicheren Formen dienen besser eigene Hilfsfiguren



Figur 95a.

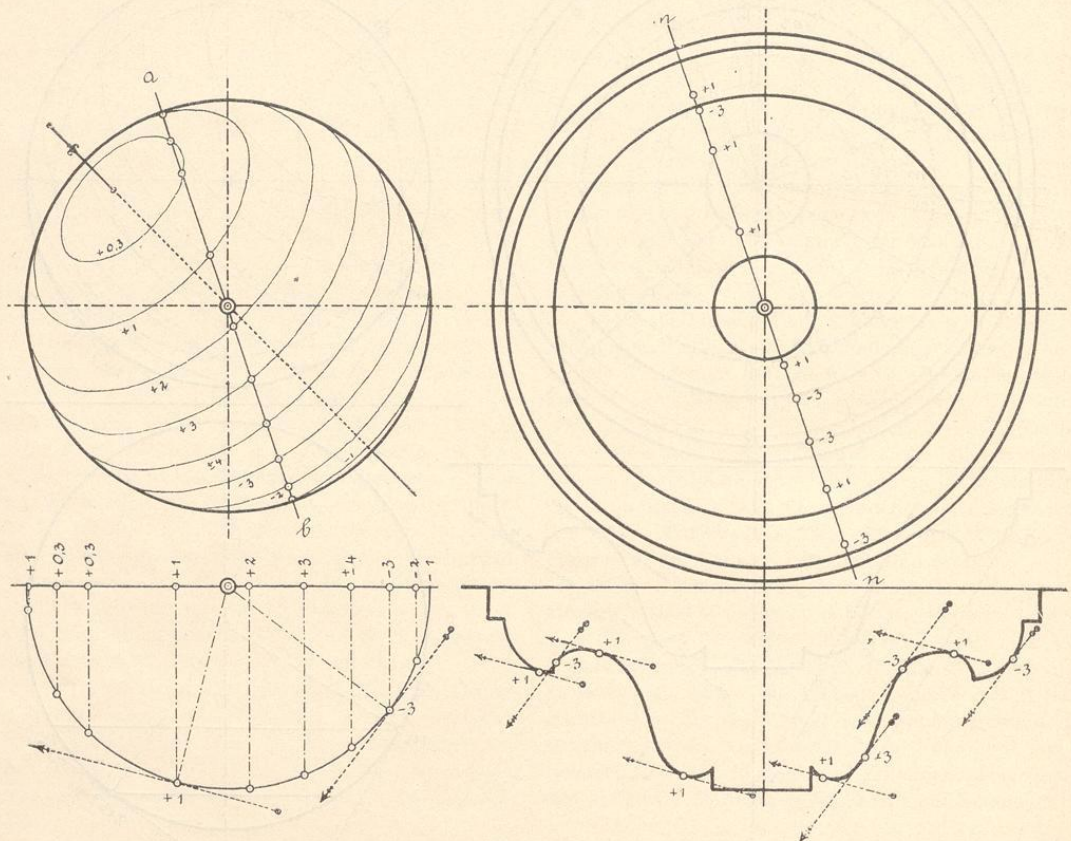
in $a b$ und c gezogenen parallel ist, und legt durch den Berührungspunkt einen Kugelkreis m' parallel zur Vertikalebene, der sich im Aufriss der Normalkugel als konzentrischer Kreis projiziert, so wird dieser Kreis durch die Lichtstufenlinien in einer bestimmten Weise eingeteilt, und in derselben Weise, nur mit proportionaler Vergrösse-

für jeden Kugelkreis. Führt man das beschriebene Verfahren für eine genügende Zahl von Richtungen der Tangenten durch, so lassen sich die Lichtstufenlinien durch die im Aufriss gefundenen Punkte ziehen, ohne dass sie auch im Grundriss gezeichnet werden müssten. Zu Fig. 95a ist noch zu bemerken, dass der Grundriss der Normal-

kugel nur beigefügt ist, um den Gedanken der Lösung deutlicher zu zeigen, dass aber für die praktische Ausführung der Konstruktion alle zur Bestimmung der Radien nötigen Hilfslinien auch an der Aufrissfigur gezogen werden können, deren Umriss hierbei eben zeitweilig als Grundriss aufgefasst wird. Die Hilfslinien sind deshalb auch im Aufriss eingetragen.

Figur 95b bietet ein durchgeführtes Beispiel der beschriebenen Konstruktion (die fehlende Hälfte ist symmetrisch zur vorhandenen); auf der ersten Lichtdrucktafel ist es in den abgeleiteten Lichtstufen schattiert. Das

Punkt + 1 eine Tangente, dann an den umgeklappten Rosettenmeridian parallele Tangenten, so werden die Berührungspunkte der letzteren ebenfalls die Lichtstärke + 1 haben, und sie sind dann nur noch in den Aufriss zurückzuklappen. Durch weitere Tangenten bekommt man auch die Punkte + 2 + 3 + 4 — 3 u. s. w. auf demselben Meridianschnitt, und durch weitere Meridianschnitte mit anderen Neigungen kann man sich so viele Lichtstufenpunkte verschaffen, als zum Ziehen der Kurven notwendig sind. Im allgemeinen wird das erste Verfahren rascher zum Ziel führen, aber durch das zweite oft in günstiger Weise er-



Figur 95 c.

Drehungsellipsoid der ersten Lichtdrucktafel gehört ebenfalls hieher (Figur 103 a).

Noch ein zweites Verfahren (Figur 95c) ist möglich. Man schneidet den Aufriss des Drehungskörpers und den Aufriss der Normalkugel durch gleichgerichtete Meridianebenen mn und ab . Zieht man an den Grosskreis, der den Schnitt der Kugel bildet, eine Tangente, und dann eine gleichgerichtete Tangente an den Meridianschnitt des Drehungskörpers, so werden die beiden Berührungspunkte gleiche Lichtstärke haben. Daher klappt man sowohl den Grosskreis als den Meridian in die Vertikalebene um. Auf der Umklappung des Grosskreises ab erscheinen Teilungspunkte + 1 — 3 u. s. w. Zieht man z. B. in dem

gänzt werden können. Wulstflächen mit Achse senkrecht zur Vertikalebene folgen besser der zweiten Lösung; benutzt man für dieselben eine Normalkugel mit dem Durchmesser des Wulstmeridians, so entfällt das Umklappen; die Lichtstufenpunkte können unmittelbar vom Kugelbilddurchmesser auf den Radius des Wulstbildes übertragen werden und die Aufgabe löst sich in einfachster Weise. Es erscheint hier der Gedanke der Schattenkonstruktion nach Figur 58 auf die Lichtstufenbestimmung ausgedehnt.

Für die Lichtstufenlinien auf Drehungsflächen mit Achsen senkrecht zur Vertikalebene, die als Aufrisse dargestellt sind, ergeben sich folgende Sätze und Bemerkungen.

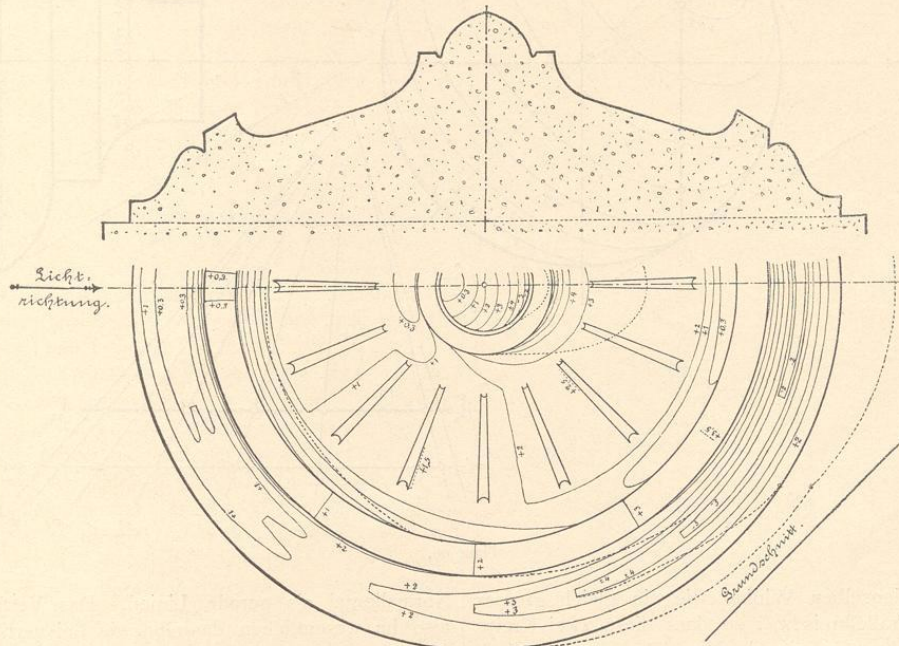
a) Die ganze Lichtstufenliniengruppe hat eine Symmetralachse im Lichtstrahldurchmesser.

b) Wenn an eine Lichtstufenlinie +1 des Normalkugelaufrißbildes (Figur 95a) eine Tangente vom Mittelpunkt aus und im Aufriss der Drehungsfläche ein Radius parallel zu dieser Tangente gezogen wird, so berührt dieser Radius die Lichtstufenlinie +1 der Drehungsfläche, und diese Linie kehrt an diesem Radius in derselben Weise um, wie die Lichtstufenellipse +1 des Kugelbildes an ihrer Tangente. In Figur 95a sind die Radien punktiert eingetragen und mit Kreuzen bezeichnet. Figur 95b zeigt das Umkehren der Kurven +0,3 und +1; bei den andern Lichtstufenlinien ist es nicht möglich, da im Kugelbild tangierende Radien an die andern Lichtstufenellipsen nicht möglich sind.

Lösung mit der sonst in Figur 95a durchgeführten ersten.

d) Werden die in Figur 95a an den Flächenschnitt gezogenen Tangenten parallel zum Grundschnitt, so erscheinen in den Berührungspunkten diejenigen Parallelkreise, nach welchen Ebenen, die der Vertikalebene parallel sind, die Drehungsfläche berühren. Diese Parallelkreise sind also zugleich Lichtstufenlinien +1,7; sie entsprechen dem vordersten Punkt der Normalkugel; als nur gedachte, nicht gezeichnete Linien trennen sie überall die Lichtstufenlinien +1 und +2 der Fläche; keine der ganzzahligen Lichtstufenlinien kann sie durchschneiden oder berühren.

e) Wenn viele Drehungsflächen der angegebenen Lage zu schattieren sind, so zeichnet man geschlossene



Figur 95b.

c) Legt man auf die Lichtstrahldurchmesser des Kugelbildes und der Drehungsfläche Meridianschnittebenen und bestimmt die Richtung der Tangente am Meridianschnitt der Kugel etwa im Punkt +3, so sind die Berührungspunkte paralleler Tangenten am Flächenmeridian Lichtstufenpunkte +3 der Fläche. Damit erhält man die äussersten Punkte der Kurve +3, in welchen diese wie die Ellipse des Kugelbildes den Lichtstrahldurchmesser rechtwinklig schneidet und symmetrisch umkehrt. In Figur 95a sind die Punkte +4 auf dem Lichtstrahl in dieser Weise bestimmt. Die parallelen Tangenten sind an Kugel- und Flächenschnitt je mit zwei Punkten hinter dem Pfeil bezeichnet. Als Umklappung des Kugelmeridians ist der Umriss der Kugel selbst benützt. In dieser Bestimmung äusserster Kurvenpunkte erscheint ein Verbinden der zweiten oben beschriebenen

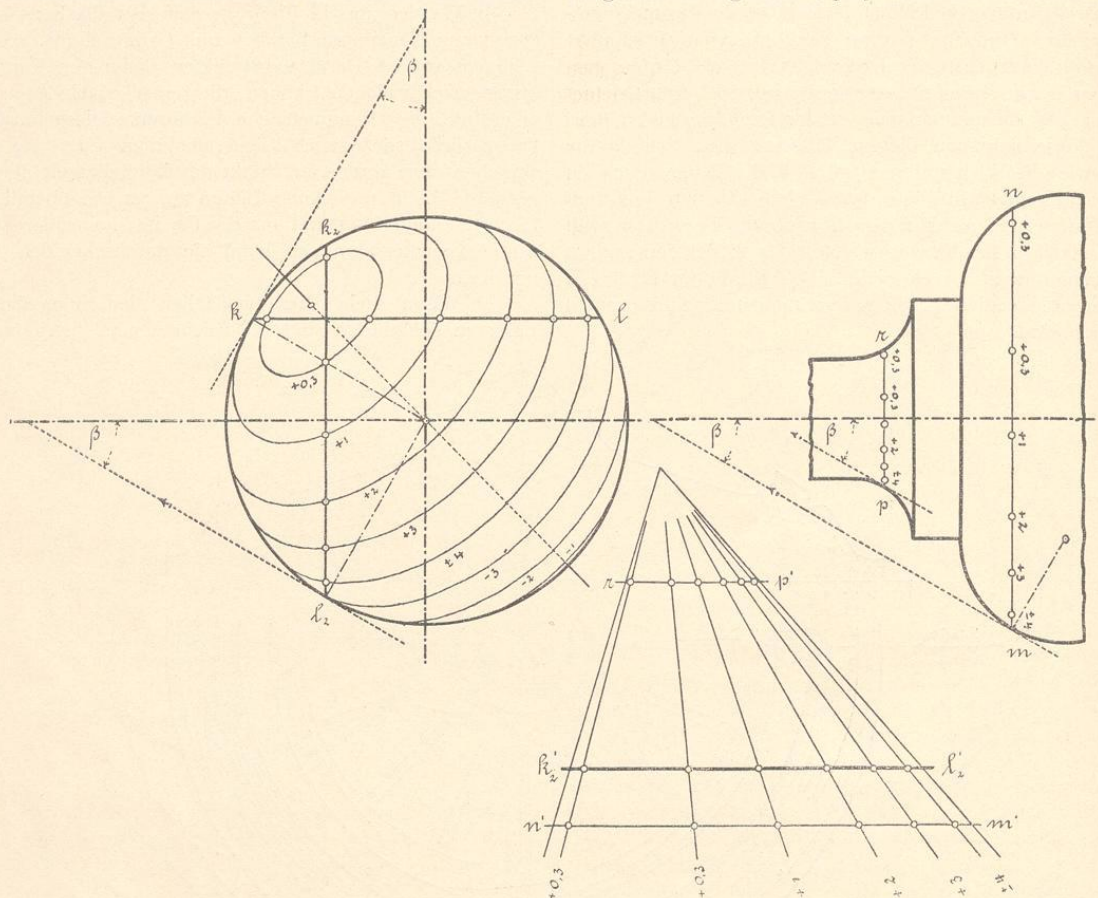
Strahlenbüschel oder Scheiben für die Kugelkreise, welche den Tangentenwinkeln $\beta = 0^\circ 15^\circ 30^\circ 45^\circ 60^\circ 75^\circ$ entsprechen. Diese Scheiben können zur proportionalen Einteilung der Parallelkreise aller Flächen in derselben Weise dienen, wie die sechs Strahlenbüschel der Figur 93b zur Einteilung der horizontalen Strecken; nur wird man anstatt des Papierstreifens zum raschen Uebertragen der Punkte Pauspapier benützen.

Die Drehungsfläche mit Achse parallel zum 96. Grundschnitt.

Für solche Drehungsflächen (Figur 96) hat man, entsprechend der Richtung ihrer Parallelkreise, diejenigen Parallelkreise der Normalkugel zu benützen, die senkrecht zum Grundschnitt stehen, und im übrigen zu verfahren

wie im vorigen Fall. Ein solcher vertikaler, zum Grund-

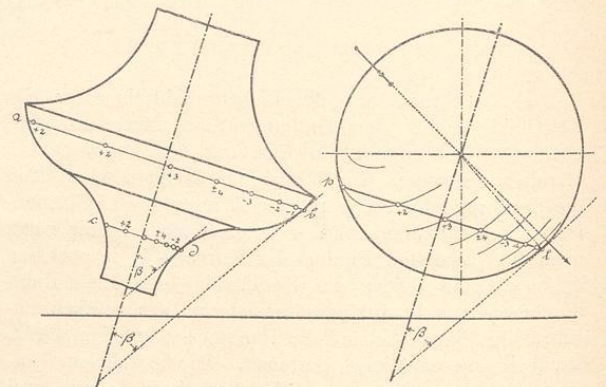
schnitt senkrechter Parallelkreis $k_2 l_2$ bildet mit dem Licht-



Figur 96.

strahl genau denselben Winkel wie ein gleich grosser horizontaler Parallelkreis $k l$, so dass diese zwei Kreise auch zu den Lichtstufenlinien der Normalkugel symmetrisch liegen. Daher werden die Lichtstufenpunkte auf dem vertikalen Kreis mit denselben Abständen auftreten wie auf dem horizontalen, nur mit symmetrischer Umkehrung der Reihenfolge. Hienach sind die sechs Strahlenbüschel der Figur 93b auch brauchbar für das Auftragen der Lichtstufenlinien von horizontalen Drehungsflächen parallel zum Grundschnitt, und zwar sowohl für die konkavgedrehten als die konvexen Flächen dieser Art. Die nötigen Angaben zu ihrer Benützung in dieser neuen Richtung sind der Figur schriftlich beigelegt.

Normalkugel als gerade Linien. Das Verfahren bleibt also im wesentlichen dasselbe wie bei vertikalstehenden



Figur 97.

97. Drehungsflächen mit schiefgerichteten Achsen.

Solche Flächen treten in den technischen Gebilden meist nur so auf, dass die Achse einer Grundebene, gewöhnlich der Vertikalebene, parallel ist. Dieser Fall löst sich ohne neue Hilfsmittel. Die Parallelkreise der Kugel (Figur 97), welche parallel zu denjenigen der Drehungs-

Drehungsflächen. Ist z. B. die Tangente, die man in b an den Drehungskörper ziehen kann, parallel zur Tangente in l am Umriss der Normalkugel, so ist Parallel-

kreis ab nach denselben Verhältnissen zu teilen, in denen der ihm parallele Kugelkreis pl durch die Lichtstufenlinien der Kugel geteilt ist, ebenso jeder andere zu derselben Tangentenrichtung gehörige Parallelkreis cd . Die Normalkugel ist hienach zugleich Hilfsmittel zur raschen Bestimmung der Körperschattengrenzen auf schiefergerichteten, aber der Vertikalebene parallelen Drehungsflächen; denn in der Lichtstufenlinie ± 4 erhält man eben die Körperschattengrenze. Nach dem Früheren (Art. 64) ist diese Schattengrenze nur durch Umsetzung der Grundebenen mit Neubestimmung des Lichtstrahls, also auf weit längerem Weg anderweitig erhältlich.

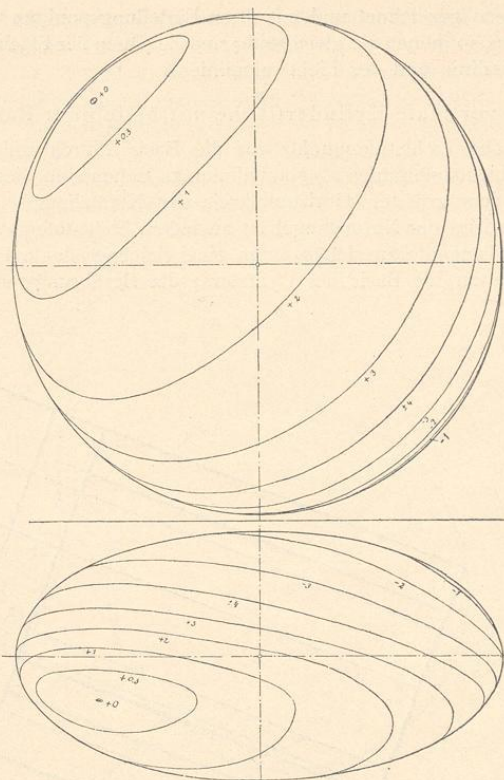
Die Anwendung der vorgeführten Lösung auf horizontale Drehungsflächen mit schiefergerichteter Achse bedarf keiner Erklärung.

Drehungsflächen mit beliebig schiefergerichteter, das heisst keiner Grundebene paralleler Achse bilden zeitraubende Probleme. Eine solche Fläche ist als gegeben zu betrachten durch die beiden Projektionen ihrer Achse und durch ihren Meridian. Ihr Umriss in jeder Projektion, nicht mehr durch Meridiane oder Parallelkreise gebildet, wird erhalten, indem man eine genügende Zahl von Parallelkreisen auswählt und deren elliptische, geometrisch ähnliche Projektionen auf der Grundebene zeichnet; die Umhüllungslinie dieser Ellipsen ist der Umriss der Fläche. Auf jeder solchen Ellipse sind zugleich die Lichtstufenpunkte in unten zu beschreibender Weise zu bestimmen und die gleichzahligen Punkte in Kurven zusammenzufassen.

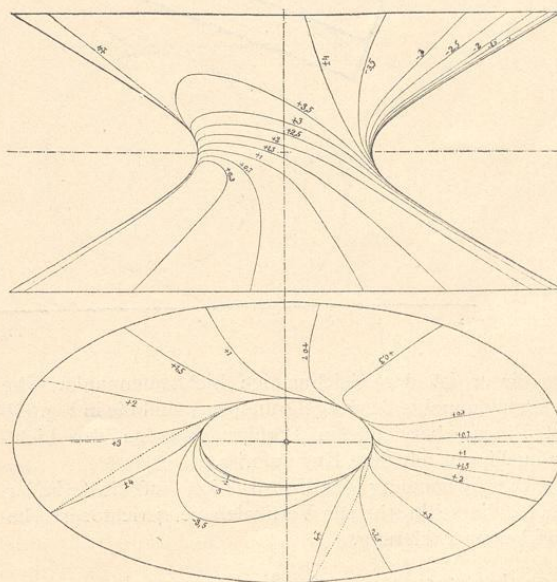
Man zeichnet die beiden Projektionen eines Durchmessers der Normalkugel parallel zur Achse der Drehungsfläche, fasst die Kugel als Drehungsfläche mit diesem Durchmesser als Achse auf und stellt den Flächenmeridianschnitt und den Kugelmeridianschnitt mit vertikalstehenden Achsen nebeneinander. In den für die Parallelkreise der Drehungsfläche ausgewählten Meridianpunkten zieht man Tangenten, dann parallele Tangenten an den Kugelmeridian und durch die Berührungspunkte beider Arten von Tangenten horizontale Sehnen. Diese Sehnen teilen die vertikalen Achsen beider Meridianschnitte nach zwei bestimmten Proportionen ein. In den gleichen Proportionen sind auch die zugehörigen Projektionen beider Achsen einzuteilen.

Für jeden Teilpunkt auf den Projektionen beider Achsen ist nun die elliptische Projektion des zugehörigen Parallelkreises zu zeichnen. Alle diese elliptischen Projektionen sind geometrisch ähnlich und gleich gerichtet; die genaue Bestimmung einer ersten nach Richtung und Achsenverhältnis gilt für alle andern. Die Lösung der Aufgabe, durch einen Punkt einer gegebenen Geraden als Mittelpunkt einen Kreis gegebener Grösse zu legen, dessen Ebene normal zur Geraden steht, ist in Art. 71 beschrieben und mit Figur 71e dargestellt.

Die elliptische Projektion eines Kugelkreises schneidet nun die Lichtstufenlinien der Normalkugel in bestimmten Punkten. Wie die Kugelbildellipse durch diese Punkte eingeteilt ist, so ist auch die geometrisch ähnliche Flächenbildellipse, die derselben Tangentenrichtung entspricht wie die Kugelbildellipse, einzuteilen, das heisst, die Ein-



Figur 103 a.



