



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

Art. 17. Schlagschatten einer geraden oder gekrümmten Linie auf einem
Vielflach. Schlagschattenpunkte einer Linie auf einer andern

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

halb der Figur fällt, dass aber doch die Vertikalebene des durch den Punkt gezogenen Lichtstrahls die Kanten der Figur unmittelbar schneidet, so dass die Lösung völlig dieselbe bleibt, wie im ersten Fall (Schattenpunkt r'' mit Grundriss in r''), und nur $x' y'$ zu verlängern ist.

Ein dritter Fall erscheint, wenn nicht nur der Schatten des Punktes cc' ausserhalb der Figur fällt, sondern auch die Vertikalebene des durch den Punkt gezogenen Lichtstrahls die Seiten der Figur nicht mehr unmittelbar schneidet. Man muss dann geeignete Seiten oder Diagonalen der Figur verlängern, bis zwei Schnitte mit der Horizontalprojektion des Lichtstrahls erhalten werden (in z und u). Diese Schnittpunkte lotet man wieder hinauf nach z' und u' , zieht $z' u'$ und erhält als Schnitt dieser Linie mit dem Aufriss des Lichtstrahls den Schattenpunkt r'' im Aufriss. Das Hinunterloten auf den Grundriss des Lichtstrahls giebt den Schattenpunkt im Grundriss r'' .

Ungenauere spitzwinklige Durchschnitte zwischen den Seiten der Figur und dem Grundriss des Lichtstrahls oder den Projektionsloten können immer durch bessere Durchschnitte ersetzt werden, indem man bestimmte andere Seiten der Figur verlängert oder bestimmte Diagonalen zieht. Auch die Unsicherheit, welche durch zu geringe Länge der Strecken xy oder zu hereinkommt, lässt sich auf diesem Weg umgehen.

Beim Aufzeichnen der Projektionen des Vielecks ist zu beachten, dass beliebig angenommene n Eckpunkte nur dann eine ebene Figur bilden, wenn die in Art. 8e genannte Bedingung erfüllt ist.

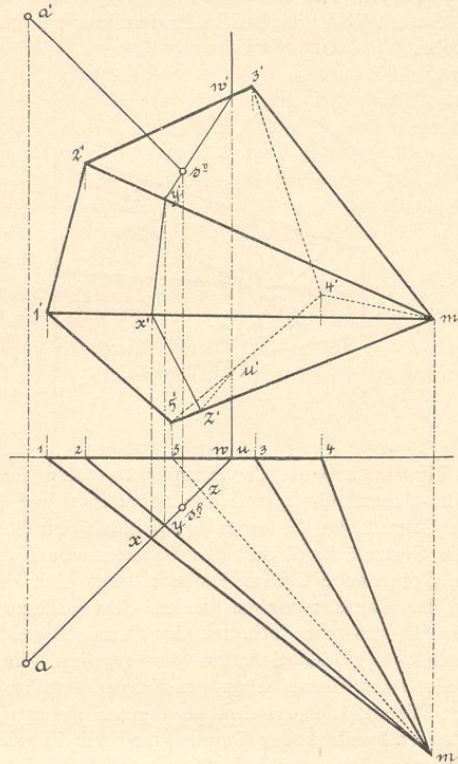
Ist der Schlagschatten eines Punktes auf einer ebenen Figur mit gekrümmter Umrisslinie zu bestimmen, so wählt man auf dieser Linie einige Punkte als Eckpunkte eines Vielecks und konstruiert den Schlagschattenpunkt auf diesem in der zuvor beschriebenen Weise.

16. Schlagschatten eines Punktes auf einem Vielflach.

Auf Grund der vorggeführten Konstruktion ist folgendes Problem lösbar: „Den Schatten eines Punktes auf einem Polyeder zu suchen.“ Man hat die Konstruktion nur auf die einzelne Grenzebene des Körpers anzuwenden.

Nicht immer, wenn der Schatten eines Punktes auf einem Polyeder zu suchen ist, weiss man nun aber zum voraus, auf welche der ebenen Grenzflächen des Körpers der Schatten fällt. Es ist daher meist notwendig, die Schnittlinie der lotrechten Lichtstrahlenebene nicht nur mit einer Körperfläche zu suchen, sondern mit mehreren, ja oft mit allen, die von ihr geschnitten werden, so dass eine gebrochene Schnittlinie, ein „Schnittpolygon“, an die Stelle der früheren geraden Schnittlinie tritt. Die Horizontalprojektionen der Eckpunkte der gebrochenen Schnittlinie sind sämtlich im Grundriss des Lichtstrahls und des Polyeders schon vorhanden und dürfen nur auf die Kanten der Vertikalprojektion des Körpers hinaufprojiziert werden. Wo der Lichtstrahl die gebrochene Schnittlinie schneidet, da ist der Schatten des Punktes auf dem Polyeder.

Es sei z. B. in Figur 16 der Schlagschatten des Punktes aa' auf der fünfseitigen Pyramide mit Basis in der Vertikalebene zu suchen. Nachdem die Lichtstrahl-



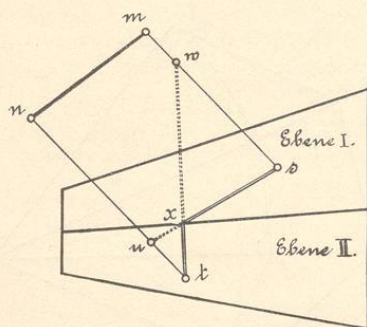
Figur 16.

projektionen gezogen sind, lotet man aus dem Grundriss die Schnittpunkte $uzxyw$ hinauf nach $u'z'x'y'w'$ und erhält hiedurch im Aufriss die gebrochene Schnittlinie $u'z'x'y'w'$. Sie wird vom Aufriss des Lichtstrahls im Punkt s'' getroffen; dieser ist Schlagschattenpunkt im Aufriss; sein Hinunterloten auf den Lichtstrahlgrundriss nach s^h giebt den Schlagschattenpunkt im Grundriss.

Schlagschatten einer geraden oder gekrümmten Linie auf einem Vielflach. Schlagschattenpunkte einer Linie auf einer andern.

Der nächste Schritt wird zu folgendem Problem führen: Den Schatten einer begrenzten geraden Linie auf einem Polyeder zu suchen. Man hat dabei zunächst zu suchen die Schatten der beiden Endpunkte der Geraden. Gewöhnlich werden sie auf zwei verschiedene, aber benachbarte Flächen des Körpers fallen, und man weiss dann zunächst über die Richtung der gebrochenen Schattenlinie nichts, wenn man auch die beiden Endpunkte derselben hat. Es ist daher notwendig, wenigstens für einen Endpunkt den Schatten auch auf der Erweiterung derjenigen Grenzebene zu bestimmen, die der andere Punkt beschattet. Um den Schatten eines

Punktes auf der Erweiterung einer Grenzebene zu erhalten, darf man nur die auf dieser befindliche Strecke der gebrochenen Schnittlinie bis zum Schnitt mit der Vertikalprojektion des Lichtstrahls verlängern. Verfährt man in dieser Weise für beide Endpunkte, so hat man eine Probe.



Figur 17 a.

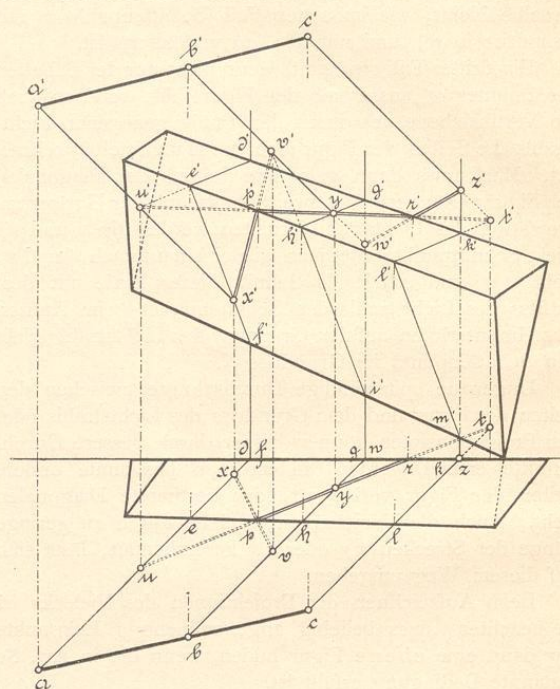
In Figur 17a werfe der Endpunkt m den Schatten s auf die Grenzfläche I und den Schatten w auf die erweiterte Grenzfläche II, ferner Endpunkt n den Schatten t auf die Grenzfläche II und den Schatten u auf die erweiterte Grenzfläche I. Zur Probe müssen sich su und tw auf der Kante zwischen beiden Grenzflächen in x schneiden; sxt ist der Schatten der Geraden mn .

Verteilt sich der Schatten der geraden Linie auf mehr als zwei Grenzflächen des Körpers, so ist jede getroffene Grenzfläche erweitert zu denken und der Schatten jedes Endpunktes der Geraden auf der Erweiterung zu bestimmen. Die graphische Konstruktion ist dabei zunächst dieselbe wie bei den vorhergehenden Problemen; man bestimmt zuerst die gebrochenen Schnittlinien der beiden lotrechten Lichtstrahlenebenen mit dem Körper und verlängert jede Strecke der Schnittlinien, die auf einer beschatteten Grenzfläche liegt, bis zum Schnitt mit beiden Lichtstrahlprojektionen.