Figur 103 b.

teilungspunkte beider Ellipsen müssen ebenfalls geometrisch ähnlich liegen. Sind in dieser Weise alle Flächenbild-

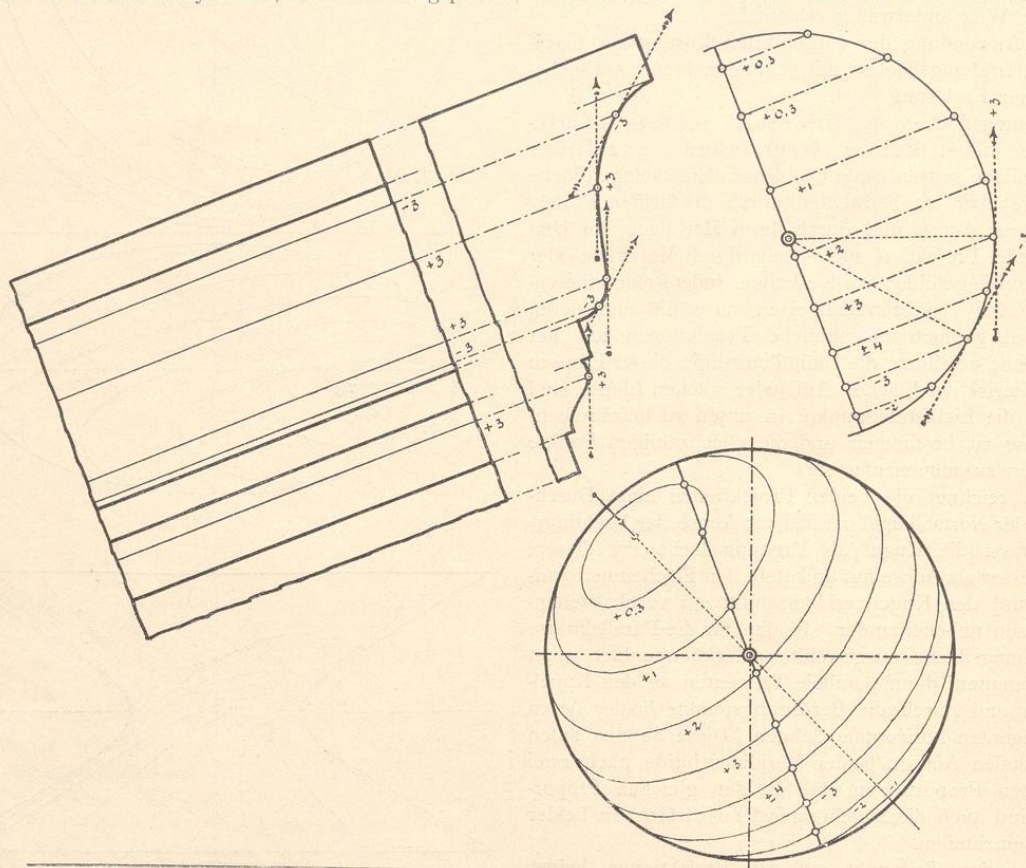
ellipsen gezeichnet und mit ihren Einteilungspunkten versehen, so dienen sie gleichzeitig zum Zeichnen der Flächenumrisslinie und der Lichtstufenlinien.

98. Die vertikale Cylinderfläche mit beliebiger Basis.

Die Lichtstufenpunkte für die Basis, durch welche die Lichtstufenlinien als Mantellinien zu ziehen sind, liegen auf dem grössten Horizontalkreis der Normalkugel. Im Grundriss der Normalkugel ist an jedem Lichtstufenpunkt eine Tangente zu ziehen, dann eine gleichgerichtete Tangente an die Basis des Cylinders; der Berührungspunkt

hier sei als häufig vorkommender Fall das erste vorausgesetzt (Fig. 99).

Der geometrische Ort der Lichtstufenpunkte auf der Normalkugel ist ein Grosskreis, dessen Ebene parallel ist der Normalschnittebene der Cylinderfläche. Im Aufriss der Normalkugel erscheint er als Durchmesser parallel zur Normalschnittlinie der Cylinderfläche in deren Aufriss. Man klappt den Grosskreis samt seinen Lichtstufenpunkten um den Durchmesser, ebenso die Normalschnittebene samt der Profilinie darin um ihre Fusslinie in die Vertikalebene um. Wenn auf der Profilinie der Licht-



Figur 99.

auf dieser ist der gleichnamige Lichtstufenpunkt. Die Lichtstufenpunkte des Kugelgrundplans sind die in Fig. 88b mit Ringen bezeichneten Berührungspunkte der Lichtstufenellipsen mit dem Kugelgrundriss.

Die Anwendung der Konstruktion auf die Cylinderfläche, die senkrecht zur Vertikalebene gerichtet ist, bedarf keiner Erklärung.

99. Die schiefgerichtete oder die horizontale Cylinderfläche parallel zur Vertikalebene mit beliebigem Normalschnitt.

Für diese Fläche kann entweder die Normalschnittlinie oder die Basis in der Horizontalebene gegeben sein;

stufenpunkt + 3 zu bestimmen ist, so zieht man im Punkt + 3 des umgeklappten Grosskreises eine Tangente und an die umgeklappte Profilinie eine parallele Tangente. Der Berührungspunkt dieser letzteren ist der Lichtstufenpunkt + 3 in der Umklappung; er ist noch zurückzuklappen in den Aufriss des Normalschnitts. In Figur 99 ist die Konstruktion für die Lichtstufenlinien + 3 und - 3 zur Anschauung gebracht; die Tangenten zur ersten sind mit einem Querstrich, die zur zweiten mit zwei Querstrichen bezeichnet.

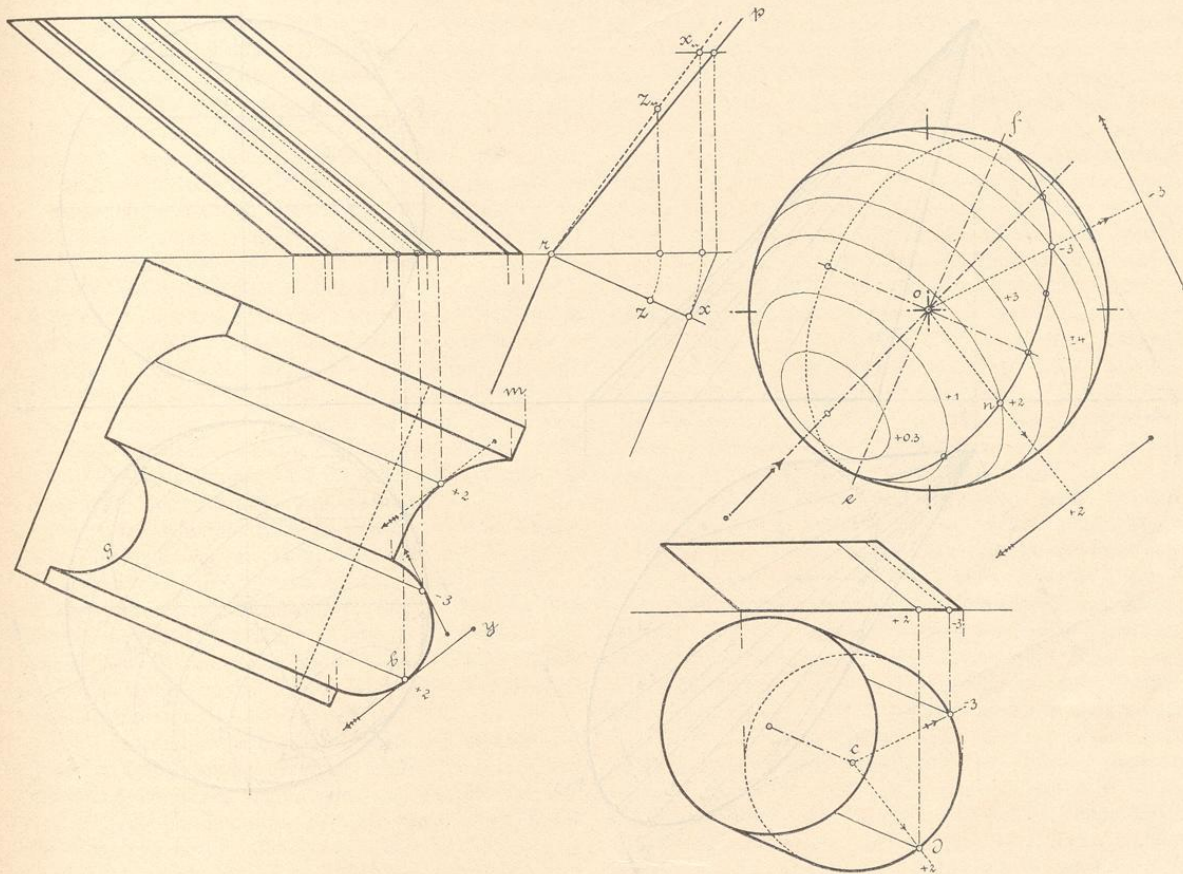
Werden die Mantellinien der Cylinderfläche horizontal, also dem Grundriss parallel, so bringt dies keine Aenderung.

100. Die beliebig schiefgerichtete Cylinderfläche mit beliebig gestalteter horizontaler Basis.

Der geometrische Ort der Lichtstufenpunkte auf der Normalkugel (Figur 100) ist ein Grosskreis, dessen Ebene senkrecht steht auf den Mantellinien der Cylinderfläche. Die Spuren dieser Ebene rm und rp stehen senkrecht zu den gleichnamigen Projektionen der Mantellinien. Den Grosskreis zeichnet man nur im Grundriss der Normalkugel; er erscheint dort als Ellipse, deren grosse Achse

den Berührungspunkt b dieser Tangente ist eine Lichtstufenlinie $+2$ der Cylinderfläche.

Dies ist etwa durch folgendes zu beweisen. Wenn man durch irgend einen Punkt des Grosskreises eine Parallele zu den Mantellinien zieht, so ist diese Tangente an der Kugel; also ist auch eine solche durch n gezogene Parallele eine Tangente, und eine Berührungsebene an der Kugel im Punkt n enthält diese Parallele. Die Horizontalrichtung der Ebene ist dargestellt durch eine Senkrechte zum Radius on (vergl. Art. 91). Die Berührungs-



Figur 100.

ef parallel ist der Horizontalspur mr der Ebene, und deren kleine Achse dadurch erhalten wird, dass man mit Hilfe eines beliebigen Vertikalschnitts rx der Ebene normal zu ihrer Horizontalspur ihre Gefällsline umgeklappt in die Vertikalebene darstellt, auf der Umklappung rx_n den Normalkugelradius rz_n aufträgt und auf die Normalschnittlinie nach rz zurückklappt. Die Linie rz giebt nach Grösse und Richtung die kleine Halbachse der Ellipse. Schneidet nun der Grosskreis z. B. die Lichtstufenlinie $+2$ der Normalkugel in einem Punkt n , so zieht man im Grundriss der Normalkugel den Radius nach n und an die Basislinie der Cylinderfläche eine Tangente by senkrecht zu diesem Radius. Die Mantellinie durch

ebene der Cylinderfläche im Punkt b geht durch die Mantellinie gb und die Tangente by ; beide Linien sind parallel den in der Berührungsebene der Kugel enthaltenen, also sind beide Berührungsebenen parallel.

Wird die Basis der Cylinderfläche kreisförmig (Fig. 100 rechts unten), so entfallen jene Tangenten; zu dem im Grundriss der Normalkugel gezogenen Radius on ist nur im Basiskreis des Cylinders ein paralleler Radius cd zu ziehen; dieser giebt in seinem Endpunkt d den Lichtstufenpunkt $+2$.

Der gerade elliptische Kegel mit vertikaler Achse. 101.

Man zeichnet ein Drehungsellipsoid mit Achse senkrecht zur Vertikalebene, dessen Umriss im Grundriss eine

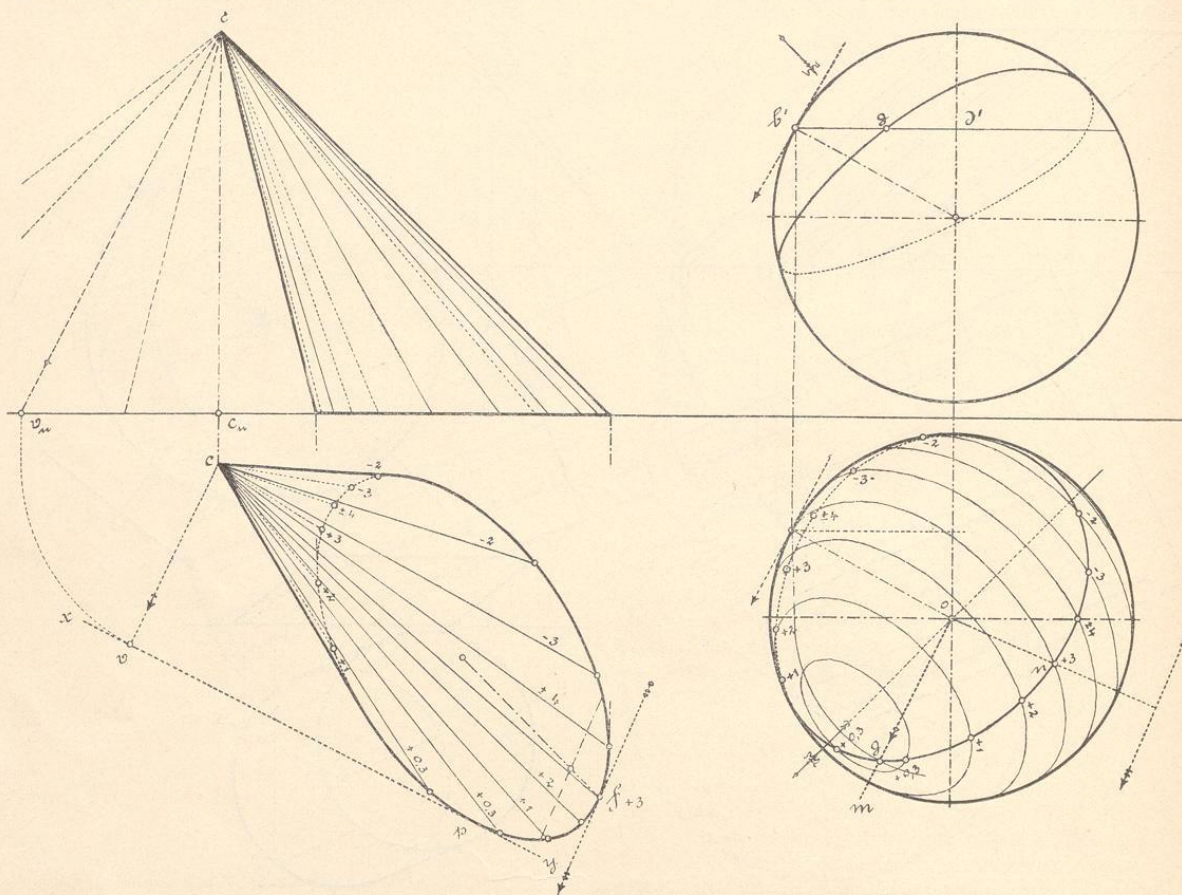
Ellipse mit demselben Achsenverhältnis ist wie die Basis-ebene des Kegels. In diesem Grundriss bestimmt man die Lichtstufenlinien des Ellipsoids nach Art. 96 mit Hilfe der sechs Strahlenbüschel. Auf dieses Ellipsoid denkt man sich den Kegel gestülpt. Die Berührungslinie zwischen beiden Körpern ist eine etwas kleinere horizontale Ellipse vom gleichen Achsenverhältnis wie der Umriss des Ellipsoids. Die grosse Achse dieser Ellipse erhält man, indem man im Aufriss das Aufstülpen des Kegels mit dessen breitem Umrissbild zeichnet; die Strecke zwi-

hier notwendige ist mit dem Achsenverhältnis 1:2 in Figur 103a (Seite 107) dargestellt.

Eine andere Lösung für den elliptischen Kegel ist die allgemeine für Kegelflächen nach Art. 102.

Die Kegelfläche mit beliebig gestalteter horizontaler Basis.

Man sucht zunächst auf der Normalkugel den geometrischen Ort der Berührungspunkte der Ebenen, welche



Figur 102.

schen den Berührungspunkten ist diese grosse Achse. Im Grundriss erscheint die Berührungsellipse konzentrisch zum Umriss des Ellipsoids; wo sie dessen Lichtstufenlinien schneidet, da sind die Lichtstufenpunkte für den gleich grossen Horizontalschnitt des Kegels, die ohne Eingehen auf den Aufriss des Ellipsoids in den Aufriss des Kegels übertragen und dort zum Zeichnen der Mantellinien, welche Lichtstufenlinien sind, verwertet werden können. Die Berührungsellipse wird zur gegebenen Basis des Kegels, wenn man gleich anfangs den Aufriss des Ellipsoids so gross wählt, dass er die äussersten Mantellinien des in der breitesten Ansicht gezeichneten Kegels in deren Fusspunkten berührt. Ein Drehungsellipsoid wie das

den Berührungsebenen an der Kegelfläche parallel sind und zwar in folgender Weise. Während bei fast allen andern hier behandelten Flächen, selbst bei Schraubenflächen, Konoidflächen u. s. w., dieser geometrische Ort für eine bestimmte Linie auf der Fläche als Grosskreis oder Parallelkreis erhalten werden kann, ergibt sich für den allgemeinen Fall der Kegelflächen immer eine doppelt gekrümmte Linie auf der Normalkugel, und es erweist sich hiedurch die Kegelfläche, abgesehen vom geraden Kreiskegel, als ein verhältnismässig schwieriger Gegenstand der Beleuchtungskunde.

Mit beliebiger Richtung und ohne Bestimmung des Berührungspunktes wird an die Kegelbasis (Figur 102)

eine Tangente xy gezogen und von der Spitze des Kegels aus eine Senkrechte im Raum auf diese Tangente gefällt gedacht. Diese Senkrechte, die auch im Grundriss als eine Senkrechte cv auf der Tangente erscheint, ist die Gefällsline der Berührungsebene, die durch den (unbestimmten) Basispunkt p an die Kegelfläche gelegt wird und diese längs der Mantellinie dieses Basispunktes berührt. Die Horizontalneigung dieses Lotes ergibt sich als spitzer Winkel am Fuss eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen horizontale Kathete cu , vu die Senkrechte cv aus dem Grundriss und dessen Höhe gleich der Höhe des Kegels ist. An den Aufriss der Normalkugel zieht man eine Tangente parallel zur Hypotenuse $c'u$ dieses Dreiecks und bestimmt den Horizontalabstand $d'b'$ des Berührungspunktes b' von der vertikalen Achse der Normalkugel. Im Grundriss der Normalkugel wird ein Radius om parallel zu jener Senkrechten cv gezogen und auf diesem Radius vom Mittelpunkt aus jener Horizontalabstand $d'b' = og$ aufgetragen. Der Endpunkt g ist der Berührungspunkt zwischen der Normalkugel und einer Ebene, die der Berührungsebene am Kegel parallel ist; dieser Punkt giebt also an, welche Lichtstufe die Mantellinie des Kegels im ausgewählten Basispunkt p darbietet. Wendet man dieses Verfahren auf weitere Basispunkte p an, so finden sich im Grundriss der Normalkugel weitere Berührungspunkte g , welche in einer Kurve zusammengefasst den anfangs genannten geometrischen Ort ergeben. In Figur 102 ist diese Kurve auch im Aufriss bestimmt, wo sie nicht verwertet wird. Ein Aufriss der Normalkugel ist ganz entbehrlich, wenn die Tangente an den Grundriss gezogen wird.

Die Kurve schneide die Lichtstufenlinie + 3 im Grundriss der Normalkugel in einem Punkt n . An die Kegelbasis zieht man eine Tangente normal zu dem Radius on und erhält im Berührungspunkt f dieser Tangente den Lichtstufenpunkt + 3 auf der Kegelbasis. (Scharfe Bestimmung von f durch eine zur Tangente parallele Sehne und den Halbmesser der Ellipse nach dem Halbierungspunkt der Sehne.)

Die Konstruktion beruht darauf, dass jede Berührungsebene des Kegelmantels in irgend einem Punkt der auf der Kugel gefundenen Kurve eine parallele Berührungsebene der Kugel finden muss, und dass die zu einem Punkt f des Kegels gehörige Berührungsebene der Kugel nur diejenige sein kann, welche die gleiche Horizontalrichtung hat, wie die Berührungsebene des Kegels in f .

103. Das dreiachsige Ellipsoid, das elliptische Paraboloid und das einmantelige elliptische Hyperboloid.

Auch auf diesen Körpern lassen sich die Lichtstufenlinien auf kürzestem Weg mit Hilfe des in Art. 101 beschriebenen Drehungsellipsoids mit Achse senkrecht zur Vertikalebene erhalten, indem man jede horizontale Schnittellipse der Körper als einen sehr niedrigen Kegelmantel auffasst und auf diesem die Lichtstufenpunkte bestimmt wie für den elliptischen Kegel gezeigt worden ist. Uebrigens verlohnt es sich hier mehr, auch den Aufriss des Drehungsellipsoids mit den Lichtstufenlinien zu zeichnen und dann

zu benützen wie den Aufriss der Normalkugel bei Drehungsflächen mit vertikaler Achse nach Art. 93. Die Figur 103 a (Seite 107) zeigt das benützte Drehungsellipsoid, 103 b das elliptische Hyperboloid; die Schattierung beider Körper ist durchgeführt auf der ersten Lichtdrucktafel.

Das windschiefe Viereck oder hyperbolische Paraboloid.

Das hyperbolische Paraboloid ist als Gegenstand der Schattenkonstruktion in Art. 69e behandelt, und zwar ist es dort als Rückungsfläche aufgefasst, entstanden durch die Parallelbewegung einer horizontal liegenden Parabel längs einer andern vertikal stehenden mit entgegengesetzter Achsenrichtung. Auch für die Bestimmung der Lichtstufenlinien ist diese Auffassung die nächstliegende und einfachste. Wie nach Art. 69e für die Körperschattenbestimmung, so ist auch für das neue Problem jeder Horizontalschnitt der Fläche zu erklären als eine niedrige Zone eines schiefen Cylinders, dessen Basis die bewegliche Parabel ist und dessen Mantellinienrichtung durch die Tangente an der festen Parabel im Punkte des Horizontalschnitts dargestellt wird. Wo die Lichtstufen auf der horizontalen Parabel als auf der Basis des Cylinders liegen, da liegen sie auch für das Paraboloid. Die Bestimmung der Lichtstufenpunkte auf dem Cylinder ist in Art. 100 erklärt, vereinfacht sich aber dem dort behandelten allgemeinen Fall gegenüber dadurch, dass die Mantellinien parallel zur Vertikalebene liegen.

Hier sei die Lichtstufenbestimmung auch für eine zweite Auffassung der Fläche, für diejenige als Regelfläche betrachtet, nach welcher sie, abgegrenzt durch vier gerade Linien, auch das „windschiefe Viereck“ genannt wird. Ein solches erzeugt sich, indem eine Gerade gleitet an zwei andern, räumlich getrennten, nicht parallelen Geraden und dabei immer einer bestimmten Ebene, der „Richtebene“ parallel bleibt. Neben dieser ersten Gruppe von Erzeugenden, welche die verschiedenen Lagen der beweglichen Geraden bilden, giebt es noch eine zweite Gruppe gerader Mantellinien auf der Fläche, dadurch bestimmt, dass die zwei ursprünglichen Leitlinien selber auf zwei beliebigen Erzeugenden der ersten Gruppe derart gleiten, dass sie immer einer zweiten Richtebene parallel bleiben, nämlich derjenigen, welcher jene beiden Leitlinien gemeinschaftlich parallel sind.

Die Fläche findet in der Technik höchst selten Verwertung, in der Baukunst etwa als windschiefe Dachfläche zwischen zwei gleich hohen, aber verschieden breiten Giebeln eines Hauses, wobei die erste Gruppe von Erzeugenden dargestellt ist durch die geneigten Dachsparren, die zweite durch die horizontalen Pfetten und Dachlatten, so dass ein solches Dach, obgleich eine gekrümmte Fläche, doch durchaus aus geraden Hölzern hergestellt werden kann. Hierin erscheint der besondere Fall, dass die beiden Richtebenen senkrecht zu einander stehen. Anlehnend an dieses Beispiel sei hier eine Fläche gewählt, deren Richtebenen die horizontale Grundebene und die Seitenprojektionsebene bilden, die also im Aufriss als ein rechtwinkliges Netz von Horizontalen und Vertikalen sich dar-

stellt. Im Grundriss und Seitenriss erscheint die Projektion je als Strahlenbüschel mit Scheitelbüschel, durchschnitten von vertikalen, beziehungsweise horizontalen Linien.

Die Berührungsebene an der Fläche in einem ihrer Punkte ist bestimmt durch die beiden Erzeugenden H (die horizontale) und G (die geneigte), die durch den Punkt gehen. Denkt man sich den Punkt der Normalkugel, in dem sie von einer gleichgerichteten Ebene berührt wird, so findet sich, dass der horizontale Parallelkreis der Normalkugel in diesem Punkt eine Tangente parallel zur Linie H hat, und der senkrecht zum Grundriss stehende Parallelkreis in diesem Punkt eine Tangente parallel zur Linie G hat. Verschiedenen Punkten der Linie H entsprechen verschiedene horizontale, im Grundriss konzentrische Parallelkreise mit parallelen Tangenten, deren Berührungspunkte im Grundriss der Normalkugel auf einem zur Linie H senkrecht stehenden Radius erscheinen müssen, also im Raum auf einem vertikalen Meridian der Normalkugel liegen. Hieraus folgt: „Alle Lichtstufenpunkte für eine horizontale Erzeugende der windschiefen Fläche sind auf einem Meridian der Normalkugel zu suchen, dessen Vertikalebene senkrecht zu dieser Erzeugenden steht.“ In derselben Weise lässt sich ableiten, indem man sich die oben genannten vertikalen Parallelkreise in der Seitenansicht der Normalkugel gezeichnet denkt: „Alle Lichtstufenpunkte für eine geneigte Erzeugende der windschiefen Fläche liegen auf einem Grosskreis der Normalkugel, dessen Ebene normal steht zu der Erzeugenden.“ Man kann den einen oder andern Satz zur Konstruktion verwerten, im folgenden ist der erste gewählt.

Ein vertikalstehender Meridian, der in der vorherbeschriebenen Weise einer zu seiner Ebene senkrechten horizontalen Erzeugenden H der Fläche entspricht, schneidet die Lichtstufenlinien der Normalkugel in bestimmten Punkten. Durch jeden dieser Punkte ist ein vertikaler Parallelkreis der Kugel senkrecht zum Grundriss zu zeichnen; für jeden dieser Punkte ist ferner zu bestimmen, welche Neigung gegen die Horizontalebene die Tangente an diesem Parallelkreis in ihm darbietet. Sucht man die geneigte Mantellinie der windschiefen Fläche auf, welche mit dieser Tangente gleiche Neigung hat, so schneidet diese Mantellinie die ausgewählte horizontale Erzeugende H in einem Lichtstufenpunkt, der gleichnamig ist mit dem Punkt der Normalkugel, durch welchen der vertikale Parallelkreis gelegt worden ist.

Zur graphischen Durchführung der Konstruktion zeichnet man sich Aufriss und Seitenriss der Fläche mit vielen dichtstehenden geneigten Mantellinien bei wenigen horizontalen Erzeugenden, und fügt in der Seitenansicht zu jeder der ersteren eine Senkrechte, indem man diese Senkrechten gut getrennt hält und wie die Geneigten in der Vorderansicht numeriert. Die Meridiane zeichnet man nur im Grundriss der Normalkugel, wo sie als Radien erscheinen; die vertikalen Parallelkreise zeichnet man im Grundriss und in der Seitenansicht samt dem Lichtstufenpunkt, der auf jedem erscheint, indem man jedem Parallelkreis den Buchstaben der horizontalen Erzeugenden und die Nummer der Lichtstufe beifügt, zu welcher er gehört.

Dann sieht man zu, welche von jenen Senkrechten im Seitenriss der Fläche einem Radius nach einem Lichtstufenpunkt in einem Parallelkreis ganz oder annähernd parallel ist. Die zu der Senkrechten gehörige geneigte Erzeugende schneidet die zu dem Parallelkreis gehörige horizontale Erzeugende in einem Lichtstufenpunkt, der mit demjenigen auf dem Parallelkreis gleichnamig ist. Findet sich keine genau parallele Senkrechte für einen der Parallelkreisradien, so gestattet das Verfahren ein Einschätzen der Lichtstufenpunkte zwischen zweien der geneigten Mantellinien mit genügender Genauigkeit. Andernfalls hat man senkrecht zu diesem Radius eine Mantellinie der Fläche in deren Seitenriss zu ziehen und die Projektion dieser Mantellinie im Aufriss zu bestimmen.

Für die beschriebene Erzeugung der Fläche wird die Kurve $+4$ im Aufriss eine zum Lichtstrahl normale Gerade, im Grundriss eine Parabel, also im Raum eine Parabel, wie bei der andern Erzeugungsweise nach Art. 69e. Nach einem oberflächlichen Versuch scheint auch die Linie $+1,7$ im Aufriss eine Parabel zu werden, deren Scheitel gegen jene Gerade gerichtet ist; die Linien zwischen $+1,7$ und $+4$ scheinen im Aufriss Hyperbeln zu sein, zwischen beiden zuvorgenannten Linien gelegen, mit Scheitel gegen die Gerade und um so flacher werdend, je mehr sie sich ihr nähern. Zwischen dem hellsten Punkt und $+1,7$ dürften sich Ellipsen bilden, mit der grossen Achse senkrecht zur Geraden $+4$, und jenseits dieser Geraden für $-3,5 - 3$ und $-2,5$ u. s. f. wieder Hyperbeln mit Scheiteln gegen die Gerade; doch fällt die Linie $-1,7$ schon ganz ins Unendliche. Das ganze Lichtstufensystem hat im Aufriss eine Symmetralachse senkrecht zu $+4$, also in der Richtung der Lichtstrahlprojektion.

Der allgemeine Fall der windschiefen Fläche, bei welchem die zweite Richtebene nicht senkrecht zur Horizontalebene als der ersten Richtebene steht, wenn sie auch noch normal zur Vertikalebene bleibt, erfordert anstatt der Seitenprojektion der Fläche und der Parallelkreise eine Projektion beider auf die Richtebene, auf welcher sich die Parallelkreise wieder als Kreise darstellen; im übrigen ändert sich der Gang der Lösung nicht.

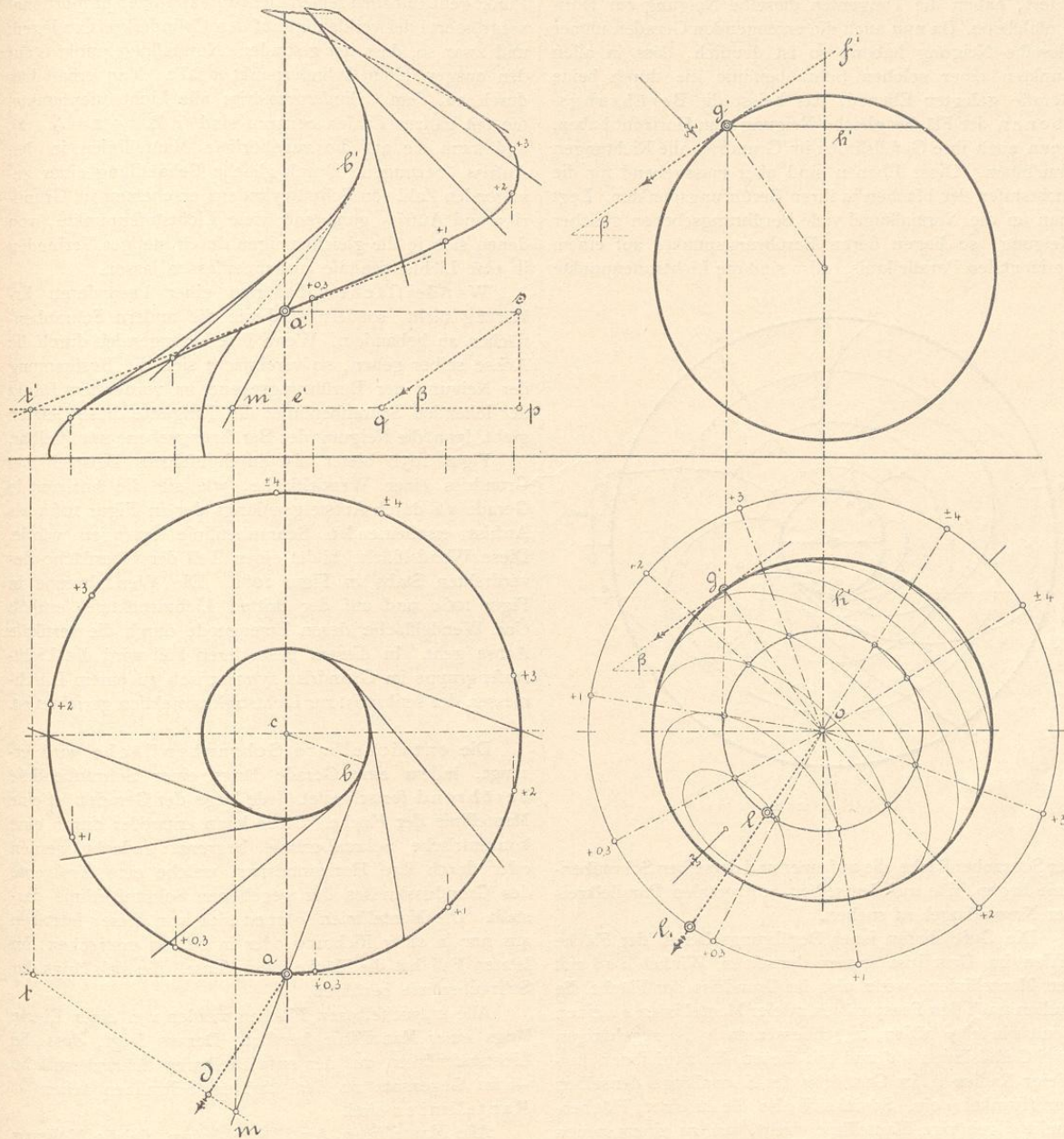
Schraubenflächen, Wendelflächen.

105.

Schrauben- und Wendelflächen sind in Art. 70 nach ihrer Entstehungsweise erklärt und als Gegenstände der Schattenkonstruktion behandelt. Zum Zweck enger Begrenzung der Anschauung mögen auch hier die Achsen der leitenden Schraubenlinien und also der Flächen selber vertikal gedacht werden (Figur 105a). Alle Arten von Schraubenflächen haben das Gemeinsame, dass sie von konzentrischen Kreiscylindern, deren Achsen mit denen der gegebenen Schraubenlinien zusammenfallen, nach Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe, aber verschiedenen Neigungen geschnitten werden. In einem beliebigen Punkt aa einer solchen Fläche ist die Berührungsebene bestimmt einerseits durch die erzeugende Gerade $aba'b'$, die durch den Punkt geht, andererseits durch die Tangente $ata't'$ an der Schraubenlinie, welche der durch den Punkt gelegte konzentrische Kreiscylinder als Schnitt mit der Fläche liefert.

Es ist also, sobald für einen beliebigen Punkt der Fläche die Projektionen dieser beiden Geraden bekannt sind, nur noch das Problem zu lösen: „Die Lichtstufe einer Ebene zu bestimmen, die durch die Projektionen

zonale Richtungslinie der Berührungsebene und die dazu Senkrechte ad der Grundriss der Gefällslinie. Im Dreieck spq ist $qp = ad$, $sp = a'e'$, also β der Neigungswinkel der Gefällslinie oder Berührungsebene. An den



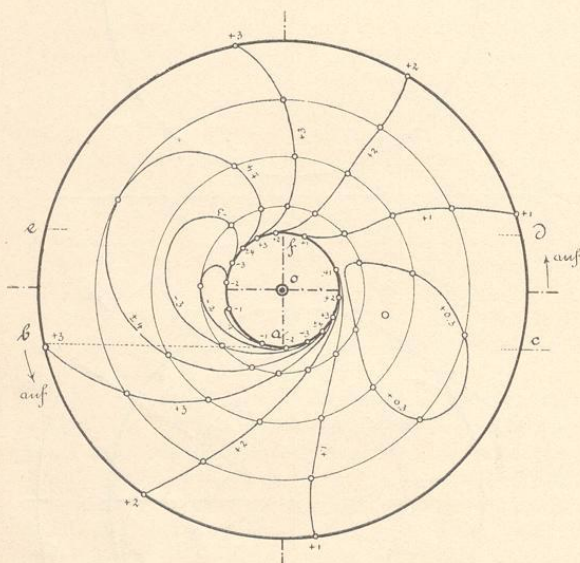
Figur 105a.

zwei sich schneidender Geraden gegeben ist.“ Diese Aufgabe ist in Art. 91 behandelt. Wenn in der Vertikalprojektion die beiden Geraden durch eine beliebige Horizontallinie $m'l'$ geschnitten und die Punkte $m'l'$ in den Grundriss nach mt gelotet werden, so ist mt die hori-

Aufriss der Normalkugel (oder an den zeitweilig als Aufriss aufgefassten Grundriss) ist eine Tangente $f'g'$ parallel zu sq zu ziehen, woraus der Radius $h'g'$ für den horizontalen Parallelkreis des Lichtstufenpunktes erhalten wird. Der im Grundriss in diesem Kreis parallel zu ad gezogene

Radius ol liefert den Lichtstufenpunkt l , der dem Flächenpunkt a entspricht.

In allen Punkten einer Schraubenlinie, die ein bestimmter Schnittcylinder der obengenannten Stellung liefert, haben die Tangenten dieselbe Neigung zur Horizontalebene. Da nun auch die erzeugenden Geraden immer dieselbe Neigung haben, so ist deutlich, dass in allen Punkten einer solchen Schraubenlinie die durch beide Gerade gelegten Ebenen, das heisst die Berührungsebenen der Fläche gleiche Neigung zum Horizont haben, wenn auch ihre Gefällslinien im Grundriss alle Richtungen annehmen. Diese Ebenen sind aber massgebend für die Lichtstufen der Flächen in ihren Berührungspunkten. Legt man an die Normalkugel viele Berührungsebenen gleicher Neigung, so liegen deren Berührungspunkte auf einem horizontalen Parallelkreis. Also sind die Lichtstufenpunkte



Figur 105 b.

der Schraubenfläche, die auf einer und derselben Schraubenlinie liegen, alle auf demselben horizontalen Parallelkreis der Normalkugel zu suchen.

Die Gefällslinien jener Berührungsebenen der Fläche bilden im Grundriss immer denselben Winkel dab mit den Mantellinien; wenn also im Grundriss der Fläche die Radien nach den Fusspunkten zweier Mantellinien ca einen Centriwinkel γ bilden, so schliessen auch die zugehörigen zwei Gefällslinien ad und mit diesen die zwei ihnen parallelen Radien ol im Grundriss der Normalkugel denselben Centriwinkel γ ein. Soviel sich also die zu einem Flächenpunkt a gehörige Mantellinie dreht, um zu einem neuen Flächenpunkt zu gelangen, soviel dreht sich auch im Grundriss der Normalkugel der Radius nach dem zu a gehörigen Lichtstufenpunkt, um zum Lichtstufenpunkt des neuen Flächenpunktes zu gelangen.

Aus beiden Betrachtungen ergibt sich der Grundgedanke der Konstruktion wie folgt: Wenn einer der obengenannten Schnittcylinder im Grundriss gezeichnet

und für einen Punkt aa' des Cylinders nach der zuvor gegebenen Vorschrift der gleichhelle Punkt l der Normalkugel in deren Grundriss bestimmt ist, so hat man nur den horizontalen Normalkugelparallelkreis, der durch diesen Punkt geht, mit allen seinen Lichtstufenpunkten proportional vergrössert oder verkleinert auf den Cylinderkreis zu legen, und zwar so, dass der gefundene Normalkugelpunkt l_1 auf den ausgewählten Cylinderpunkt a fällt. Man erhält hiedurch auf dem Cylindergrundriss alle Lichtstufenpunkte, die mit ganzen Zahlen benannt sind (z. B. $a + 2 = l_1 + 2$), und kann sie auf die zugehörigen Mantellinien in den Aufriss übertragen. Durch gleiche Behandlung einer genügenden Zahl von Schnittcylindern erscheinen im Grundriss und Aufriss genügend viele Lichtstufenpunkte, von denen sich je die gleichnamigen durch stetiges Verbinden in eine Lichtstufenlinie zusammenfassen lassen.

Wendelflächen bedürfen einer besonderen Erklärung nicht, sondern sind wie die andern Schraubenflächen zu behandeln. Wenn ihre Erzeugenden durch die Achse selber gehen, so vereinfacht sich die Bestimmung der Neigung der Berührungsebene im vordersten Punkt der leitenden Schraubenlinie; die Tangente dieser letzteren giebt dann die Neigung der Berührungsebene unmittelbar.

Figur 105b bietet als durchgeführtes Beispiel den Grundriss einer Wendelfläche, wie sie die horizontale Gerade ab durch Aufsteigen längs der in Figur 106a als Aufriss erscheinenden Schraubenlinie erzeugen würde. Diese Wendelfläche bildet einen Teil der Oberfläche des verdrehten Stabs in Figur 106a. Die Wendeltreppe in Figur 106c und auf der dritten Lichtdrucktafel enthält eine Wendelfläche, deren Erzeugende durch die vertikale Achse geht. In diesem besonderen Fall wird die Lichtstufengruppe im Grundriss symmetrisch zu einem Durchmesser, der senkrecht zur Lichtstrahlprojektion gerichtet ist.

Die entwickelbare Schraubenfläche wird erzeugt, indem eine Gerade längs einer Schraubenlinie berührend fortschreitet. Jede Lage der Geraden ist eine Mantellinie der Fläche. Diese kann entweder durch eine konzentrische Schraubenlinie begrenzt gedacht werden oder durch ihre Horizontalspur, welche eine Evolvente des Grundrisskreises der gegebenen Schraubenlinie darstellt. Die Mantellinien können sich von dieser letzteren aus nur in einer Richtung oder in beiden erstrecken; im letzteren Fall hat die Fläche zwei Mäntel, die sich längs der Schraubenlinie berühren.

Alle entwickelbaren Flächen werden von einer Ebene längs einer Mantellinie berührt. Daraus folgt, dass die Lichtstufenlinien auf der entwickelbaren Schraubenfläche — im Gegensatz zu den übrigen Schraubenflächen — Mantellinien sind.

Alle Mantellinien der Fläche haben gleiche Neigung gegen die Horizontalebene und stehen im Grundriss normal zu der Evolvente, welche die Horizontalspur der Fläche darstellt. Daraus folgt, dass sich jede Mantellinie als ein sehr schmaler Ausschnitt des Mantels eines geraden vertikalen Kreiskegels auffassen lässt, dessen Mantellinien gleiche Neigung haben wie diejenigen der Schraubenfläche, und wie sich eine solche Mantellinie schattiert als

Bestandteil ihres Kegels, so schattiert sie sich auch als Bestandteil der Schraubenfläche.

Die Neigung der Mantellinien erscheint unmittelbar in den äussersten Mantellinien der Fläche im Aufriss; aus dieser Neigung ergibt sich der horizontale Parallelkreis der Normalkugel, auf welchem die Lichtstufenpunkte zu suchen sind. Zeichnet man den geraden vertikalen Kreiskegel, der die Normalkugel längs dieses Parallelkreises berührt, samt den Mantellinien dieses Kegels nach den Lichtstufenpunkten des Parallelkreises, so hat man nur im Aufriss der Schraubenfläche die gleichgerichteten Mantellinien zu ziehen, um in ihnen die gleichnamigen Lichtstufenlinien der Fläche zu erhalten. Will man sie zuerst oder nur im Grundriss haben, so zieht man im Grundriss der Normalkugel die Radien des Parallelkreises nach dessen Lichtstufenpunkten und dann die dazu parallelen Mantellinien der Fläche in deren Grundriss. Bei der Fläche mit zwei Mänteln ist eine Lichtstufenlinie des unteren nicht auch eine gleichnamige Linie des oberen, weil bei jenem die Spitze des Hilfskegels nach oben, bei diesem nach unten gerichtet ist.

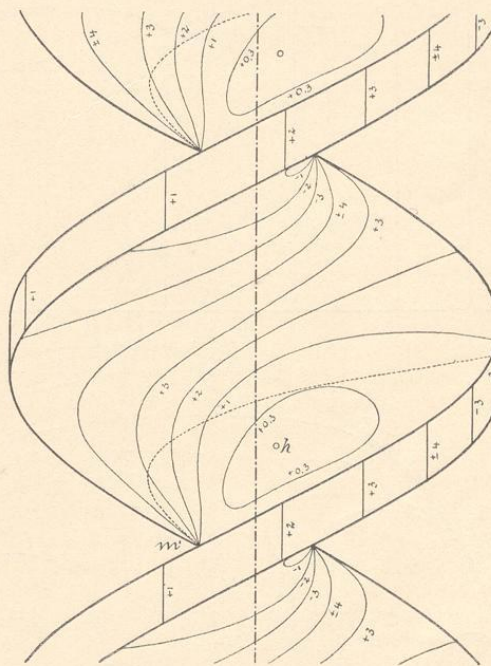
106. Stabformen mit drehend fortschreitendem Querschnitt oder Achsenschnitt. Ringförmig steigendes Tonnengewölbe.

Ein (wagrecht gedachtes) regelmässiges oder unregelmässiges Vieleck, oder ein Rechteck, oder ein Vieleck, dessen gerade Seiten durch bogenförmige konkave oder konvexe Linien ersetzt sind, rückt auf einer senkrecht zu seiner Ebene stehenden Achse derart parallel fort, dass seine Ecken Schraubenlinien beschreiben. Derartige Gebilde sind in der spätgotischen und späromanischen Architektur, ferner in den Arbeiten des Drehers und Kunstschlossers, endlich im Maschinenbau verwirklicht. Für konkave schraubend fortschreitende Linien können etwa Säulen mit gewundener Kannellierung als Beispiele dienen.

Sind die Seiten der beweglichen Figur gerade, so beschreiben sie Wendelflächen, und die Lichtstufenlinien lassen sich dann konstruieren wie oben in Art. 105 beschrieben, sobald eine genügende Zahl von Punkten (worunter der Halbierungspunkt) auf der Polygonseite angenommen und die Neigungen der von diesen Punkten beschriebenen Schraubenlinien bestimmt worden sind. Für die Halbierungspunkte werden die Berührungsebenen vertikal, und die Lichtstufenpunkte finden sich auf dem horizontalen Grosskreis der Normalkugel ganz wie für einen Cylinder vom gleichen Durchmesser wie die von den Halbierungspunkten beschriebene Schraubenlinie.

In Figur 106a erscheinen die Lichtstufenlinien einer Stabform, welche entsteht, wenn das in Figur 105b dargestellte Rechteck $b c d e$ mit zwei geraden und zwei bogenförmigen Seiten sich schraubend um die vertikale Achse o dreht. Die geraden Seiten beschreiben Wendelflächen, die bogenförmigen eine Cylinderfläche mit vertikalen Lichtstufenlinien. Da der Grundriss Figur 105b nur die vom Arm $a b$ beschriebene Wendelfläche darstellt, so gilt dieser Grundriss nur für diejenige Hälfte der im Aufriss

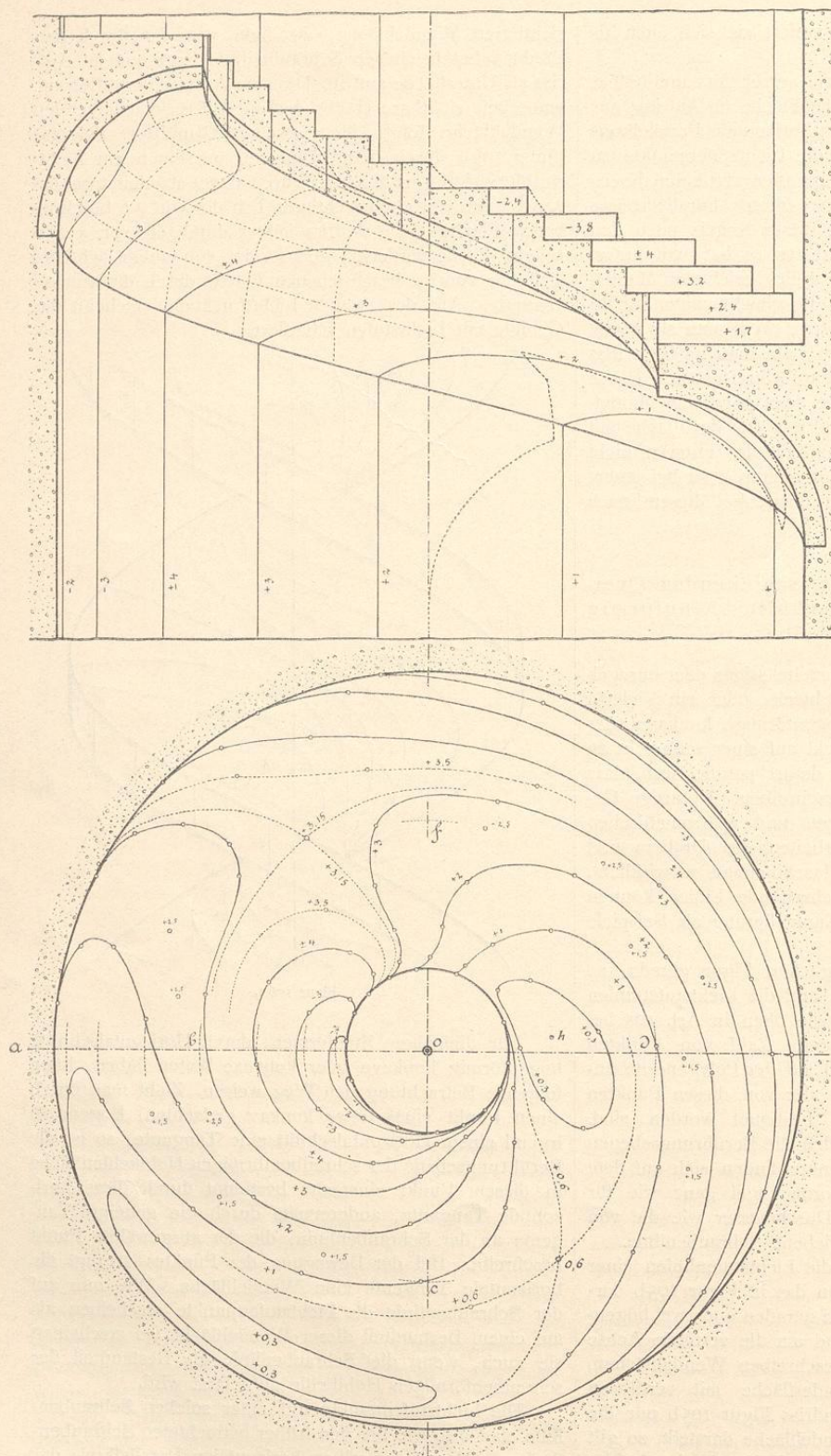
sichtbaren Wendelfläche, die links von der durch den Punkt a beschriebenen Schraubenlinie liegt und im Aufriss als Unterfläche auftritt. Die vom Arm $a c$ beschriebene, von oben sichtbare Hälfte der im Aufriss erscheinenden Wendelfläche folgt einem zweiten Grundriss, der aus Figur 105b durch deren Umlegen um einen zur Lichtstrahlprojektion senkrechten Durchmesser abgeleitet werden kann. Der von oben sichtbare Teil der von $a b$ beschriebenen Fläche ist im Aufriss immer durch die von $a c$ erzeugte Fläche verdeckt, ebenso der von unten sichtbare Teil der von $a c$ beschriebenen Fläche durch die von $a b$ erzeugte. Auf der zweiten Lichtdrucktafel erscheint das Gebilde mit Lichtstufen schattiert.