Oft fällt ein Teil des Schattens der Geraden auf die Grundebenen, der andere auf den Polyeder; doch macht dies für die Lösung der Aufgabe keinen wesentlichen Unterschied, sondern man behandelt die Grundebene, als ob sie eine Grenzfläche des Polyeders wäre. Zur vollständigen Lösung gehört das Hinunterloten der Schattenpunkte und das Ziehen der Schattenlinien in der Horizontalprojektion.

Beispiel. Die gerade Linie abc in Figur 17b werfe ihren Schatten teils auf das schräge Prisma, teils auf die Vertikalebene. Die gebrochenen Schnittlinien der drei durch die Punkte abc gehenden vertikalen Lichtstrahlenebenen, erhalten wie zuvor in Art. 16, seien $d'e'f'$, $g'h'i'$, $k'l'm'$. Unmittelbar werden als Schnitte dieser Linien mit den drei Lichtstrahlen erhalten die Schattenpunkte $x'y'z'$. Durch Verlängerung von $d'e'$ wird erhalten u' als Schatten von a' auf der erweiterten oberen Grenzfläche; durch Verlängerung von $i'h'$ wird erhalten v' als Schatten von b' auf der erweiterten unteren Grenzfläche; durch Verlängerung von $l'k'$ wird erhalten t' als Schatten

von c' auf der erweiterten oberen Grenzfläche, und durch Ziehen von $g'i'$ wird erhalten w' als Schatten von b' auf der Vertikalebene. Nun sind zu ziehen die Linien $x'v'$



Figur 17 b.

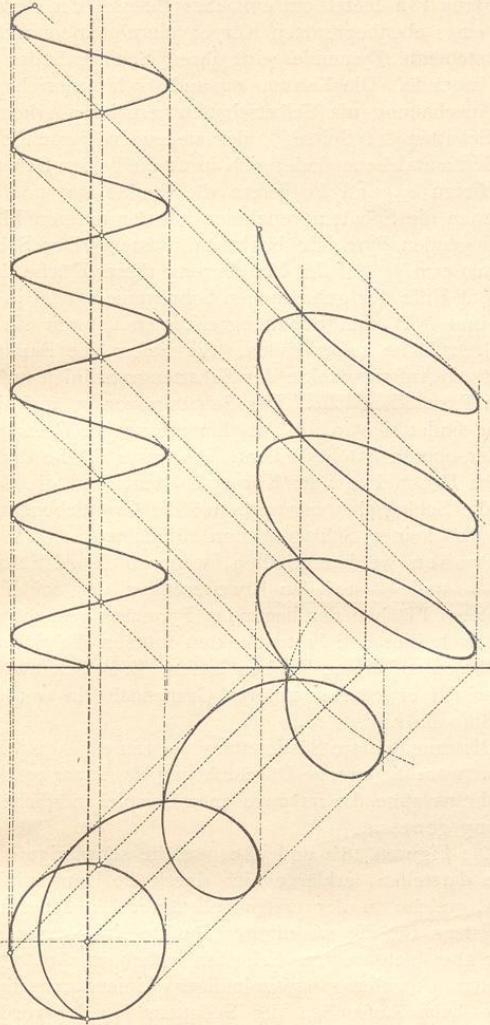
$u'y't'w'z'$; zur Probe muss $u'y't'$ eine Gerade werden und die Schnittpunkte der drei Linien p' und r' müssen auf die Kanten fallen. Die gebrochene Linie $x'p'y'r'z'$ ist der Schlagschatten von $a'b'c'$. Durch Hinunterloten ihrer Punkte auf die Lichtstrahlprojektionen und Kanten in den Grundriss findet sich in diesem die Schattenlinie $xpyrz$.

Ein zweites, mittelbar bestimmendes Verfahren ist das Aufsuchen des Schlagschattens der Geraden und der Schlagschatten der Kanten des Vielfachs auf einer Grundebene. Wo der Schlagschatten der Geraden den Schlagschatten einer Kante schneidet, da ist der Schlagschatten desjenigen Punktes, in welchem die auf dem Vielfach zu suchende Schlagschattenlinie über die Kante weggeht; ein rückwärts durch den Schattenpunkt auf der Grundebene gezogener Lichtstrahl führt also zu dem Schattenpunkt auf der Kante. Hat man auf allen beschatteten Kanten solche Punkte bestimmt, so führt deren geradlinige, in richtiger Reihenfolge vollzogene Verbindung ebenfalls zu der gesuchten gebrochenen Schlagschattenlinie. Dieses Verfahren kann zuweilen rascher zum Ziel führen als das erstbeschriebene; auch bei dem zuvor betrachteten Beispiel würde dies zutreffen.