Figur 106a.

Für diejenigen Stabformen, deren Horizontalschnitte bogenförmig konkave oder konvexe Seiten haben, kann folgende Betrachtung den Weg weisen. Zieht man durch einen Punkt eines (etwa konkav gedachten) Bogens in irgend einem Horizontalschnitt eine Tangente, so ist die Berührungsebene der schraubenförmigen Hohlkehlenfläche in diesem Punkt einerseits bestimmt durch diese horizontale Tangente, andererseits durch die geneigte Tangente an der Schraubenlinie, die der ausgewählte Punkt beschreibt. Bei der Bewegung des Punktes erzeugt die horizontale Tangente eine Wendelfläche. Wie nun auf der Schraubenlinie die Lichtstufenpunkte erscheinen als auf einem Bestandteil dieser Wendelfläche, so erscheinen sie auch, wenn die Schraubenlinie als Bestandteil der schraubenförmigen Hohlkehle aufgefasst wird.

Die Lichtstufenpunkte auf einer solchen Schraubenlinie sind also wie bei den früher betrachteten Schraubenflächen alle auf demselben horizontalen Parallelkreis der



Figur 106 b.

Normalkugel zu suchen, und es ist überhaupt, sobald die genannte Tangente an die Kehllinie gezogen ist, für das Aufsuchen der Lichtstufe des Berührungspunktes und die an diese anzuschliessende Bestimmung der Lichtstufpunkte auf derselben Schraubenlinie ganz derselbe Weg einzuschlagen, wie nach Art. 105 für die einzelnen Schraubenlinien, welche die konzentrischen Schnittcylinder auf den früher betrachteten Schraubenflächen erzeugen.

Eine andere Art von schraubend verdrehten Stabformen sind diejenigen, bei welchen eine ebene Figur irgend welcher Form auf einem Kreiscylinder fortschreitet, und zwar so, dass die Ebene der Figur immer durch die Achse geht und die Ecken der Figur Schraubenlinien um die Achse beschreiben. Die Schraubengänge können dabei den Cylinder ganz bedecken oder schraubenförmige Bänder der Cylinderfläche zwischen sich übrig lassen. Die scharf- und flachgängigen Schrauben (samt den Abrundungen der Kanten der ersteren) sind besondere Fälle dieser Stabformen; auch die in Art. 71 behandelte schraubenförmige Röhre kann als eine solche aufgefasst werden. Es mag etwa ein konvexes Segmentbogenstück, dessen Sehne auf dem Cylinder liegt, als erstes Beispiel und ein konkaves, in den Cylinder eingeschnittenes ebensolches als zweites genannt sein.

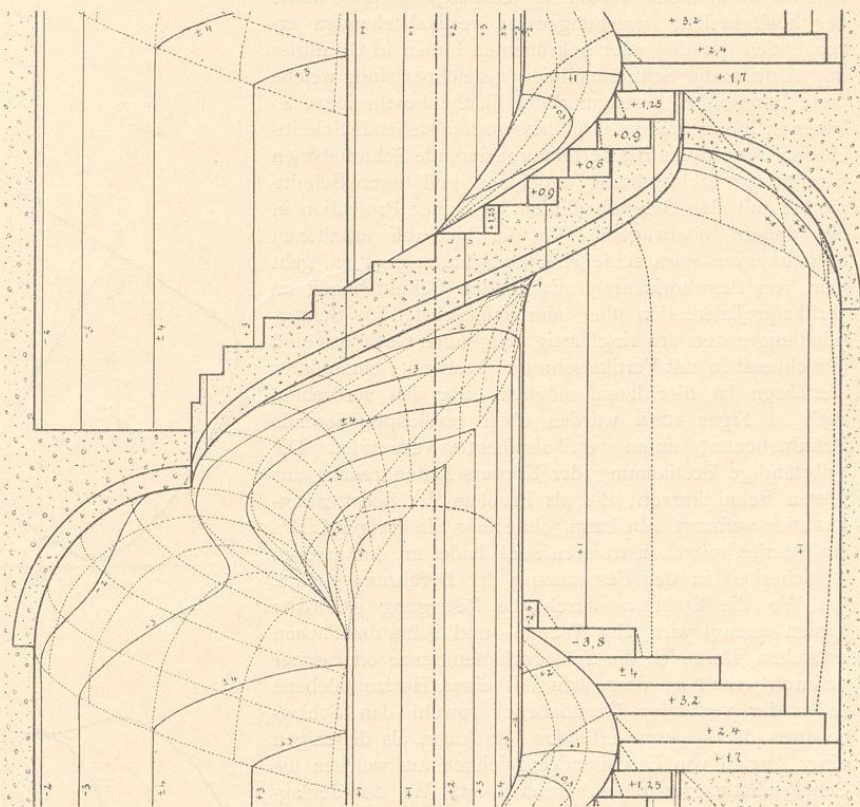
Zieht man durch einen Punkt einer beliebigen Lage des erzeugenden Bogenstücks eine Tangente an dieses, so ist die Berührungsebene der Fläche in diesem Punkt einerseits bestimmt durch diese in der Vertikalebene der Schraubenachse liegende Tangente, andererseits durch die geneigte Tangente an der Schraubenlinie, die der ausgewählte

Punkt bei der Erzeugung der Fläche beschreibt. Bei der Bewegung des Punktes erzeugt jene erste Tangente eine gewöhnliche Schraubenfläche. Wie nun auf der Schraubenlinie die Lichtstufenpunkte erscheinen als auf einem Bestandteil dieser Schraubenfläche, so gelten sie auch für die schraubenförmige Wulstfläche oder Hohlkehlenfläche. Damit ist auch für diese Art von Stabformen die Bestimmung der Lichtstufenlinien zurückgeführt auf diejenige der Schraubenflächen in Art. 105.

Die Figuren 106 b und c, die auch auf dem dritten Lichtdruckblatt mit Beifügung eines andern Grundplans schattiert auftreten, zeigen eine Wendeltreppe mit Ueberdeckung durch ein ringförmig steigendes Tonnengewölbe; in diesem ist ein Beispiel der zuvor behandelten Formen geboten. Der Grundriss in Figur 106 b giebt die Leihung des Gewölbes mit den Lichtstufenlinien; die Vorzeichen sind so eingeschrieben, als ob die Fläche wie eine Lehrschalung gegen oben konvex und von oben gesehen wäre, so dass im Aufriss, der die Unterfläche projiziert, alle Vorzeichen umzukehren waren. In dem Aufriss Figur 106 c ist die Treppe und das Gewölbe als Höhengchnitt nach *abcde* gezeichnet und der vordere Teil weggenommen gedacht, wie es der Grundriss auf der dritten Lichtdrucktafel ersichtlich macht; der Aufriss in Figur 106 b ist ein Höhengchnitt nach *abfde*, in welchem auch die Spindel herausgebrochen gedacht ist. Die Bestimmung der Lichtstufenlinien war nur die oftmalige Wiederholung der in Art. 105 beschriebenen Konstruktion, wobei in einer einzigen Hilfsfigur für den Radius *oc* und sechs Schraubenlinien die Neigungen aller Schraubenlinien und aller Tangenten am Vertikalschnitt, die Grundrissrichtungen der Gefällslinien aller Berührungsebenen, die Horizontalrichtungen dieser letzten und endlich ihre Neigungswinkel vereinigt erschienen.

Die Kurven $+0,6$ und $-3,15$ (angenähert) haben Kreuzungspunkte. Diese Punkte liegen auf derjenigen Schraubenlinie, für welche die Neigung der Berührungsebene ein Minimum wird. Am inneren Rand des Gewölbes sind die Berührungsebenen vertikal, nach aussen werden sie flacher, weil sowohl die Schraubenlinien als die Tangenten am Vertikalschnittkreis flacher werden. Im Scheitel des Halbkreisbogens ist die Tangente horizontal geworden und die Schraubenlinie hat eine mittlere Neigung erreicht. Weiter nach aussen werden die Schraubenlinien immer

noch flacher, die Tangenten aber wieder steiler. Zuerst überwiegt die Wirkung jener; die Neigungen der Berührungsebenen nehmen auch ein Stück weit vom Scheitel nach auswärts noch ab, erreichen aber schon nahe dem Scheitel ein Minimum; von diesem Punkt an überwiegen die steiler werdenden Tangenten und die Neigungswinkel der Ebenen nehmen wieder zu. Der Einfluss der Minimalneigung auf die Lichtstufenlinien ergibt sich aus folgender Betrachtung. Wird die Neigung der Berührungsebene ein Minimum, so wird in Figur 105 a der Radius *g'h'* oder *ol* ein Minimum. Denkt man sich den Grundriss in Figur 105 a



Figur 106 c.

rechts unten für diesen Fall gezeichnet, so berührt der Parallelkreis eine Lichtstufenlinie von aussen und eine andere von innen (und zwar erweist sich jene im vorliegenden Beispiel als $+0,6$, diese als $-3,15$); bei allen früheren und allen späteren Grössen des Kreises *ol* erscheinen mit den Lichtstufenellipsen $+0,6$ und $-3,15$ zwei Schnittpunkte, wonach auf allen Schraubenlinien innerhalb und ausserhalb derjenigen mit der Minimalneigung der Berührungsebene zwei Lichtstufenpunkte mit $+0,6$ und zwei solche mit $-3,15$ erscheinen müssen, auf dieser letzten Schraubenlinie aber nur ein Punkt $+0,6$ und $-3,15$ auftreten kann. Damit sind die zwei Kreuzungspunkte begründet.

Die Uebertragung der im Grundriss gefundenen Lichtstufenlinien in die Aufrisse geschah mit Hilfe des von den

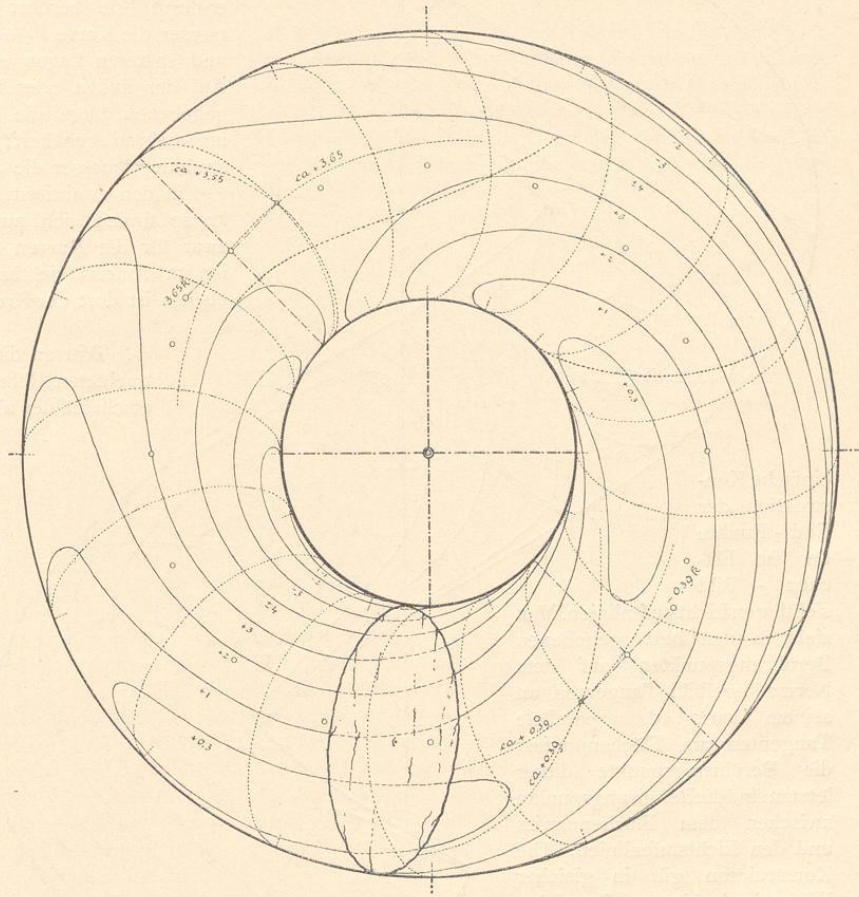
Hieraus folgt zunächst, dass die elliptischen Grundrisse $acbd$ (Figur 107a) aller solchen Schnittkreise kongruent und zwar mit der grossen Achse gegen den Mittelpunkt gerichtet sein müssen. Das Achsenverhältnis dieser Ellipsen ergibt sich, indem man den ersten Normalschnitt der Röhre so durchführt, dass er sich im Aufriss als gerade Linie $a'b'$ projiziert, das heisst an einem Punkt, in welchem die schraubenlinienförmige Röhrenachse eine Tangente parallel zur Vertikalebene hat. Teilt man nun den Grundrisskreis in eine bestimmte Zahl gleicher Teile und zeichnet für jeden Teilungspunkt f den zugehörigen Aufrisspunkt f' und die Grundrissellipse $gihk$ kongruent $acbd$, so lassen sich die zugehörigen Aufrissellipsen in folgender Weise rasch erhalten. Man zieht für jede Ellipse die Projektionslote durch die Punkte $gihk$. Die Endpunkte des horizontalen Durchmessers i' und k' liegen im Aufriss ebenso hoch wie f' ; für die Endpunkte des Durchmessers grösster Neigung $h'k'$ ist $w'h' = v'g' = x'b' = y'a'$ aufzutragen, weil infolge der gleichen Neigung aller Normalschnittkreise deren höchste und tiefste Punkte immer gleichviel über und unter ihrem Mittelpunkt liegen. $i'k'$ und $h'g'$ sind konjugierte Durchmesser der Aufrissellipse, aus welcher diese nach Art. 68d abgeleitet werden kann.

Sind in dieser Weise alle Normalschnittkreise in Grundriss und Aufriss gezeichnet, so gelangt folgender Grundgedanke für die Bestimmung der Lichtstufenpunkte zur Verwertung: „Wo auf dem Berührungskreis zwischen einer Lage der erzeugenden Kugel und der Röhrenfläche die Lichtstufenpunkte für die Kugel gelegen sind, da liegen sie auch für die Röhrenfläche.“ Zeichnet man die Umhüllungskugel selbst als Normalkugelgrundriss und -Aufriss mit allen Lichtstufenlinien auf Pauspapier, so lässt sich jedes solche Kugelbild im Grundriss, beziehungsweise Aufriss derart auf die Ellipse eines jeden Schnittkreises legen, dass die Lichtstufenpunkte unmittelbar auf die durchscheinende Ellipse als deren Schnitte mit den Kugellichtstufenlinien durchgestochen werden können. Hiezu gehört nur, dass der Mittelpunkt des Normalkugelbildes immer auf den Mittelpunkt der Ellipse fällt und dass in Grundriss und Aufriss der ursprünglich der Lichtrichtung entsprechende Kugelbilddurchmesser in jeder neuen Lage genau gleichgerichtet bleibt (wie es in Figur 107a durch die Durchmesser mit Pfeilen angedeutet ist).

Ohne die arbeitsparende Benützung des Pausblattes

wäre für jeden Normalschnitt der Fläche die elliptische Projektion des Grosskreises der Normalkugel aufzusuchen, welche nach Achsenverhältnis und Richtung der grossen Achse mit dem Normalschnitt übereinstimmt. Von dieser Projektion wären die Schnittpunkte mit den Lichtstufenlinien durch proportionale Vergrösserung oder Verkleinerung aller Masse auf den Normalschnitt zu übertragen.

In den Figuren 107b und c sind die Lichtstufenlinien der Fläche samt den Normalschnittlinien und Schlag-schattengrenzen in Grundriss und Aufriss gezeichnet und



Figur 107 b.

zwar für eine Röhre, welche derjenigen in Figur 71a bis d kongruent oder ähnlich ist. Die Schlagschattengrenzen, deren Konstruktion in Art. 71 besprochen ist, sind aus diesen Figuren herübergenommen. Auf dem zweiten und dritten Lichtdruckblatt erscheint dieselbe schraubenförmige Röhre mit den Lichtstufen schattiert.

Das Kugelbild erreicht in seiner Bewegung im Grundriss und Aufriss bestimmte Lagen, in welchen es den Umriss der Fläche mit einem der in Figur 88b durch Ringe hervorgehobenen Berührungspunkte zwischen seinen Lichtstufenellipsen und seinem eigenen Umriss berührt. In einem solchen Punkt haben also Kugelumriss und Flächenumriss eine gemeinschaftliche Tangente; zugleich

ist der Punkt ein Lichtstufenpunkt der Fläche, weil er der Endpunkt der grossen Achse der Projektion des Berührungskreises zwischen Fläche und Kugel sein muss, also im Raum auf diesem Kreis selber liegt. Hieraus folgt eine

+ 3,65; sie sind in Figur 107 b punktiert eingetragen. Hier finden sich jedoch diese Punkte einfacher; sie sind die höchsten Punkte derjenigen Normalschnittkreise, deren horizontaler Durchmesser im Grundriss senkrecht zur Lichtstrahlprojektion stehen. Dies folgt aus der Betrachtung der Lagen, welche im Grundriss der beweglichen Normalkugel die Schnittellipse gegenüber den Lichtstufenlinien annehmen kann. Auf der rechten oder vorderen Hälfte der Röhrenfläche hat sich in der angegebenen Lage die Schnittellipse am meisten vom hellsten Punkt entfernt; sie berührt hiebei auf dem Lichtstrahldurchmesser die Kurve $ca + 0,39$ von aussen; in allen früheren und späteren Lagen schneidet sie diese Kurve zweimal. Auf der linken oder hinteren Hälfte hat sich in der angegebenen Lage die Schnittellipse dem hellsten Punkt am meisten genähert; sie berührt dann auf dem Lichtstrahldurchmesser die Kurve $ca + 3,65$ von innen.

In den zwei tiefsten Punkten derselben Normalschnittkreise finden sich zwei weitere Kreuzungspunkte, und zwar für die Kurven $ca - 0,39$ und $- 3,65$. Der letzte ist im Aufriss sichtbar und mit $- 3,65 k'$ bezeichnet; ebenso ist dort der Kreuzungspunkt $+ 0,39 k'$ eingetragen.

Tritt an die Stelle der Schraubenlinie der betrachteten Röhre eine beliebige andere Kurve, so erscheint der allgemeine Fall der Röhre mit kreisförmigem Normalschnitt.

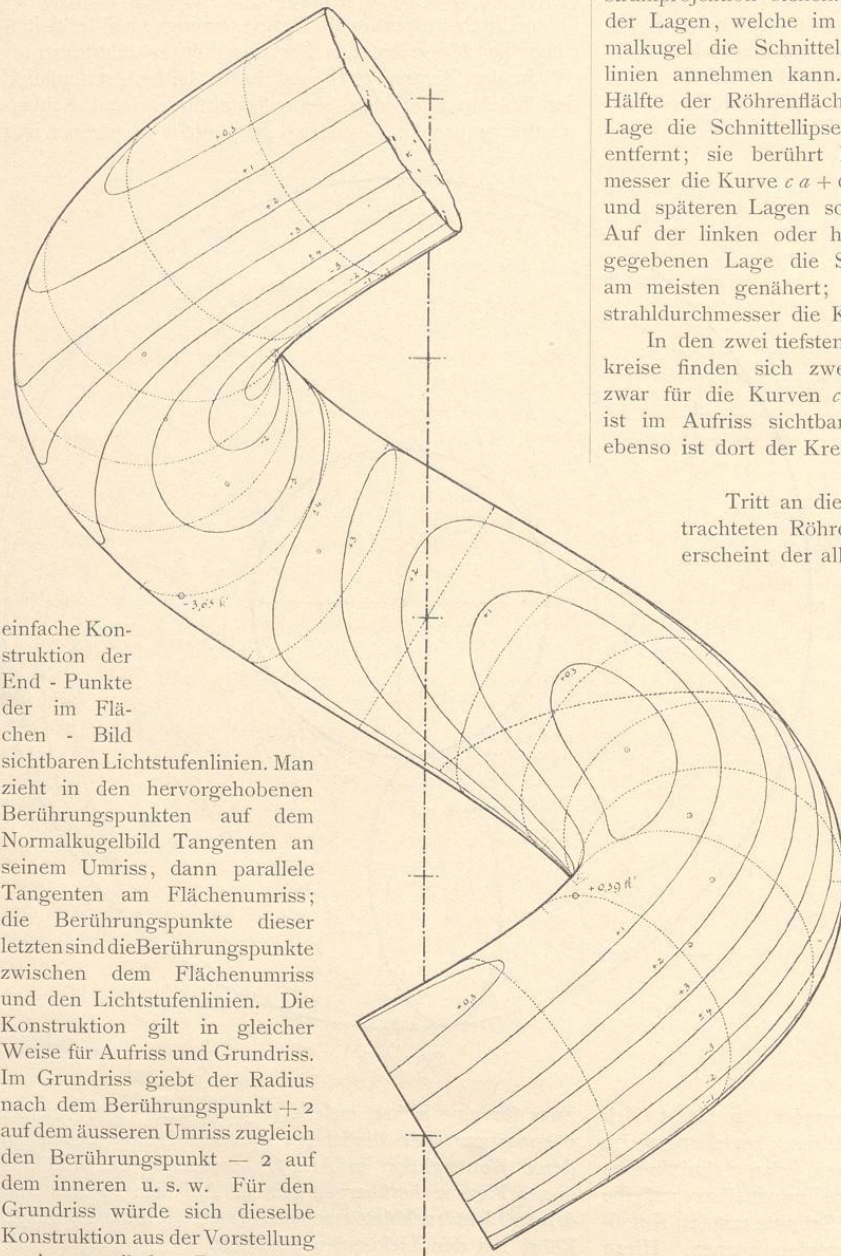
Auch dieser Fall kann immer als Umhüllungsfläche aller Lagen einer beweglichen unveränderlichen Kugel aufgefasst werden, deren Mittelpunkt auf der Kurve fortschreitet. Als Beispiel mit gewundener Kurve des Fortschreitens ausser der Schraubenlinie wurde schon in Art. 71 der Rundstab eines Bogengesimses auf cylindrischer Wandfläche genannt; weit häufiger ist die Verwirklichung der Fläche mit ebenen Kurven als Röhrenachsen.

Zur Bestimmung der Lichtstufenlinien führt am raschesten die oben bei der Schraubenröhre durchgeführte Betrachtung des Normalschnittkreises als der Berührungslinie der rückenden Kugel und die Bestimmung der Lichtstufenpunkte auf diesem Kreis der Kugel. An die beliebig gekrümmte Achse der Röhre sei in einem bestimmten Punkt pp' eine Tangente $ab a' b'$ gezogen worden. Man hat dann

auf der Umhüllungskugel in pp' den Kreis zu zeichnen, dessen Ebene normal zu dieser Tangente steht. Diese Aufgabe ist in Art. 71 gelöst; auch kann für den vorliegenden Fall die dort gezeichnete Figur 71e unverändert

einfache Konstruktion der End - Punkte der im Flächen - Bild sichtbaren Lichtstufenlinien. Man zieht in den hervorgehobenen Berührungspunkten auf dem Normalkugelbild Tangenten an seinem Umriss, dann parallele Tangenten am Flächenumriss; die Berührungspunkte dieser letzten sind die Berührungspunkte zwischen dem Flächenumriss und den Lichtstufenlinien. Die Konstruktion gilt in gleicher Weise für Aufriss und Grundriss. Im Grundriss giebt der Radius nach dem Berührungspunkt $+ 2$ auf dem äusseren Umriss zugleich den Berührungspunkt $- 2$ auf dem inneren u. s. w. Für den Grundriss würde sich dieselbe Konstruktion aus der Vorstellung zweier vertikaler Berührungscylinder der Fläche ableiten lassen.

Wie bei dem ringförmig steigenden Tonnengewölbe in Figur 106b und in derselben Thatsache begründet wie dort erscheinen im Grundriss der Röhrenfläche zwei Lichtstufenlinien mit Kreuzungspunkten, nämlich $ca + 0,39$ und



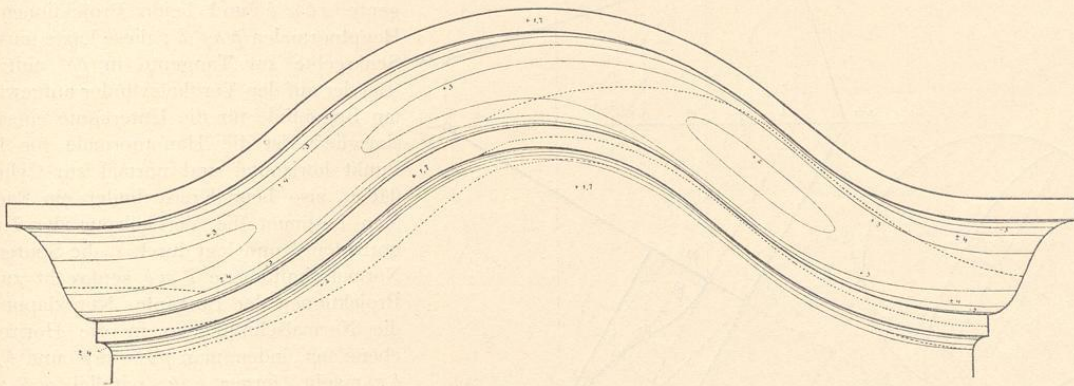
Figur 107c.

gelten. Die Ellipsen, deren grosse Achsen senkrecht zu den Tangentenprojektionen ab und $a'b'$ stehen, sind die Projektionen des Normalschnittkreises der Röhre im Punkt p . Die Ellipsen benützt man wie bei der schraubenförmigen Röhre. Legt man auf die Aufrissellipse den Aufriss einer Normalkugel, deren Durchmesser gleich dem der Röhre ist, und auf die Grundrissellipse den Grundriss derselben Normalkugel auf Pauspapier gezeichnet, so lassen sich wieder die Lichtstufenpunkte auf die durchscheinenden Ellipsen als deren Schnittpunkte mit den Kugellinien durchstechen. Hiezu gehört wieder, dass der Mittelpunkt des Normalkugelbildes auf den Mittelpunkt der Ellipse fällt, und dass in Grundriss und Aufriss der ursprünglich der Lichtstrahlprojektion entsprechende Kugelbilddurchmesser genau gleich gerichtet bleibt. Wenn in den beiden Kugelbildern der Figur 71 e zu den schon vorhandenen Schatten Grenzen oder Kurven ± 4 die andern Lichtstufenlinien hin-

Eine mit anderer Grösse gegebene Normalkugel kann man in derselben Weise unmittelbar benützen, indem man die auf ihren Durchmessern erhaltenen Einteilungen durch proportionales Verkleinern oder Vergrössern den Normalschnitten der Fläche anpasst.

Die Röhrenfläche mit beliebigem Normalschnitt; 108.
geschweifte Gesimse auf ebener und gekrümmter Wand. Die Röhrenfläche mit veränderlichem Normalschnitt.

Dieser allgemeine Fall der Röhrenfläche entsteht nach der früher (in Art. 71) gegebenen Erklärung, wenn eine beliebige unveränderliche gekrümmte oder zusammengesetzte ebene Linie auf einer beliebigen Leitlinie derart fortschreitet, dass ihre Ebene immer normal zur Leitlinie steht und ein bestimmter Punkt in ihr immer auf der Leit-



Figur 108a.

zugesucht werden, so bringt sie auch diesen zweiten Teil der Konstruktion vollständig zur Anschauung.

Die Konstruktion vereinfacht sich wesentlich, wenn die Röhrenmittellinie eine ebene Kurve parallel zu einer Grundebene, etwa zur Vertikalebene wird, weil dann in der Projektion auf diese Grundebene alle Normalschnitte geradlinig werden. Die Lichtstufenpunkte ergeben sich in diesem Fall, ähnlich wie nach Figur 58 die Körperschattenpunkte des Wulstes, äusserst einfach und ohne Benützung eines Grundplans, indem der Aufriss der Normalkugel mit dem Durchmesser der Röhre einmal gezeichnet und mit Durchmessern parallel zu den ausgewählten Normalschnitten versehen wird. Jede Normalschnittlinie im Aufriss der Fläche ist dann ebenso einzuteilen, wie der ihr parallele Durchmesser durch die Lichtstufenlinien der Kugel eingeteilt ist. Figur 58 kann auch diese Konstruktion vollständig zur Anschauung bringen, wenn an die Stelle der nur mit Körperschatten versehenen Kugel die Normalkugel und an die Stelle der kreisförmigen Mittellinie des Wulstes eine Ellipse oder beliebige andere ebene Kurve gesetzt wird. Die Bestimmung der Lichtstufenlinien eines kreisförmigen oder elliptischen oder sonst wie eben gekrümmten Wulstes ist hienach eine der einfachsten Aufgaben der Beleuchtungskunde.

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

linie bleibt. Dabei darf sich die bewegliche Linie auch nicht in ihrer eigenen Ebene verdrehen, das heisst, es muss bei einer eben gekrümmten Leitlinie immer dieselbe Sehne der beweglichen Linie in der Ebene der Leitlinie bleiben, und bei einer doppelt gekrümmten Leitlinie immer dieselbe Sehne der beweglichen Linie in die Schmiegungeebene der Leitlinie fallen; mit andern Worten, die bewegliche Linie muss immer dieselbe Lage gegenüber der „Hauptnormalen“ der Leitlinie beibehalten.

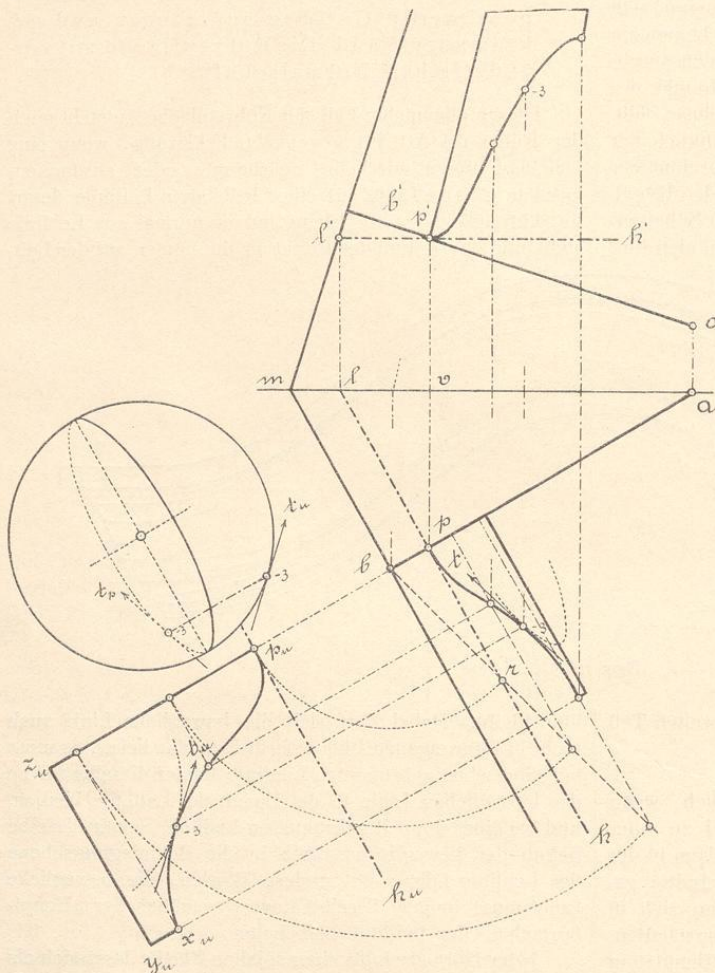
Jeder Normalschnitt einer solchen Fläche lässt sich als eine niedrige Zone eines Cylinders vom selben Normalschnitt auffassen, dessen Mantellinien parallel sind der Tangente an der Kurve des Fortschreitens in dem Punkte des Normalschnitts. Auf diesem Cylinder bestimmen sich die Lichtstufenpunkte nach Art. 99.

Als Beispiel mit einer eben gekrümmten Leitlinie ist auch hier (Figur 108a) eine Röhrenfläche parallel zur Vertikalebene, und zwar das geschweifte Gesims auf vertikaler Wand aus Figur 72a gewählt, dessen Normalschnitte sich im Aufriss als gerade Linien projizieren. Zu einem solchen Normalschnitt zieht man im Aufriss der Normalkugel einen parallelen Durchmesser und klappt sowohl den mit seinen Lichtstufenpunkten versehenen Grosskreis, den dieser Durchmesser darstellt, als die Profilinie der Röhrenfläche, welche durch den Normalschnitt dargestellt

ist, in die Vertikalebene um. Ist nun auf der umgeklappten Normalschnittprofilinie der Lichtstufenpunkt + 3 zu suchen, so zieht man an den umgeklappten Grosskreis eine Tangente im Lichtstufenpunkt + 3, dann an die Profilinie eine parallele Tangente. Der Berührungspunkt dieser letzten ist der gesuchte Lichtstufenpunkt; er ist noch auf den Normalschnitt im Aufriss zurückzuklappen. Auf Grund

dieser Grosskreis ganz ebenso bestimmt werden, wie für den Normalschnitt der doppeltgekrümmten kreisrunden Röhre in Art. 71 und 107 angegeben (Figur 71 e), indem man sich wie dort die Normalkugel in den Punkt pp' versetzt vorstellt.

Der zweite Teil der Lösung hat für den ausgewählten Punkt pp' der Leitlinie (Figur 108 b) mit Hilfe der beiden



Figur 108 b.

der gefundenen Lichtstufengruppe ist das Gesims auf der zweiten Lichtdrucktafel schattiert.

Ist die Leitlinie eine doppeltgekrümmte, wie etwa bei dem Glockenleisten als Bestandteil eines Bogengesimses auf cylindrischer Wandfläche, so wird die Bestimmung der Lichtstufenlinien sehr zeitraubend; doch mag sie als theoretisch interessant hier einigen Raum finden. Die Lichtstufen für jeden Normalschnitt sind auch in diesem Fall auf einem Grosskreis der Normalkugel zu suchen, dessen Ebene derjenigen des Normalschnitts parallel ist. Sobald die beiden Projektionen $ab a' b'$ der Tangente an der Leitlinie im ausgewählten Punkte pp' gezeichnet sind, kann

Projektionen $ab a' b'$ der Tangente in diesem Punkt die zwei Projektionen der Normalschnittprofilinie zu zeichnen, wobei die Raumgestalt dieser Linie und ihre Lage zur Hauptnormalen der Leitlinie als gegeben voraussetzen sind; diese letzte muss als gerade Linie $p_u h_u$ dem Normalschnittprofil der Röhrenfläche $p_u x_u y_u z_u$ beigezeichnet sein. Für den ausgewählten Punkt pp' der Leitlinie müssen gezeichnet sein beide Projektionen der Tangente $ab a' b'$ und beide Projektionen der Hauptnormalen $ph p' h'$; diese letzte muss als Senkrechte zur Tangente in pp' auftreten. (Bei der auf den Vertikalcyliner aufgewickelten Bogenlinie für die Unterkante eines Gesimsglieds ist die Hauptnormale für jeden Punkt horizontal und normal zur Cylinderfläche, also beim Kreiscylinder ein Radius.) Man bestimmt die Vertikalspur der Hauptnormalen l' und legt durch l' die Spuren der Normalschnittebene $l' m b$ senkrecht zu den Projektionen der Tangente. Nun klappt man die Normalschnittebene in die Horizontalebene um, indem man $pr = vp'$ und $bp_u = br$ macht, ferner $p_u h_u$ parallel mb zieht. $p_u h_u$ ist die Umklappung der Hauptnormalen; an diese Linie wird das Profil der Röhrenfläche so angefügt wie beide Linien gegeben sind. Das Zurückklappen führt in bekannter Weise zu beiden Projektionen der Normalschnittprofilinie.

Der dritte Teil der Lösung, das Bestimmen der Lichtstufen, wird am besten mit Hilfe der Umklappung erhalten. Man legt neben das umgeklappte Profil den samt seinen Lichtstufenpunkten um dieselbe Fusslinie mb in die Horizontalebene umgeklappten Grosskreis aus dem ersten Teil der Lösung. Im Lichtstufenpunkt - 3 des Grosskreises zieht man

eine Tangente t_u , dazu eine parallele Tangente t_n an die Profilinie; der Berührungspunkt dieser letzten ist der Lichtstufenpunkt - 3 in der Umklappung; er ist samt den andern Punkten der Profilinie in die Projektionen zu übertragen. — Auch an den Projektionen des Grosskreises und der Profilinie unmittelbar können die parallelen Tangenten gezogen werden, wofür die Ellipse mit der Tangente tp und am Grundriss der Normalschnittlinie die Tangente t eingezeichnet sind. Doch ist dieser kürzere Weg weniger zuverlässig.

Röhrenflächen mit veränderlichem Normalschnitt, wie sie in Art. 73 erklärt und durch Figur 73 vertreten sind, bilden schwierigere Probleme der Beleuchtungskunde. Das

in der genannten Figur dargestellte Gebilde ist als Gegenstand eines allgemeinen Verfahrens für die Lichtstufenbestimmung auf gekrümmten Flächen in Art. 112 behandelt.

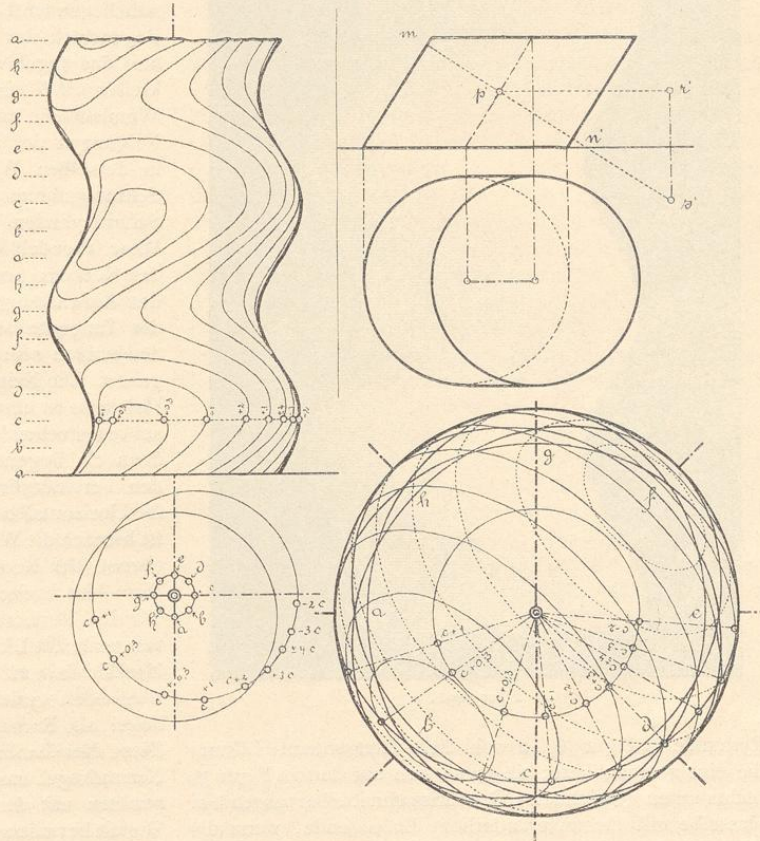
109. Die Rückungsflächen. Die gewundene Säule.

Diese Flächen sind nach ihren Erzeugungsgesetzen erklärt in den Artikeln 74, 75 und 76. Bei den Rückungsflächen mit unveränderlicher, immer gleichgerichteter Erzeugenden, wofür das hyperbolische Paraboloid (Figur 69d) und die Gewölbformen Figur 74a Beispiele sind, betrachtet man wie für die Körperschattenbestimmung jede Lage der Erzeugenden als niedrige Zone einer schiefergerichteten Cylinderfläche und bestimmt auf dieser die Lichtstufenpunkte nach Art. 99 oder 100.

Das interessanteste Beispiel einer solchen Rückungsfläche, der gewundene Säulenschaft des Barockstils, ist in Art. 74 beschrieben und als Gegenstand der Schattenkonstruktion behandelt. Auch für die Bestimmung der Lichtstufenlinien wird im Einklang mit der eben ausgesprochenen allgemeinen Vorschrift ganz wie in Figur 74c jeder der kreisförmigen Horizontalschnitte des Schaftes aufgefasst als schiefer Cylinder mit kreisförmiger Basis, dessen Mantellinien gleichgerichtet sind mit der Tangente an der leitenden Schraubenlinie im Punkte des Horizontalschnitts. Die Konstruktion der Lichtstufenlinien für diesen Fall ist in Art. 100 beschrieben und dort am Schluss der hier vorliegende Fall der kreisförmigen Basis besonders ins Auge gefasst.

Figur 109a enthält die Durchführung der Konstruktion mit acht Horizontalschnitten für jeden Umgang der Schraubenlinie. Die acht grosskreisförmigen Normalkugelschnitte, deren Ebenen senkrecht stehen zu den Mantellinien der acht Cylinder, sind im Grundriss alle kongruent, da alle Tangenten an der leitenden Schraubenlinie gleiche Neigung haben. Die erste solche Schnittellipse wird erhalten mit demjenigen Cylinder, dessen Mantellinien der Vertikalebene parallel sind (Figur rechts oben). An dem im Aufriss gezeichneten geradlinig erscheinenden Normalschnitt $m'n'$ dieses Cylinders lässt sich nach Beifügung einer Horizontal- und Vertikallinie mit $p's'$ gleich dem Normalkugelradius die kleine Halbachse der Kugelellipse als Mass $p'r'$ abnehmen. Die grosse Achse dieser ersten Schnittellipse ist im Normalkugelgrundriss senkrecht zum Grundschnitt gerichtet; die andern sieben Ellipsen ergeben sich durch Drehung der ersten. Zeichnet man nun den beweglichen Kreis, der den Säulenschaft erzeugt, konzentrisch in den Normalkugelgrundriss ein und zieht für eine der Schnittellipsen c die Radien nach ihren Schnittpunkten mit den

Lichtstufenlinien der Kugel, so geben diese Radien die Lichtstufenpunkte auf demjenigen Säulenkreis, der zu der Schnittellipse c gehört, und es können diese Punkte in den Grundriss des Schaftes unmittelbar und durch Abmessen ihrer Abstände vom vertikalen Durchmesser auch in den Aufriss auf den Kreis c übertragen werden. (Der gezeichnete Normalkugelgrundriss giebt die Konstruktion der Punkte nur für einen Kreis c , zeigt aber alle acht Schnittellipsen. Um die vielen Punkte nicht zu verwechseln, wird man die in der Figur begonnene Bezeichnung jedes Punktes mit



Figur 109a.

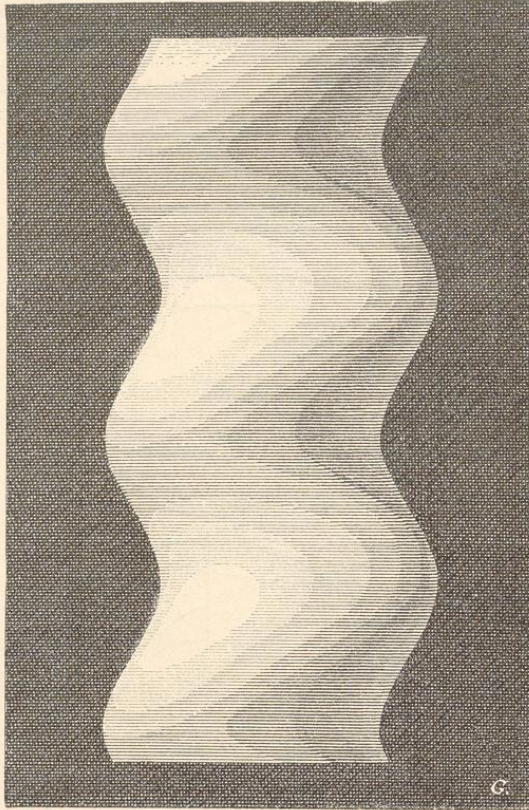
dem Buchstaben seines Horizontalkreises und der Nummer seiner Lichtstufe streng durchführen.)

Der Schaft in Figur 109a zeigt nur die Lichtstufenlinien; die Grenzen einer Selbstbeschattung, die das gezeichnete Beispiel in geringem Umfang aufweist, ergeben sich nach Art. 74. In Figur 109b ist die Schattierung mit den Lichtstufen durchgeführt.

Ist die Erzeugende einer Rückungsfläche veränderlich, wenn auch immer gleichgerichtet, so tritt die in Art. 75 erklärte Auffassung jeder ihrer Lagen als der Zonen einer Kegelfläche in Geltung. Wie auf dieser die Lichtstufenpunkte erscheinen, so gelten sie auch für die Rückungsfläche. Für jeden Vertikalschnitt des in Figur 75 gezeichneten Rundfensters und Kernbogens wäre also die Konstruktion der Lichtstufen des schiefen Kegels nach Art. 102

durchzuführen! Einen kürzeren Weg dürfte hier und in andern Fällen die in Art. 112 beschriebene allgemeine Lösung für gekrümmte Flächen eröffnen.

Für die Rückungsflächen mit drehend fortschreitenden veränderlichen Erzeugenden, also z. B. für die verdrehte



Figur 109 b.

Pyramide in Figur 76, ist wohl diese letztgenannte Lösung die einzig brauchbare; sie liesse sich auf den in Figur 76 rechts unten gezeichneten Grundriss unmittelbar anwenden. Dasselbe gilt für unveränderliche Erzeugende, wenn die Drehung keine gleichmässig fortschreitende, also keine schraubende ist.

110. Konoidische Flächen. Windschiefer Mauerbogen. Kugelkonoid.

Diese Flächen sind in Art. 77 nach ihrem Entstehungsgesetz erklärt und als Gegenstand der Schattenkonstruktion behandelt.

Auf den senkrechten Konoiden, das heisst auf denjenigen, deren Erzeugende rechtwinklig zur geraden Leitlinie stehen, ist die Bestimmung der Lichtstufenlinien nicht schwierig. Als Beispiel sei wieder der in Figur 77 a und b dargestellte „windschiefe Mauerbogen“ gewählt. An einem beliebigen Punkt der Leibungsfläche ist die Berührungsebene, die für die Lichtstufe massgebend ist, durch zwei unschwer erhältliche, durch den Punkt zu ziehende Gerade

bestimmt, nämlich einerseits durch die Erzeugende, anderseits durch die Tangente an der Kurve, die ein konzentrischer Cylinder als Schnitt mit der Fläche liefert. Die Tangente ergibt mit ihrer Horizontalneigung unmittelbar die Neigung der Berührungsebene selbst; sie erscheint im Grundriss als Tangente am Cylinderkreis; alle Tangenten längs einer Erzeugenden sind im Grundriss parallel; für ihre Neigungen zur Horizontalebene ist folgendes zu beachten.