Der Schlagschatten einer gekrümmten Linie auf einem Vielfach findet sich dadurch, dass man die Schatten einer genügenden Zahl von Punkten der Linie auf dem Vielfach aufsucht und stetig verbindet. Zur schärferen Bestimmung des Verlaufs der gebrochenen Schattenkurve,

insbesondere der Eckpunkte, die sie auf den Kanten des Körpers bildet, ist es zu empfehlen, für jedes Schattenkurvenstück auch noch ein Stück weit die beiden Verlängerungen auf der Erweiterung der beschatteten Grenzebene aufzusuchen.

Wenn etwa nur die Schlagschattenpunkte auf den Kanten des Vielfachs verlangt sind, so lassen sich diese Punkte rascher dadurch erhalten, dass man die Schlag-



Figur 17c.

schatten der Kanten des Vielfachs und diejenigen der Kurve auf einer Grundebene aufsucht. Der Schnittpunkt der hiedurch erhaltenen Schattenkurve mit dem Schatten einer Kante ist der Schatten desjenigen Punktes der Kante, auf welchen die gegebene Kurve ihren Schatten wirft.

Eine in der praktischen Schattenkonstruktion kaum selbständig vorkommende Aufgabe: „Den Schlagschattenpunkt oder die Schlagschattenpunkte einer geraden oder gekrümmten Linie auf einer anderen solchen Linie zu suchen“, kann immerhin als Bestandteil zusammengesetzter

Aufgaben Bedeutung gewinnen, etwa wenn es sich darum handelt, wichtige Punkte der Schlagschattengrenzen unabhängig von der übrigen Lösung scharf zu bestimmen. Diese Aufgabe löst sich dadurch, dass man die Schlagschatten beider Linien auf einer Grundebene sucht. Wo sich die hiedurch erhaltenen Schattenlinien schneiden, da ist der gemeinschaftliche Schlagschattenpunkt derjenigen zwei Linienpunkte, die einander in Schatten setzen, und die zuweilen als „Fixpunkte“ beider Linien bezeichnet werden. Ein rückwärts gezogener Lichtstrahl führt also zu beiden. Eine naheliegende Aufgabe: „Es sind die Punkte der Selbstbeschattung einer Schraubenlinie aufzusuchen“ ist in Figur 17c behandelt.

Schlagschatten eines Vielfachs auf einem andern Vielfach und Selbstbeschattung von Körpern mit ebenen Flächen. Schatten im Innern hohlgedachter ebenbegrenzter Körper.

Mit den Konstruktionen in Art. 15, 16 u. 17 sind die Grundlagen gewonnen, auf denen das weitest gehende Problem für ebenbegrenzte Körper gelöst werden kann: „Den Schlagschatten eines ebenbegrenzten Körpers auf einem andern solchen Körper zu suchen.“ Eingeschlossen ist in diesem Problem das andere: „Die Selbstbeschattung eines ebenbegrenzten Körpers zu bestimmen.“ Man hat hiebei nur den schattenwerfenden Teil und den beschatteten wie zwei getrennte Körper zu behandeln.

Indem die gebrochene oder Streifpolygonlinie, welche auf dem schattenwerfenden Körper die Selbstschattengrenze darstellt, ihren eigenen Schlagschatten auf den beschatteten Körper wirft, erzeugt sie auf diesem zugleich die Grenzlinie des gesuchten Schlagschattens. Denn die längs der Streifpolygonlinie den schattenwerfenden Körper berührenden Lichtstrahlen bilden ein Prisma; nur ausserhalb dieses Prismas kann der beschattete Körper Lichtstrahlen aufnehmen; was von seiner Oberfläche innerhalb liegt, ist im Schatten, und zwar im Schlagschatten, soweit es dem Licht zugewendet, im Körperschatten, soweit es vom Licht abgewendet ist.

Die Lösung wird also darin bestehen, dass man auf dem schattenwerfenden Körper die Selbstschattengrenze bestimmt und die Schlagschatten ihrer geraden Stücke auf den Grenzebenen des beschatteten Körpers nach Art. 17 aufsucht.

Diese Selbstschattengrenze kann in vielen Fällen oft schon nach der Anschauung festgestellt werden; ein Fehler in dieser Richtung macht sich später im Resultat meist von selbst bemerklich und hat nur ein wenig vergebliche Arbeit zur Folge. Wo die Entscheidung schwieriger ist, bestimmt man das genannte Streifpolygon etwa mit Hilfe des Schlagschattens, den der schattenwerfende Körper auf eine Grundebene wirft, unter Anwendung des in Art. 12 ausgesprochenen Satzes für die Selbstschattengrenze. Häufig fällt ohnehin ein Teil des Schlagschattens auf die Grundebene. Oder man macht von den in Art. 12, zweiter Teil, genannten Schnittpolygonen auch für die