Ein Element der Fläche zwischen zwei einander sehr naheliegenden Erzeugenden kann — indem das zugehörige Bogenstück des eben gedachten Halbkreises als gerade, also das zugehörige Bogenstück des aufgewickelten Halbkreises MN als Schraubenlinie betrachtet wird — als Wendelfläche aufgefasst werden. Hieraus folgt, dass die Neigungen der Tangenten längs einer Erzeugenden sich in derselben Weise verändern wie die Neigungen der Schraubenlinien, welche die konzentrischen vertikalen Schnittcylinder mit der Wendelfläche liefern würden. Diese Wendelfläche ist für jede Lage der Erzeugenden des Konoids einerseits bestimmt durch den Radius MO des Aufwicklungscylinders, andererseits durch die Neigung der Tangente an dem aufgewickelten Halbkreis MN in demjenigen seiner Punkte, welcher der Erzeugenden angehört. Die Neigung der Tangente am aufgewickelten Halbkreis ist aber ganz dieselbe wie diejenige der Tangente am entsprechenden Punkt des verstreckten Halbkreises; denn ein Bogenelement ändert durch das Aufwickeln auf den Vertikalcyylinder seine ursprüngliche Neigung gegen die Horizontalebene nicht. Für jede Lage der Erzeugenden ist hienach die Wendelfläche erhältlich. Da alle Berührungsebenen der Konoidfläche längs einer Erzeugenden durch diese hier horizontale Erzeugende selber gehen, also alle dieselbe Horizontalrichtung haben, so sind für jede Erzeugende alle Lichtstufenpunkte auf einer vertikalstehenden Meridianlinie zu suchen, deren Ebene senkrecht zur Erzeugenden gerichtet ist, also im Grundriss der Normalkugel als Radius senkrecht zur Erzeugenden erscheint. Diese Meridianlinie lässt sich hienach im Grundriss der Normalkugel rasch erhalten und samt ihren Lichtstufenpunkten mit den Tangenten in diesen in ihrer wahren Gestalt heraustragen. Wenn dies geschehen ist, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden folgende einfache Konstruktion für die Lichtstufenpunkte auf der ausgewählten Erzeugenden, wobei der Gedanke zu Grunde liegt, dass in irgend einem ganzzahligen Lichtstufenpunkt der Erzeugenden die Neigung der durch den Punkt gehenden Schraubenlinie dieselbe sein muss wie die Neigung der Meridiantangente im gleich hellen Kugelpunkt.

Man zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck, dessen horizontale Kathete der Radius OM des Cylinders ist, auf welchem das Halbkreisbogenfeld aufgewickelt wurde, und dessen Hypotenuse die Neigung der Tangente hat, welche an den ebenen Halbkreis durch denjenigen Punkt gezogen wird, welcher der Lage der ausgewählten Erzeugenden entspricht. Durch die Spitze dieses Dreiecks zieht man eine Parallele zu jeder Tangente, die an dem herausgetragenen Normalkugelmeridian in einem seiner Lichtstufenpunkte gezogen worden ist. Wie diese Parallelen

die liegende Kathete vom rechteckigen Eckpunkt aus einteilen, so ist auch die Erzeugende im Grundriss vom Mittelpunkt aus durch die Lichtstufenpunkte einzuteilen. Die Durchführung des Verfahrens für eine genügende Zahl von Erzeugenden liefert wie in den früheren Lösungen eine genügende Zahl von Punkten für jede Lichtstufenlinie. Hierbei ist Gebrauch gemacht von der Tatsache, dass für jeden beliebigen Höhenabschnitt einer vertikalstehenden Wendelfläche die Grundrissbogenlängen der auf ihr liegenden Schraubenlinien deren Radien proportional sind. Jene geneigten Parallelen samt der zuerst gezeichneten Hypotenuse können unmittelbar als die Abwicklungen der Schraubenlinien der für die ausgewählte Erzeugende vorgestellten Hilswendelfläche aufgefasst werden, ebenso die Horizontalabschnitte als Verstreckungen der zugehörigen Grundrissbogenlängen.

Die Lösung hat sich verhältnismässig einfach gestaltet, weil es möglich war, jede Lage der Erzeugenden als Bestandteil der einfach zu schattierenden senkrecht stehenden Wendelfläche zu betrachten. Beim allgemeinen Fall des Konoids, wofür etwa das Kugelkonoid mit schrägstehender Geraden als Leitlinie und mit Gleiten der Erzeugenden an einer Kugel anstatt des Kreises in Figur 29b ein interessantes Beispiel wäre, fällt diese Erleichterung weg. Auch nicht als Schraubenfläche darf ein Stück der Fläche zwischen zwei einander naheliegenden Erzeugenden betrachtet werden, da die Winkel mit der festen Geraden sich ändern. Die Auffassung als Bestandteil eines windschiefen Vierecks (hyperbolischen Paraboloids) wäre berechtigt, führt aber zu keiner direkten Lösung. Daher dürfte wie bei der schiefen Kegelfläche nur eine Lösung mit punktweise konstruierten geometrischen Orten möglich sein, wie sie im folgenden in den Grundzügen gegeben ist.

Wie im zuerst betrachteten einfachen Fall und wie bei allen Regelflächen überhaupt besteht die Tatsache, dass die Lichtstufenpunkte für jede der Erzeugenden E auf einem Meridian ME der Normalkugel zu suchen sind, dessen Ebene normal steht zur Erzeugenden, also hier vertikal steht. Wenn noch für einen Punkt der Erzeugenden die Neigung der Tangente N an der Schnittlinie der Fläche mit der zur Erzeugenden normalen Ebene bekannt ist, so kann für diesen Punkt der zugehörige Normalkugelpunkt angegeben werden; es ist derjenige Punkt des Meridians ME , in welchem die Meridiantangente dieselbe Neigung hat wie die Tangente N .

Ein beliebiger Vertikalschnitt V der Fläche, der senkrecht zum Grundschnitt gerichtet sein mag, kann für jeden Punkt, in dem er eine Erzeugende E schneidet, diese Neigung liefern. Man zeichnet die Schnittkurve des Vertikalschnitts V und in jedem Punkt, in welchem er eine der ausgewählten Erzeugenden E schneidet, die Tangente S an der Vertikalschnittkurve. Diese Tangente S hat man rechtwinklig auf die zur Erzeugenden E normale Ebene zu projizieren, um in dieser die Normaltangente N zu erhalten.

Hienach lässt sich für jeden Schnittpunkt der Vertikalschnittkurve V mit einer Erzeugenden E der entsprechende Punkt P der Normalkugel bestimmen. Verbindet man auf

der Normalkugel alle zu einem Vertikalschnitt V gehörigen Punkte P durch eine Kurve, so ist diese der geometrische Ort der Lichtstufenpunkte für eine Vertikalschnittkurve V . Diese Raumkurve auf der Kugel schneide z. B. den Lichtstufenkreis $+3$ in einem bestimmten Punkt. Durch diesen Punkt legt man einen Vertikalschnitt der Normalkugel parallel zum Vertikalschnitt V , zieht an den Schnittpunkt eine Tangente im Punkt $+3$ und dazu eine parallele Tangente an die Vertikalschnittkurve V . Der Berührungspunkt auf dieser letzten ist der Lichtstufenpunkt $+3$ auf der Fläche.

Eine zweite Lösung, bei welcher der geometrische Ort nicht auf der Normalkugel, sondern auf der Fläche selber sich bildet, ist die folgende. Der zu einer Erzeugenden E gehörige vertikalstehende Kugelmeridian M schneide die Lichtstufenlinie $+3$ in einem Punkt R . Durch R legt man einen vertikalen Parallelkreis, dessen Ebene denjenigen der Vertikalschnitte $V_1 V_2 V_3 \dots$ der Fläche parallel ist, also nach der für diese getroffenen Wahl auch senkrecht zum Grundschnitt steht. In R zieht man eine Tangente an den Parallelkreis, dann an die getrennt herausgetragenen Schnittkurven $V_1 V_2 V_3 \dots$ parallele Tangenten. Die Berührungspunkte dieser letzten überträgt man in den Grundriss oder Aufriss und verbindet sie durch eine stätige Kurve. Wo diese die Erzeugende E schneidet, da ist der Lichtstufenpunkt $+3$ auf dieser. Selbstverständlich wird man die parallelen Tangenten nur an etwa vier Vertikalschnittkurven V ziehen, bei denen die Berührungspunkte in die Nähe der Schnittpunkte der Kurven mit der Erzeugenden fallen. Da diese Schnittpunkte zum Heraustragen der Kurven V dienen, also von Anfang auf ihnen vorhanden sind, so ist die Auswahl der vier Kurven leicht zu treffen (eine dritte Lösung s. Art. 111 am Schluss).

Lichtstufen auf beliebig gekrümmten Flächen, 111.
erstes Verfahren: mit geometrischen Orten auf der Normalkugel.

Bei allen bisher beschriebenen gekrümmten Flächen ist das Verfahren zur Bestimmung der Lichtstufenlinien einem bestimmten Erzeugungsgesetz angepasst worden. Andere Flächen als die betrachteten dürften zwar selten mit Lichtstufen zu schattieren sein; doch ist vom rein wissenschaftlichen Standpunkt aus die Aufgabe der Beleuchtungskunde mit solcher Einzelkonstruktion noch nicht gelöst. Sie ist es offenbar erst dann, wenn alle Flächen in derselben Weise schattiert werden können wie die bisher betrachteten, das heisst wenn ein allgemein gültiges Verfahren für alle gekrümmten Flächen gefunden ist, ähnlich wie es für die Bestimmung der Schattengrenzen in Art. 28 vorliegt. Den im Früheren betrachteten Lösungen muss ein gemeinschaftlicher Grundgedanke zu eigen sein, dessen Durchführung sich in ihnen verhältnismässig einfach gestaltet hat, weil das Erzeugungsgesetz der Flächen ein einfaches war oder eine günstige Verwandtschaft mit dem der Kugel darbot. Diesen Grundgedanken auszuziehen und seine Verwertung ohne Eingehen auf ein bestimmtes Erzeugungsgesetz zu zeigen, ist im vorliegenden Artikel versucht.

Für jeden Punkt x einer gekrümmten Fläche ergeben sich unmittelbar aus dem Erzeugungsgesetz zwei in der Oberfläche liegende, im allgemeinen gewundene Linien, die durch den Punkt x gehen und in beiden Projektionen gezeichnet werden können. Eine dieser Linien ist eine Lage der erzeugenden Linie oder findet sich aus einer Lage der erzeugenden Fläche, die andere bestimmt sich aus deren Bewegung. Zieht man in dem betrachteten Punkt x die beiden Tangenten, so bestimmt deren Ebene den für x gültigen Lichtstufenpunkt auf der Normalkugel. Auf jeder beliebig gekrümmten Fläche lässt sich somit für jeden Punkt die Lichtstufe angeben. Damit ist aber das Problem der Beleuchtungskunde für die Fläche nicht gelöst, indem die gefundenen Lichtstufen beliebig ausgewählter Flächenpunkte im allgemeinen keine ganzzahligen sind, also das Zusammenfassen in Lichtstufenlinien nicht gestatten oder nur eine unsichere Schätzung über deren Verlauf ermöglichen. An die beiden unmittelbar gegebenen Flächenlinien eines Punktes ist keine allgemeingültige Lösung anzuknüpfen; eine solche erfordert ebene Kurven mit leicht festzuhaltender Lage ihrer Ebenen.

Ein erstes allgemeines Verfahren lässt sich als dasjenige „der geometrischen Orte auf der Normalkugel“ bezeichnen. Man zeichnet auf der gegebenen Fläche die Schnittlinie mit einer horizontalen Ebene, bestimmt für eine Anzahl von Punkten dieser Linie die Lichtstufenpunkte auf der Normalkugel in deren Grundriss und verbindet diese Kugelpunkte durch eine stetige Kurve. Diese ist der geometrische Ort, auf welchem auch alle andern Lichtstufenpunkte jener Schnittlinie zu suchen sind. Die Kugelkurve schneidet die Lichtstufenkreise der Kugel in bestimmten Punkten. Wenn man nun durch den Schnittpunkt der Kurve mit der Linie $+3$ den horizontalen Parallelkreis der Kugel legt und an diesen im Punkt $+3$ eine Tangente zieht, ferner an jene horizontale Schnittkurve auf der Fläche eine parallele Tangente zieht, so ist der Berührungspunkt dieser letzten ein Lichtstufenpunkt $+3$ auf der Fläche. (Anstatt der Tangente am Normalkugelkreis wird man nur den zugehörigen Radius ziehen und die Tangente der Flächenkurve senkrecht zu diesem Radius stellen, wie in Art. 99, 100 und 102, wo ebenfalls immer die Vorstellung paralleler Tangenten zu Grunde lag.)

Weitere Tangenten in weiteren ganzzahligen Punkten der Kugelkurve geben weitere ganzzahlige Lichtstufenpunkte auf der Horizontalkurve der Fläche, und weitere Horizontalschnitte der Fläche liefern weitere geometrische Orte auf der Kugel und damit weitere Gruppen von Lichtstufenpunkten auf der Fläche.

Dieses Verfahren ist schon im früheren bei der schiefen Kegelfläche in Art. 102 zur Anwendung gebracht worden. Dort war jedoch eine der beiden Flächenlinien eine Gerade und dadurch die Bestimmung der Lichtstufenpunkte vereinfacht. Im allgemeinen Fall ist es nötig, ausser den horizontalen Schnittebenen auch noch vertikale beliebiger Richtung einzuführen, die sich im Grundriss als gerade Linien projizieren und deren Schnittkurven am besten getrennt herausgetragen werden. Wenn eine solche vertikale Schnittkurve eine horizontale in einem Punkt x schneidet, so zieht man Tangenten an beide Schnittkurven

im Punkt x . Die Richtung der horizontalen bestimmt einen Grosskreis auf der Kugel, der sich im Grundriss als Radius senkrecht zu dieser Tangente projiziert (die „geographische Länge“ des Lichtstufenpunktes); die geneigte Tangente, rechtwinklig projiziert auf eine Ebene, die senkrecht zur Horizontaltangente steht, erscheint in dieser Projektion als Gefällslinie der Berührungsebene und bestimmt in bekannter Weise einen horizontalen Parallelkreis (als „geographische Breite“) im Grundriss der Normalkugel, dessen Schnitt mit jenem Radius den Lichtstufenpunkt für den Flächenpunkt x darstellt. Dieses Verfahren, für jeden Schnittpunkt x einer Horizontalkurve durchgeführt, liefert die Reihe der Lichtstufenpunkte und damit den geometrischen Ort für die Horizontalkurve.

Als vertikale Schnittebenen wird man in erster Linie solche zu benützen suchen, welche der Lichtrichtung parallel stehen. Die mit ihnen erhaltenen Schnittkurven können nicht nur gleichzeitig zur Bestimmung von Schlagschattengrenzen dienen, sondern auch eine Probe für die Kurve ± 4 liefern; die Berührungspunkte dieser Kurven mit den Lichtstrahlen müssen ja Punkte der Kurve ± 4 sein.

In andern Fällen werden Vertikalschnitte senkrecht zum Grundschnitt, die auch im Aufriss geradlinig erscheinen, die meist geeigneten sein, in wieder andern Vertikalschnitte verschiedener Grundrissrichtungen, welche sich etwa den verschiedenen Lagen einer Erzeugenden anpassen.

Bei bestimmten Lagen der Flächen treten an die Stelle der in der voranstehenden Lösung als erste Kurvengruppe verlangten Horizontalschnitte solche parallel zur Vertikalebene, und an die Stelle der vertikalen Schnitte solche senkrecht zur Vertikalebene, entweder mit Richtung parallel zum Lichtstrahl oder senkrecht zum Grundschnitt oder irgend einer andern gleichbleibenden oder veränderlichen Aufrissrichtung. Die geometrischen Orte auf der Normalkugel sind dann für die zur Vertikalebene parallelen Schnittkurven aufzusuchen und werden im Aufriss der Normalkugel, anstatt im Grundriss gezeichnet. So können z. B. bei Regelflächen mit horizontalen Erzeugenden keine Tangenten an Horizontalschnittkurven gezogen werden, weil diese letzten zu geraden Linien geworden sind; hier müssen also notwendig andere Parallelschnitte, welche Kurven liefern, eingeführt werden.

In wieder andern Fällen ist die erste Schnittebenen-Gruppe, für deren Kurven die geometrischen Orte auf der Kugel zu suchen sind, parallel zur Seitenebene zu wählen, wie es für das Kugelkonoid in Art. 110 geschehen ist. Die horizontalen Schnitte waren aus dem eben angegebenen Grund ausgeschlossen; Schnitte parallel zur Vertikalebene wären wegen ihrer viel zu schiefen Winkel mit den Erzeugenden auch nicht zweckmässig gewesen.

Eine letzte Stellung, die für die erste Parallelschnittebenen-Gruppe zweckmässig sein kann, ist diejenige mit schiefem Winkel gegen zwei Grundebenen bei Richtung normal zur dritten; sie kann sich empfehlen, wenn sie dem Entstehungsgesetz und der Lage der Fläche in besonders hohem Mass entspricht und die Ableitung der andern Schnittkurven schwierig wäre. Doch wird hiebei für die Erleichterung in der einen Seite der Lösung weit

grösserer Arbeitsaufwand in der andern eingetauscht. Schiefgerichtete Schnittebenen, die nicht wenigstens senkrecht zu einer Grundebene stehen, dürften ausgeschlossen sein.

Das umständliche Projizieren der in den Vertikalschnittebenen der ursprünglichen Lösung gelegenen geneigten Tangenten auf die zu den Horizontaltangenten normalen Ebenen kann umgangen werden, indem man Gebrauch macht von der in Art. 91 angegebenen Lichtstufenbestimmung für eine Ebene, die gegeben ist durch ihre Horizontalrichtung und irgend eine ihr angehörige geneigte Gerade. Der geometrische Ort der Berührungspunkte aller Tangenten, die an die Normalkugel parallel zu einer der geneigten, in den Vertikalschnittebenen liegenden Flächentangenten N gezogen werden können, ist ein Grosskreis, dessen Ebene senkrecht zur Tangente steht; er projiziert sich im Grundriss als eine Ellipse E , deren grosse Achse senkrecht zum Grundriss der Vertikalschnitte V gerichtet und deren kleine Achse gleich ist dem Normalkugeldurchmesser mal dem Sinus des Neigungswinkels der Tangente. Wo diese Ellipse den Radius R schneidet, der im Grundriss der Normalkugel senkrecht zur zugehörigen Horizontaltangente H steht, da ist der Lichtstufenpunkt L . Bei dieser Abänderung des oben beschriebenen allgemeinen Verfahrens tritt also an die Stelle der Projektion der geneigten Tangente diese selbst und an die Stelle des Horizontalkreises die Grosskreisellipse.

Diese Thatsache lässt sich in folgender Weise zu einem mechanischen Hilfsmittel verwerten. Auf durchsichtigem Papier wird ein Kugelgrundriss ebensogross wie das Normalkugelbild, aber ohne Lichtstufenlinien, mit den elliptischen Projektionen von etwa 16 bis 32 zu einem Horizontaldurchmesser gehörigen Grosskreisen gezeichnet und über diesem vertikal dargestellten Durchmesser die Tangentenneigungen, die senkrecht zu den Ebenen der Grosskreise stehen, so beigefügt, dass durch Verbindungslinien die zu jeder Neigung gehörige Ellipse leicht herausgefunden werden kann. Dieses Blatt wird zuerst auf der Vertikalschnittkurve V mit immer vertikalbleibendem Durchmesser so verschoben, dass die Tangente N an dieser mit einer der Tangenten des Blattes zusammenfällt oder zwischen zwei Tangenten fällt und die zugehörige Ellipse E bezeichnet oder eingeschätzt werden kann. Dann wird das Blatt auf den Normalkugelgrundriss gelegt und dabei die ursprünglich vertikale grosse Ellipsenachse senkrecht zur Grundrissrichtung der Vertikalschnitte V gelegt, worauf der Schnittpunkt der eingeschätzten Ellipse E mit dem Radius R auf diesen durchgestochen werden kann; dieser Punkt ist der gesuchte Lichtstufenpunkt L . Das Hilfsblatt kann für alle Schnittpunkte von Horizontal- und Vertikalkurven in gleicher Weise benützt werden und für alle Arten von Flächen dieselben Dienste leisten, ohne die Genauigkeit des Resultats in ungünstiger Weise zu vermindern.

Noch auf einem andern Weg lassen sich die Parallelkreise der Lichtstufenpunkte mit Umgehung jenes Projizierens schräggeneigter Tangenten erhalten, und es dürfte sogar, wenn keine Schlagschattengrenzen mitzubestimmen sind, dieser letzte Weg für die meisten Flächen der kür-

zeste sein. Man zeichnet im Grundriss der Fläche über deren Horizontalkurvensystem weg und nur nach Schätzung weitere Kurven, welche alle Horizontalkurven rechtwinklig durchschneiden, sogenannte „Trajektorien“ und betrachtet sie als Grundrisse von Linien auf der Fläche. Jede Tangente an einer solchen Flächenkurve im Raum ist zugleich die Gefällslinie der Berührungsebene der Fläche in demselben Berührungspunkt, so dass die im allgemeinen gewundene Kurve eine „Gefällskurve“ der Fläche heissen kann, womit ausgedrückt ist, dass sie in jedem ihrer Punkte nach Horizontalrichtung und Neigung die grösste Horizontalneigung der Fläche verwirklicht. (Ein Punkt auf der Fläche, der nur der Schwerkraft folgen würde, müsste sich auf einer „Gefällskurve“ bewegen.) Durch Verstreckung ihres projizierenden Cylinders herausgetragen, giebt eine solche Linie in jedem Schnittpunkt mit einer der Horizontalen unmittelbar die Neigung der Fläche in diesem Punkt und damit durch ihre Tangente in diesem Punkt den Parallelkreis der „geographischen Breite“ des zugehörigen Lichtstufenpunktes auf der Normalkugel. Es genügt, die „Trajektorien“ ganz oder als beliebig lange Bruchstücke nur nach Schätzung zu zeichnen, da der Neigungswinkel, den sie allein liefern sollen, auch bei ziemlich stark unrichtiger Schätzung noch ebenso genau richtig erhalten wird, als die übrigen Resultate der Konstruktion erhalten werden können. Diese Thatsache beruht darauf, dass eine gerade Strecke, rechtwinklig auf eine andere Gerade sehr wenig verschiedener Richtung projiziert, in der Projektion fast unverändert lang auftritt.

Handelt es sich nur um die Bestimmung der Lichtstufe eines einzelnen Flächenpunktes, so wird man ein Bruchstück der Trajektorie durch den Punkt nur etwa über zwei oder drei Horizontalkurven weg zu beiden Seiten des Punktes zeichnen; sollen die geometrischen Orte für viele Horizontalkurven zugleich gesucht werden, so wird man die meisten Trajektorien so weit als möglich durchführen. Sie vereinigen sich im höchsten Punkt der Fläche.

Bei allen beschriebenen Konstruktionen zur Bestimmung des geometrischen Ortes auf der Normalkugel wird man das oft sich wiederholende Auftragen geradliniger Reihen von Punkten mit einem Papierstreifen vornehmen.

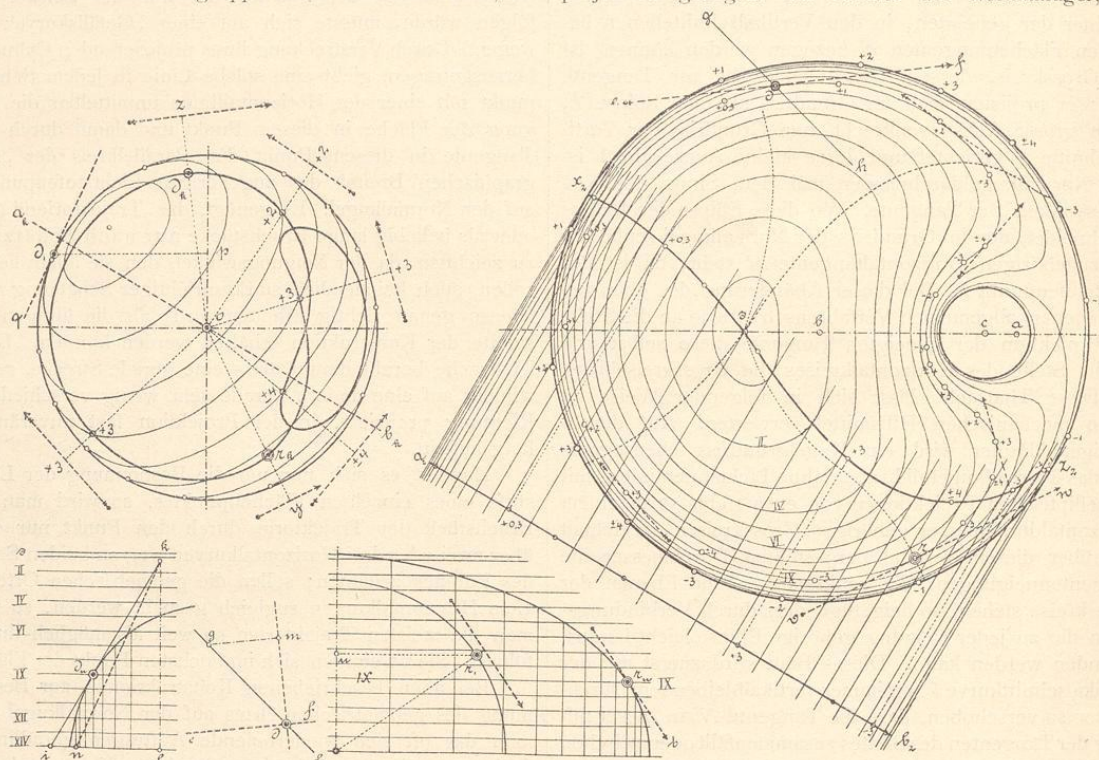
In Figur 111a–c ist ein Beispiel für die beschriebene allgemeine Lösung gezeichnet; Figur 111a rechts zeigt das gewählte Gebilde, das sich als „exzentrische Wulstfläche“ benennen liesse, im Aufriss. In einer zur Vertikalebene parallelen Ebene liegt ein Kreis mit dem Mittelpunkt b , der einen andern, nicht konzentrischen, mit dem Mittelpunkt c einschliesst; die Fläche erzeugt sich durch einen beweglichen veränderlichen Kreis, dessen Ebene immer senkrecht zu derjenigen der festliegenden Kreise steht und dessen Durchmesser die zwischen beiden gelegene Strecke auf dem verlängerten Halbmesser des kleineren Kreises ist. (Richtiger wäre es, den Durchmesser auf einer Sehne durch den in beiden Kreisen geometrisch ähnlich liegenden Punkt a anzunehmen; es wäre dann keiner der beiden festen Kreise bevorzugt. Doch würde sich hiedurch die Fläche nur wenig ändern.)

Hier empfiehlt sich als erste Schnittkurvengruppe

offenbar eine solche parallel zur Vertikalebene; sie ist mit der Hilfsfigur 112a links rasch erhältlich. In dieser Figur sind 14 Lagen des erzeugenden Kreises konzentrisch gezeichnet und durch 15 Horizontallinien, welche die Schnittebenen bedeuten, durchschnitten. Der höchste Punkt jedes Kreises erscheint im Aufriss der Fläche als Halbierungspunkt des Sehnenstücks, in welchem sich der Kreis projiziert; die Abstände der Schnittpunkte des Kreises mit jeder der Horizontallinien vom vertikalen Radius der Hilfsfigur sind dieser zu entnehmen und auf dem Sehnenstück von jenem Halbierungspunkt aus nach rechts und links aufzutragen. (Da die Ebene der festen Kreise und die erste Schnittebenengruppe nicht horizontal sind, so

Tangente in einem gegebenen Punkt genau richtig gezogen werden, an jene andern Schnittkurven nicht. Um dem allgemeinen Fall der gekrümmten Fläche möglichst nahe zu bleiben, ist die Einfachheit der Kreislinie nicht ausgenützt und die zweite zur Vertikalebene senkrechte Schnittebenengruppe parallel zur Lichtrichtung angenommen.

Zur Darstellung der Konstruktion des geometrischen Ortes auf der Kugel und der ganzzahligen Lichtstufpunkte auf der Fläche ist die Schnittkurve IX ausgewählt. In einem beliebigen Punkt d dieser Kurve ist deren Tangente ef und die Schnittlinie gh parallel zur Lichtstrahlprojektion gezogen. Im Aufriss der Normalkugel, Fi-



Figur 111a.

erscheint die Lösung nicht ganz in der ursprünglich beschriebenen Gestalt; doch wäre es leicht, die gegebene Figur mit allen im folgenden darauf erscheinenden Linien als Grundriss aufzufassen, indem man sie um 90° gedreht vorstellt.)

Da eine Selbstbeschattung stattfindet, so liegt ein Grund vor, die zweite, zur Vertikalebene senkrechte Schnittebenengruppe parallel zur Lichtrichtung einzuführen, um die Schnittkurven zugleich zur Schlagschattenbestimmung und zur Probe für die Kurve ± 4 benützen zu können. Aber auch die Benützung der Ebenen des erzeugenden Kreises als der zweiten Schnittebenengruppe hätte einen grossen Vorzug; diese Kreise sind schon in der Hilfsfigur 112a links vorhanden, wogegen jene andern Schnittkurven neu abzuleiten sind, und an einen Kreis kann die

Figur 111a links, erscheint als erster geometrischer Ort des zu d gehörigen Lichtstufpunktes der Radius oz senkrecht zu ef . Die Ebene gh , welche zum Zweck der Schlagschattenkonstruktion und Verwertung bei andern Vertikalschnittkurven durch die ganze Fläche zu führen wäre, liefert die in Figur 111a links unten herausgetragene Schnittkurve durch Auftragen der Abscissen und Ordinaten; ik ist die Tangente dieser Kurve im Punkt d , der in dieser Hilfsfigur den Flächenpunkt d darstellt. Der rechts hievon beigezeichnete Aufriss zeigt in gh und ef die Richtungen gh und ef aus dem Flächenaufriss wiederholt; dm ist senkrecht zu ef , kl eine Vertikale an beliebiger Stelle, $dg = li$, gm senkrecht zu dm , $ln = dm$; kn ist die Projektion der in der Ebene dg liegenden Flächentangente ki auf die Ebene dm , das heisst auf eine

Schnittebene der Fläche, die senkrecht zu ef gerichtet ist, also die Neigungslinie der Berührungsebene der Fläche im Punkt d in Beziehung auf die Vertikalebene. An einem Normalkugelumriss ist die Tangente qd_1 parallel nk gezogen, deren Berührungspunkt d_1 bestimmt und im Aufriss der Normalkugel auf dem zuvor bestimmten Radius $od_k = pd_1$ aufgetragen; d_k ist der Lichtstufenpunkt auf der Kugel für den Flächenpunkt d . Durch Annahme weiterer Punkte d auf der Kurve IX erhält man die im Aufriss der Kugel gezeichnete Kurve als geometrischen Ort der Berührungspunkte aller Tangentialebenen, welche den längs der Kurve IX an die Fläche gelegten Tangentialebenen parallel sind. Wegen der Symmetrie der Fläche und der Kurve IX zu der Ebene sbc wird auch die Kugelkurve symmetrisch zu einer gleichgerichteten Grosskreisebene.

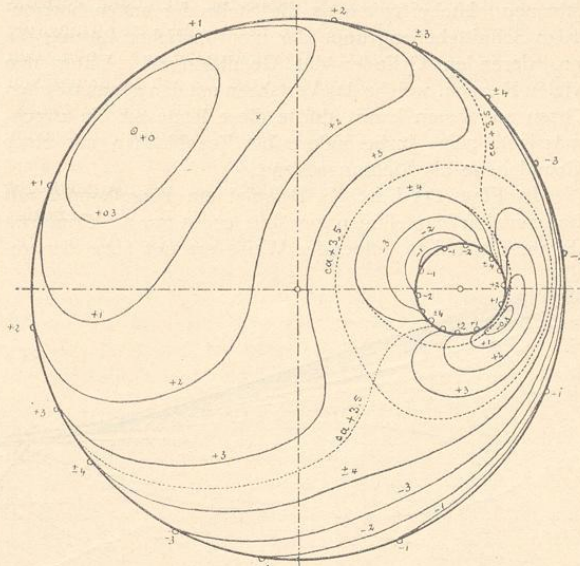
Auf der Flächenkurve IX ist ein zweiter Punkt r ausgewählt, um die oben beschriebene Verwertung der Trajektorien zu zeigen. Die punktierte Kurve sr ist die nur nach Schätzung eingetragene Trajektorie oder, räumlich aufgefasst, „Maximalneigungskurve“ für die Vertikalebene, fortgesetzt bis zum Flächenscheitel s . In Figur III a rechts unten ist die Verstreckung dieser Kurve und ihres projizierenden Cylinders ganz herausgetragen, obwohl zum Ziehen der Tangente tr_u nur ein kleines Stück nötig gewesen wäre. Punkt r_1 am Kugelbild entsteht durch hr_1 senkrecht zu tr_u . Im Aufriss der Normalkugel ist der Radius oy senkrecht zur Tangente vw gezogen und $or_k = ur_1$ aufgetragen; r_k ist der zu r gehörige Lichtstufenpunkt.

Ist in dieser oder der erstbeschriebenen Weise die Kurve des geometrischen Ortes für die Berührungsebenen längs der Flächenlinie IX bestimmt, so zieht man die Radien nach den Schnittpunkten dieser Kurve mit den Lichtstufenellipsen des Kugelbildes. In der Figur sind zur Darstellung dieses Teils der Konstruktion die Schnittpunkte mit den Ellipsen $+2 + 3 + 4$ ausgewählt. Eine Tangente an die Flächenlinie IX senkrecht zu dem nach dem Schnittpunkt $+2$ gezogenen Radius liefert als Berührungspunkt einen Lichtstufenpunkt $+2$ der Fläche. Die drei zu den Kugelpunkten gehörigen Tangenten sind durch Querstriche hinter den Pfeilen unterschieden. (Nicht an jeder Stelle der Flächenlinie, an welcher eine solche Tangente möglich ist, darf sie gezogen werden. Wenn etwa die Kugelkurve eine Lichtstufenellipse $+3$ viermal schneidet, wie im vorliegenden Fall, so ist wohl zu untersuchen, zu welchem Teil der Flächenkurve jeder Schnittpunkt gehört.)

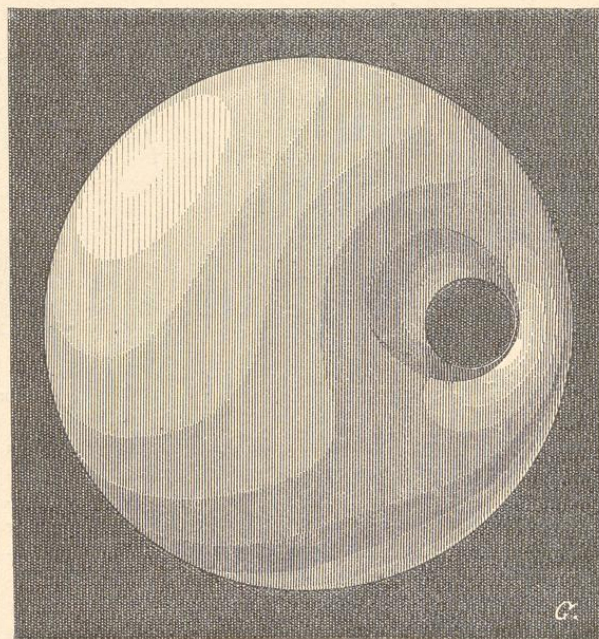
Zur Durchführung des Verfahrens würde man noch etwa die Vertikalschnittkurven II , IV , VI auszuwählen und für jede ein eigenes Kugelbild mit dem geometrischen Ort wie für die Linie IX zu zeichnen haben; weitere zur Konstruktion gehörige Bemerkungen sind in Art. 113 ausgesprochen. Figur III b zeigt die Lichtstufenlinien und Schlagschattengrenzen des betrachteten Gebildes; in Figur III c erscheint es mit durchgeführter Schattierung.

Ausser der schon anfangs erwähnten schiefen Kreiskegelfläche und Kegelfläche mit beliebiger Basis war das Kugelkonoid in Art. 110 ein Beispiel für diese erste allgemeine Lösung. Nur erschien sie dort mit der Umkeh-

rung, dass die zweiten Schnittebenen auf der Kugel, anstatt auf der Fläche und die geometrischen Orte auf der Fläche, anstatt auf der Kugel gesucht wurden. Diese Umkehrung ist bei allen Regelflächen mit Richtebenen für



Figur III b.



Figur III c.

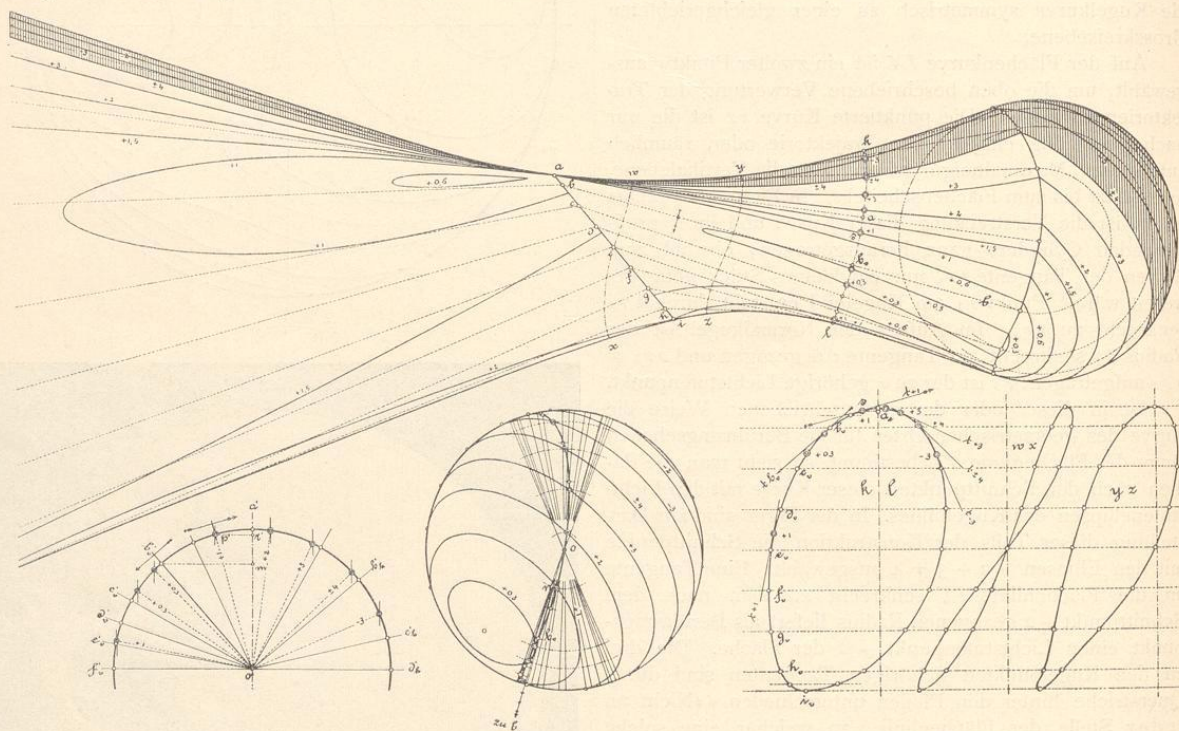
die Erzeugenden möglich, aber auch nur bei diesen Flächen.

Eine letzte Variante der beschriebenen allgemeinen Lösung erscheint, wenn die Trajektorien nicht nur als

Hilfsmittel zum Aufsuchen der geometrischen Orte für andere Schnittkurven dienen, sondern für sich selber, oder vielmehr für die Gefällskurven, deren Projektionen sie darstellen, die geometrischen Orte auf der Kugel bestimmen. Hierbei treten an die Stelle der ersten horizontalen Schnittebenengruppe der ursprünglichen Lösung die projizierenden Cylinder der Gefällskurven. Unter den vielen Formen, welche das Verfahren mit den geometrischen Orten annehmen kann, dürfte diese letzte oft die zweckmässigste sein, insbesondere bei Regelflächen mit einer Grundebene als Richtungsebene.

In Figur III d ist als Beispiel ein Kugelkonoid mit horizontalen Mantellinien gewählt; es ist nur als Grundriss dargestellt und in folgender Weise erzeugt. An der ge-

normal zur Mantellinie gerichtet ist, und der im Grundriss der Normalkugel (zweite Hilfsfigur unten) als Radius erscheint. Hieraus ergeben sich die zwei Strahlenbüschel, welche sämtliche Lichtstufenpunkte der Kugel, die denen der Fläche entsprechen, in sich schliessen müssen. Im Grundriss der Fläche ist die Trajektorie kl gezogen, welche alle von oben sichtbaren Mantellinien ganz oder annähernd rechtwinklig schneidet. Aus der Verstreckung ihrer zwischen den Mantellinien liegenden Stücke und aus der Höhenlage der Mantellinien ergab sich die in der dritten Hilfsfigur gezeichnete Linie als „abgewinkelte Gefällskurve $k'l'$ “ der Fläche (zwei weitere solche Kurven sind beigelegt). Im Schnittpunkt b_v dieser Kurve, der der Höhenlage der Mantellinie b_v entspricht, ist eine Tangente tb_v



Figur III d.

zeichneten Kugel einerseits und der geneigten Geraden ai andererseits gleitet eine horizontale Gerade; die höchstliegende Tangente der Kugel geht durch a , die tiefstliegende durch i ; von den sieben andern Punkten der Linie ai sind als Mantellinien der Fläche je zwei Tangenten an einen gleich hoch liegenden horizontalen Parallelkreis der Kugel gezogen. Die an der Vorderseite der Kugel berührende, durch b gezogene Mantellinie ist mit b_v bezeichnet. (Zwei weitere benützte Punkte der Linie ai sind nur in den Hilfsfiguren eingetragen.) Nur die von oben sichtbaren Mantellinien sind im Flächengrundriss gezeichnet und zwar punktiert, um sie von den Lichtstufenlinien zu unterscheiden.

Für jede horizontale Mantellinie liegen die Lichtstufenpunkte auf einem vertikalen Grosskreis, dessen Ebene

gezo gen und im Aufriss der Normalkugel (erste Hilfsfigur) ein Radius $o'b_v$ senkrecht zu dieser Tangente. Im Grundriss der Normalkugel ist auf dem zur Mantellinie b_v normalen Radius das Mass ob_v gleich dem im Aufriss erhaltenen Horizontalmass $m'b_v$ aufgetragen und dadurch der Punkt b_v des geometrischen Ortes auf der Normalkugel bestimmt, welcher der Flächenkurve kl entspricht. Die Figuren lassen auch die Bestimmung weiterer Punkte des geometrischen Ortes verfolgen.

Die für diesen erhaltene Kurve schneidet die Lichtstufenlinie $+1$ in einem Punkt n . Im Aufriss der Normalkugel ist Punkt p' bestimmt durch $r'p' = on$. An die Kurve kl ist eine Tangente $t+1$ normal zum Radius $o'p'$ gezogen; der Berührungspunkt s dieser Tangente ist der Lichtstufenpunkt $+1$ in der abgewinkelten Gefällskurve.

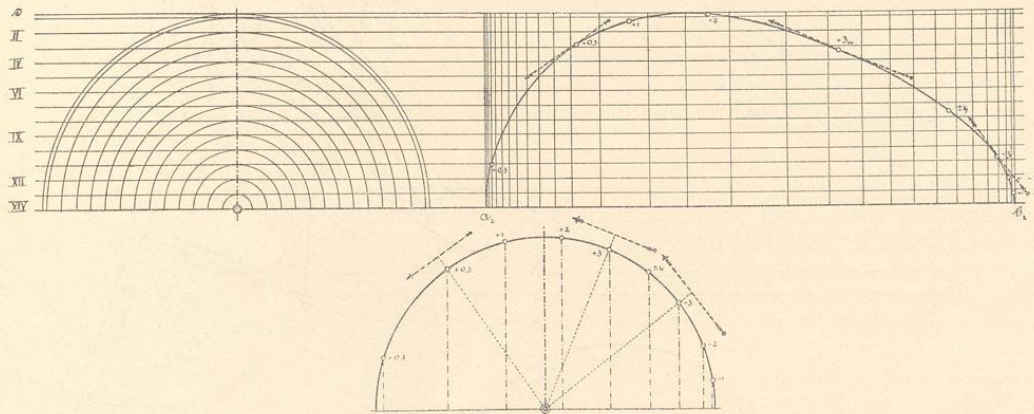
Er wird in den Grundriss der Fläche übertragen, indem dort das Bogenmass $s a$ gleich dem Horizontalmass $s a_e$ in der Abwicklung gemacht wird.

119. Lichtstufen auf beliebig gekrümmten Flächen, zweites Verfahren: mit berührenden Cylinderflächen. Gebilde durch Höhenkurven gegeben.

Ein zweites allgemeines Verfahren zum Bestimmen der Lichtstufenlinien auf gekrümmten Flächen ist das folgende. Man zeichnet wie beim ersten Verfahren die Schnittkurven beliebiger Horizontalebene mit der Fläche. Im allgemeinen wird man die Abstände der Horizontalschnitte gleich gross anzunehmen suchen, in welchem Fall sie nach dem Vorgang der topographischen Flächendarstellung als „Höhenkurven“ bezeichnet werden können. Zieht man an die im Grundriss gezeichneten Horizontalschnittkurven parallele Tangenten einer beliebigen Rich-

kurvensystem nur einmal zeichnen und jede Tangenten-Gruppe samt der zugehörigen Berührungskurve auf einem eigenen Blatt durchsichtigen Papiers davon abnehmen, wobei die Horizontalkurven auf dem Pausblatt und die Berührungskurven auf dem Horizontalkurvenblatt wegbleiben. Wenn später auf dem Pausblatt die Lichtstufpunkte der Berührungskurve konstruiert sind, werden sie auf das Reinblatt für die zu schattierende Flächendarstellung durchgestochen, wobei für die richtige Lage des Pausblattes Merkmale vorgesehen sein müssen. Die Benützung des Papierstreifens zum Auftragen geradliniger Punktreihen ist auch hier ein schätzbares Förderungsmittel.

Dieses zweite allgemeine Verfahren, das als dasjenige „mit berührenden Cylinderflächen“ bezeichnet werden kann, wird meist erheblich rascher zum Ziel führen, als das erste. Nur werden die Berührungskurven, die alle durch den höchsten Flächenpunkt laufen, sich in dessen Nähe häufen und anderwärts grössere leere Flächen



Figur 112 a.

tung und verbindet deren Berührungspunkte durch eine stetige Kurve, so bilden die Tangenten die Mantellinien einer horizontalen Cylinderfläche, welche die gegebene Fläche nach dieser Kurve berührt. Wo die ganzzahligen Lichtstufpunkte dieser Kurve liegen als auf einer Linie in der Cylinderfläche, da liegen sie auch für die gegebene Fläche. Der Normalschnitt der Cylinderfläche ist leicht getrennt herauszuzeichnen, da die Mantellinien nach Grundriss und Höhenlage bekannt sind. Die Bestimmung der Lichtstufenlinien auf der Cylinderfläche ist in Art. 99 gezeigt. Wo eine ganzzahlige Lichtstufenmantellinie, z. B. + 3, jene Berührungskurve schneidet, da ist ein Lichtstufpunkt + 3 auf der gegebenen Fläche. Weitere Richtungen der horizontalen Tangentengruppen geben weitere Berührungslinien und auf diesen weitere ganzzahlige Lichtstufpunkte.

Da es schwierig oder unmöglich ist, auf derselben Figur über ein System von vielen Horizontalkurven weg, die sich ja zuweilen auch überschneiden können, viele Paralleltangentengruppen verschiedener Richtung zu legen und getrennt aufzufassen, so wird man das Horizontal-

zwischen sich übrig lassen. In solche leere Stellen wird man kleinere Gruppen von Paralleltangenten einschalten, welche nur kurze Stücke von Berührungskurven liefern; auch kann wohl oft ein Hereinziehen des ersten Verfahrens für bestimmte Teile der Horizontalkurvengruppe zweckmässig sein.

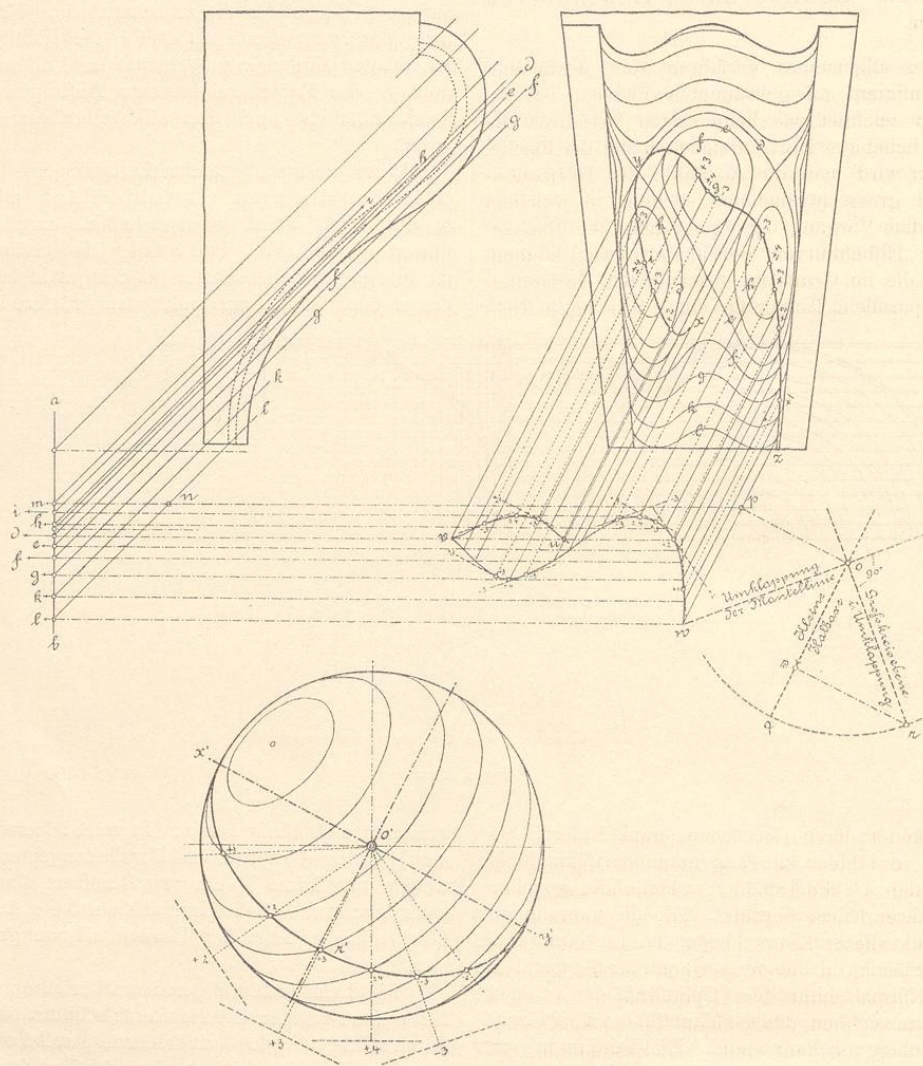
Wie beim ersten allgemeinen Verfahren, so sind auch bei diesem zweiten die Horizontalschnitte oft zu ersetzen durch solche, die der Vertikalebene parallel oder senkrecht zum Grundschnitt gerichtet oder schiefgerichtet, wenn auch senkrecht zu einer Grundebene sind.

Zur Darstellung der Konstruktion ist als erstes Beispiel die in Figur 111a gezeichnete exzentrische Wulstfläche mit denselben früher beschriebenen zur Vertikalebene parallelen Schnittebenen wiedergewählt. Mit einer beliebigen Richtung sind parallele Tangenten an die Schnittkurven gelegt und deren Berührungspunkte stetig verbunden worden; hiedurch ist die Kurve $x_2 s z_2$ entstanden, nach welcher die mit den Tangenten vorgestellte Cylinderfläche die Wulstfläche berührt. $a_2 b_2$ ist ein Normalschnitt der Cylinderfläche; durch Auftragen der

Abscissen und Ordinaten (Figur 112a rechts) ist die Normalschnittkurve selbst erhalten. Der Normalkugelaufschnitt (Figur 111a links) ist mit der Grosskreisebene $a_k b_k$ parallel zu $a_2 b_2$ geschnitten und der Schnittkreis samt seinen Lichtstufenpunkten in Figur 112a unten gezeichnet. Am Cylindernormalschnitt ist eine Tangente senkrecht zu dem Radius $o + 3$ gezogen und der Berührungspunkt $+ 3 n$

stufenpunkte können aus derselben Normalschnittkurve in Figur 112a abgeleitet werden. Einige weitere Tangentenrichtungen haben in Verbindung mit den in Art. 113b besprochenen Hauptlinien genügend viele weitere Lichtstufenpunkte der Fläche geliefert.

Für eine schräge Richtung der Schnittebenen ist die in Figur 73 dargestellte Röhrenfläche mit veränderlicher

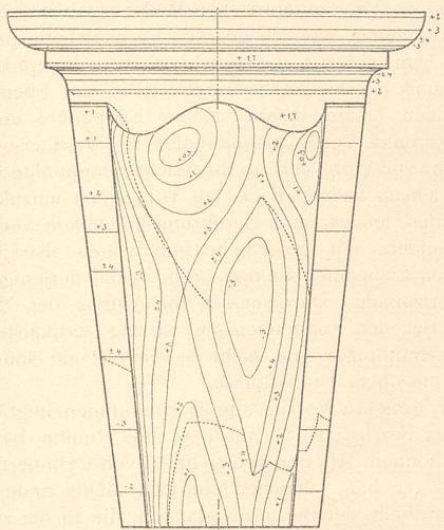


Figur 112b.

dieser Tangente auf die Linie $a_2 b_2$ nach $+ 3$ zurückgetragen. Der Schnitt der durch diesen Punkt $+ 3$ gezogenen Cylindermantellinie mit der Kurve $x_2 s_2 z_2$ liefert einen Lichtstufenpunkt $+ 3$ auf der Fläche. Die Figuren lassen auch die Bestimmung der andern ganzzahligen Lichtstufenpunkte der Berührungskurve $x_2 s_2 z_2$ verfolgen. Im Aufriss der Fläche ist noch eine zweite kongruente Berührungskurve, welche sich für eine symmetrische Tangentenrichtung ergeben würde, punktiert eingezeichnet; ihre Licht-

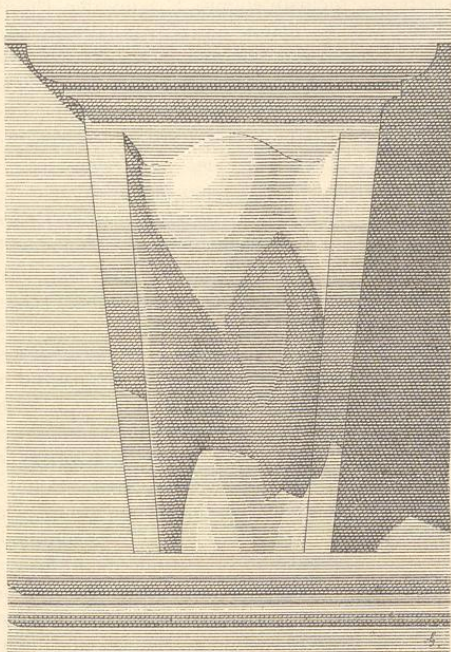
Erzeugenden, als Volutenkonsole mit Leitlinie parallel zur Seitenebene gedacht, ein interessantes Beispiel. Die in dieser Figur gezeichneten Schnittkurven der Fläche mit Lichtstrahlenebenen, die senkrecht zur Seitenebene stehen, können auch zur Bestimmung der Lichtstufenlinien verwendet werden. Zieht man (Figur 112b) mit einer beliebigen Richtung an diese Kurven parallele Tangenten, verbindet deren Berührungspunkte durch eine stetige Kurve xyz und betrachtet die in der Seitenprojektion gezogenen

Lichtstrahlen als die auch zu diesen Tangenten gehörigen Seitenprojektionen, so bilden die Tangenten eine Cylinderfläche, deren Spur oder Basis in der Vertikalebene oder



Figur 112 c.

einer beliebigen zu dieser parallelen Ebene ab durch Aufsuchen der Spuren ihrer Mantellinien bestimmt werden



Figur 112 d.

kann, und für welche jene Kurve xyz die Berührungslinie mit der Röhrenfläche darstellt. Wo auf dieser Linie die ganzzahligen Lichtstufenpunkte für die Cylinderfläche liegen, da liegen sie auch für die Röhrenfläche. Auf der Cylinderfläche sind die Lichtstufenlinien nach Art. 100

erhältlich; was dort für die horizontale Basis erklärt wurde, ist auf die in der Vertikalebene liegende leicht übertragbar. Durch weitere Gruppen paralleler Tangenten an dem schon früher für die Schlagschattenkonstruktion erhaltenen Schnitkurvensystem lassen sich genügend viele weitere Lichtstufenpunkte erhalten.

Figur 112 b macht ausser den Mantellinien der Berührungscylinderfläche die Konstruktion ihrer Basislinie oder Spur uvw auf einer zur Vertikalebene parallelen Ebene ab anschaulich. In etwas veränderter Ausführung der in Art. 100 erklärten Konstruktion ist die vertikalprojizierende Ebene der Cylindermantellinie $w\phi$ in die Vertikalebene umgeklappt, indem $\phi o = mn$ aufgetragen ist. wo ist die Umklappung der Mantellinie; die Ebene des Normalkugelgrosskreises, auf welchem die Lichtstufenpunkte der Cylinderfläche zu suchen sind, steht senkrecht zu der Mantellinie und projiziert sich auf die umzuklappende Ebene als eine Gerade or senkrecht zu wo . Ist or gleich dem Normalkugelradius, so ist os (die rechtwinklige Projektion von or auf og parallel $w\phi$) die kleine Halbachse der Ellipse, als welche sich jener Grosskreis im Aufriss der Normalkugel darstellt. Ihre grosse Achse $x'y'$, als der zur Vertikalebene parallele Durchmesser des Grosskreises, ist senkrecht zur Aufrissrichtung $w\phi$ der Mantellinien.

Durch die Schnittpunkte der Berührungselipse mit den Lichtstufenellipsen $+2 + 3 + 4$ und -3 sind die Radien, dann an die Basiskurve uvw Tangenten senkrecht zu diesen Radien gezogen. Die Berührungspunkte dieser letzten waren zu benützen wie beim ersten Beispiel, wofür die Mantellinien zu den Lichtstufenpunkten auf der Kurve xyz punktiert eingezeichnet sind.

Bemerkungen zu den besonderen und allge-113. meinen Verfahren.

Die beiden beschriebenen Konstruktionen für Lichtstufenlinien auf beliebig gekrümmten Flächen geben in ihrem Verhältnis zu den früheren Lösungen und für sich allein betrachtet noch zu folgenden Bemerkungen Anlass.

a) Die früher erklärten Lichtstufenbestimmungen für gerade Kreiskegel und Cylinderflächen, Drehungsflächen u. s. f. erweisen sich, wie zu vermuten war, als vereinfachte besondere Fälle des erstbeschriebenen allgemeinen Verfahrens, wenn dieses noch in einigen Richtungen erweitert gedacht wird. (Dabei ist nur abzusehen vom dreiaxigen Ellipsoid, elliptischen Hyperboloid und rechtwinkligen Konoid, die auf dem Umweg über eine Drehungsfläche beziehungsweise Wendelfläche zu ihren Lichtstufen gelangt sind.) Die Vereinfachung liegt zum grössten Teil in der Gestalt des geometrischen Ortes, der fast immer ein Kugelkreis war und zugleich den Kugelkreis der allgemeinen Lösung ersetzte, also zwei Kurven derselben zugleich vertrat; zum andern Teil findet sie sich darin, dass von den Punkten des geometrischen Ortes meist nur ein einziger zu suchen war und dieser sich leichter ergab, als im allgemeinen Fall; zu einem dritten Teil erscheint sie in einem vereinfachten Ziehen der parallelen Tangenten.

Für alle Horizontalschnitte des geraden vertikalen Kreiskegels und Cylinders war derselbe horizontale Kugelkreis der geometrische Ort, so dass nur ein solcher Schnitt nötig war; für die Drehungsflächen erschienen verschiedene Parallelkreise für verschiedene Parallelschnitte der Fläche; in beiden Fällen ersetzen sich die parallelen Tangenten der allgemeinen Lösung durch parallele Radien oder durch die Proportionalteilungen der geradlinigen Parallelkreisprojektionen, in denen ja doch immer das Gleichgerichtetsein der Tangenten vorgestellt wird. Bei schiefgerichteten geraden Kreiskegel- und Drehungsflächen liegt dieselbe Vereinfachung derjenigen Gestalt der allgemeinen Lösung vor, bei welcher schon die erste Schnittebenengruppe schiefgerichtet ist.

Für die schiefen Cylinderflächen beliebigen Normalschnitts gilt dasselbe, wogegen schon die Kegelfläche mit beliebiger Basis die allgemeine Lösung nur mit ganz unwesentlicher Vereinfachung erfordert, indem nur die Mantellinien an die Stelle der geneigten Kurventangenten der allgemeinen Lösung treten.

Die Röhrenflächen beider Arten bringen zwar wieder sehr einfache geometrische Orte auf der Kugel mit sich, erfordern jedoch andererseits eine erweiterte Auffassung der allgemeinen Lösung, indem hier schon für die erste Schnittebenengruppe das Gleichgerichtetsein aufgegeben ist.

Bei den Rückungsflächen erscheinen wieder die Parallelschnitte der allgemeinen Lösung. Ist die Erzeugende unveränderlich, so sind die geometrischen Orte auf der Kugel Grosskreise verschiedener Richtung und die Lösung gestaltet sich einfach. Bei veränderlichen und drehenden Erzeugenden fallen die Vereinfachungen weg und die allgemeine Lösung tritt ganz oder nahezu unverändert auf.

Bei den Schraubenflächen sind die parallelen Schnittebenen durch konzentrische Schnittcylinder ersetzt, weil hiedurch abermals ein einfacher geometrischer Kugelort erzielt wird; bei diesen Flächen ist also die allgemeine Lösung abermals in einer früher nicht ausgesprochenen Richtung erweitert aufzufassen. Das Gleichgerichtetsein der Horizontaltangenten ist hier zwar vorhanden, aber nicht unmittelbar herbeigeführt, sondern auf dem Umweg einer Verdrehung um den Winkel zwischen Gefällsline und Radius erzielt, so dass diese Lösung eine eigenartige Verbindung von Erweiterung und Vereinfachung des allgemeinen Verfahrens darstellt.

b) Auf den meisten gegebenen Flächen werden sich bestimmte Hauptlinien finden, für welche sich die Lichtstufenpunkte einfacher und mit grösserer Sicherheit bestimmen lassen, als nach den allgemeinen oder sonst anzuwendenden Verfahren. Schon bei der schraubenförmigen Wulstfläche war diese Tatsache festzustellen; ihre Lichtstufenpunkte auf der äussersten und innersten Schraubenlinie ergeben sich durch Betrachtung der zwei berührenden Vertikalzylinder unabhängig von der Konstruktion mit den Umhüllungskugeln. Auf demselben Weg können auf dem dreiachsigen Ellipsoid und elliptischen Hyperboloid die Lichtstufenpunkte auf denjenigen drei Schnittkurven, deren Ebenen je durch zwei Achsen gelegt

sind, unabhängig von der früher erklärten Konstruktion und mit grösserer Sicherheit erhalten werden.

Bei dem für die allgemeinen Lösungen als erstes Beispiel gewählten exzentrischen Wulst ergeben sich leicht vier Hauptlinien, nämlich der zur Vertikalebene parallele äussere Umrisskreis b , der gleichgerichtete innere Umrisskreis c und die beiden Schnittkreise in der Ebene sbc . Die beiden ersten liefern sichere Endpunkte und Berührungspunkte der Lichtstufenlinien da, wo Kreiscylinder senkrecht zur Vertikalebene ihre Lichtstufenpunkte hätten, nur sind beim kleinen Kreis die Vorzeichen umzukehren. Die beiden letzten sind Berührungslinien von vertikalen Kreiscylindern mit der Fläche und zeigen also je eine Reihe von Lichtstufenpunkten proportional derjenigen auf dem horizontalen Durchmesser im Aufriss der Normalkugel. Bei der Volutenkonsole ist die vertikalstehende Achsenschnittkurve eine leicht zu verwertende Hauptlinie, ebenso die obere Umrisskurve.

Der grössere Vorzug dieser Hauptlinien liegt in der grösseren Sicherheit, mit der ihre Punkte bestimmt werden können. Als Berührungslinien von Cylinderflächen mit den gegebenen Flächen sind sie nichts anderes als besondere Fälle der Berührungskurven, die in der zweiten allgemeinen Lösung auftreten. Es ist einleuchtend, dass für alle Umrisse, welche durch Auswölbung gebildet sind, dasselbe gilt, wie für den exzentrischen Wulst; die Tangente im Endpunkt und Berührungspunkt einer beliebigen Lichtstufenlinie + 3 an der Umrisslinie irgend einer solchen Fläche muss parallel sein der Tangente am gleichnamigen Punkt + 3 am Umriss der Normalkugel. Dies gilt ausdrücklich auch dann, wenn die Umrisskurve im Raum, das heisst die Berührungslinie des von den Projektionsloten gebildeten Cylinders mit der Fläche, eine schiefliegende oder gewundene ist. Diese Tatsache ist als für die meisten Flächen sehr wichtig hervorzuheben. Unter anderem können die Endpunkte der Lichtstufenlinien am Umriss des gewundenen Säulenschaftes (Figur 109a) in dieser Weise genau bestimmt werden, ebenso im Aufriss der Wulströhre Figur 107c, endlich in den Figuren 106b und 111d.

c) Auf den meisten gegebenen Flächen werden sich gleich anfangs durch Ueberlegung oder Konstruktion bestimmte Linien feststellen lassen, welche von ganzzahligen Lichtstufenlinien nicht berührt oder durchschnitten werden können. Solche Scheidelinien der Lichtstufengruppe, welche einen Einblick in deren Verlauf frühzeitig eröffnen, haben sich schon bei den Drehungsflächen in Art. 94, Satz c) und Art. 95, Satz d) als nur gedachte Parallelkreise und zugleich Lichtstufenlinien + 1,7 oder - 1,7 gefunden. Bei dem rechtwinkligen Konoid in Art. 110 und Figur 77a und b sind die zwei horizontalen Fusslinien und die Scheitellinie solche Scheidelinien, und zwar geradlinige, während die übrigen Lichtstufenlinien gekrümmte sind, ebenso beim Kugelkonoid in Art. 111 die oberste und unterste Erzeugende.

Für beide allgemeine Verfahren ist als wichtige Tatsache hervorzuheben, dass jede Schnittkurve der ersten oder zweiten Gruppe, oder jede einer Trajektorie entsprechende Flächenkurve, oder endlich jede Berührungs-

linie einer Cylinderfläche eine solche Scheidelinie für alle diejenigen Lichtstufenlinien wird, deren Punkte nicht auf ihr vertreten sind. Diese Linien können sie nicht berühren oder durchschneiden. Wenn auch auf einer solchen Kurve gar kein Lichtstufenpunkt gefunden wird, so ist sie doch nicht fruchtlos ausgewählt und behandelt, sondern als eine solche Scheidelinie für den Verlauf der gesuchten Linien verwertbar.

d) Auf vielen Flächen finden sich Lichtstufenlinien mit Kreuzungspunkten zwischen vier Gruppen umkehrender Kurven; doch ist es ein seltener Zufall, wenn eine ganzzahlige Lichtstufenlinie sich selber schneidet. Schon beim ringförmig steigenden Gewölbe in Figur 106b und bei der schraubenförmigen Wulstfläche oder Röhre in Figur 107b sind solche Kreuzungen festgestellt und erörtert worden; während dort die Kurven unganzzahlige waren, ist bei der Volutenkonsolle in Figur 112c zufällig die Kurve + 3 eine Kreuzungskurve geworden. Wie sie als Kurve etwa + 3,5 bei dem exzentrischen Wulst zu vermuten sein dürfte, ist in Figur 111b punktiert eingezeichnet. Die scharfe Bestimmung ihrer Lage und Benennungszahl wäre aber bei diesem Beispiel minder einfach als bei den früheren und wohl nur durch Versuche möglich. Die gewundene Säule, Figur 109a, hat eine Kreuzungskurve zwischen + 2 und + 3.

e) Die zweite allgemeine Lösung in Art. 112 kann durch die Verwertung einer etwa vorhandenen Symmetrie der Fläche ebensowohl Arbeit ersparen wie die erste durch Benützung der Symmetrie der Kurven der geometrischen Orte auf der Kugel. Zu jeder Richtung der Tangenten bei beiden Beispielen in Art. 112 giebt es eine symmetrische, welche beim exzentrischen Wulst eine kongruente Normalschnittlinie bei veränderter Richtung der Normalschnittebene und bei der Volutenkonsolle eine symmetrische Spurlinie der Cylinderfläche ergibt.

f) Bei beiden allgemeinen Verfahren sind oft Tangenten in gegebenen Punkten an Kurven mit unbekanntem Gesetz zu ziehen und Berührungspunkte von Tangenten gegebener Richtung an solchen Kurven zu bestimmen. Dies muss meist nach Schätzung geschehen, wodurch eine kleinere oder grössere Unsicherheit über das Resultat der Konstruktion des Einzelpunktes unvermeidlich hereinkommt. (Um so wichtiger sind die oben unter b) genannten sicheren Punkte der Hauptlinien.) Man darf sich hienach durch einander mässig widersprechende Punktbestimmungen nicht beirren lassen. Im allgemeinen korrigieren sich die zu einer Kurve gehörigen Punkte gegenseitig, wenn genügend viele bestimmt werden, und gestatten, den Verlauf der Linie genügend richtig festzusetzen.

g) Häufig werden die ausgewählten Schnittkurven oder Berührungslinien der Cylinderflächen punktleere Räume zwischen sich übrig lassen, welche an wichtigen Stellen Unsicherheit über den Verlauf der Lichtstufenlinien mit sich bringen. In diesen Fällen, ebenso wo die gefundenen ganzzahligen Punkte stärkere Widersprüche aufweisen, wird man zu Versuchen greifen und sich für einen auf einer Kurve zu vermutenden Punkt die Frage stellen: „Welche Lichtstufe hat dieser Punkt?“ Diese

Frage ist mit Hilfe einer eingeschätzten Tangente an der Horizontalkurve und eines Trajektorienbruchstücks zu beantworten. Man erfährt hiedurch, ob der Punkt wirklich auf der Kurve liegt oder ob sie mehr oder weniger weit rechts oder links an ihm vorbeigehen muss. Besonders für tiefste und höchste Punkte, äusserste Punkte nach irgend einer Richtung, Wendepunkte und vermutete Ein- oder Ausbiegungen werden solche Stichproben oft zweckmässig sein.

h) Ist ein Gebilde durch Höhenkurven gegeben, so ist das zweite allgemeine Verfahren unmittelbar darauf verwendbar. Dies trifft für die Darstellung der Bodengestaltung durch Höhenkurven in topographischen Karten u. s. w. zu. Zu einem Versuch der Verwertung der beschriebenen, wenigstens verhältnismässig einfachen Lichtstufenbestimmung für die Schattierung von Reliefkarten in grösserem Massstab mag hiemit die Anregung gegeben sein. Die Vertikalbeleuchtung giebt leider keine Anschauung der Bodengestaltung; eine solche ist nur mit schräger Beleuchtung erhältlich, wie sie in der Dufourkarte und im topographischen Atlas der Schweiz gewählt ist. In so kleinem Massstab (1 : 100 000 beziehungsweise 1 : 50 000) liessen sich freilich die Abstufungen noch nicht wohl durchführen; auch wären hier die Schlagschatten, welche bei der eingebürgerten Lichtrichtung in Gebirgsdarstellungen auftreten würden, der Deutlichkeit noch nicht förderlich. Wohl aber wäre dies bei grösserem Massstab, von etwa 1 : 25 000 an, der Fall; es würde wohl damit insbesondere das anschauliche Hervortreten hoher Spitzen gewonnen werden, das bisher auch der Darstellung mit einseitiger Beleuchtung unerreichbar war.

Bei Darstellungen aus dem Hügelland und der wenig gegliederten Ebene würde eine flachere Lichtrichtung, etwa 36° , beziehungsweise 30° oder 25° zu wählen sein, doch nur soweit, dass Schlagschatten nur ausnahmsweise und in kleinen Flächen auftreten würden.

Der Arbeitsaufwand, den die Bestimmung der Lichtstufenlinien auf beliebig gekrümmten Flächen nach den beiden beschriebenen Verfahren erfordert, ist ein sehr grosser und zwar auch dann, wenn die Ableitung der Horizontalkurven oder anderen Parallelschnittkurven aus dem Gesetz der gegebenen Fläche sich einfach gestaltet. Ausserdem ist einzuräumen, dass die Technik nur selten Flächen verwendet, welche sich nicht mit den früher erklärten einfacheren Lösungen bewältigen lassen, und dass sie noch viel seltener solche anderen Flächen eingehend schattiert, so dass eine auch nur einigermaßen ausgedehnte praktische Verwertung der beiden allgemeinen Verfahren, abgesehen etwa von der angedeuteten topographischen Schattierung und der anschaulichen Darstellung mathematischer Flächen für Unterrichtszwecke, kaum je zu erwarten sein wird. Andererseits aber ist vom Standpunkt der Theorie aus festzustellen, dass die Lösungen bei allen denkbaren Flächen durchgeführt werden können und damit das Problem der Beleuchtungskunde in seinem ganzen Umfang gelöst ist.