



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

Art. 56. Zweites Verfahren für Körperschattengrenzen auf
Drehungsflächen, mit Hilfe von berührenden Kreiskegeln

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

VII. Schatten auf Drehungsflächen.

55. Erstes Verfahren für Körper- und Schlagschattengrenzen: Drehungsflächen mit Achse senkrecht zu einer Grundebene nach der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen behandelt.

Diejenigen Lagen der Drehungsflächen, bei welchen die Achsen vertikal, oder senkrecht zur Vertikalebene, oder parallel zum Grundschnitt gerichtet sind, wurden schon in Art. 30 u. 31 als Fälle der Anwendbarkeit der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen behandelt. Dieses erste Verfahren für beide Arten von Schattengrenzen ist aber im allgemeinen nicht nur zeitraubender, sondern auch wegen der in Art. 35 beschriebenen Mängel minder zweckmässig als die im folgenden unter Art. 56, 57 und 61 beschriebenen.

Bei Drehungsflächen mit kreisförmigen oder kegelschnittförmigen Meridianen lassen sich die Körperschattengrenzen nach Art. 56 u. 57 mit voller Bestimmtheit erhalten; für andere Meridianlinien sind zwar auch bei diesen Verfahren die Berührungspunkte von Tangenten schätzungsweise einzutragen, was noch immer eine Unsicherheit mit sich bringt; diese ist aber geringer als bei der allgemeinen Lösung.

Für Schlagschattengrenzen ist das in Art. 61 beschriebene Verfahren, das leider fast nur in denjenigen Fällen rasch fördert, in welchen ein Parallelkreis als Kante den Schatten wirft, in erster Linie gebräuchlich. Wo ein berührender Lichtstrahlencylinder die Schattengrenze erzeugt, da hat für diese meist die allgemeine Lösung einzutreten, die ja für die Schlagschattengrenzen minder unsicher ist als für Körperschatten. Die schärfere Bestimmung der letzteren nach den Verfahren in Art. 56 und 57 kommt hiebei auch der genaueren Konstruktion der Schlagschattengrenze zu gut, da diese den Schatten der Körperschattengrenze darstellt, so z. B. in der Beschattung und Selbstbeschattung nach Figur 37. In bestimmten Fällen ist auch die Schlagschattenbestimmung nach Art. 62 zweckmässig.

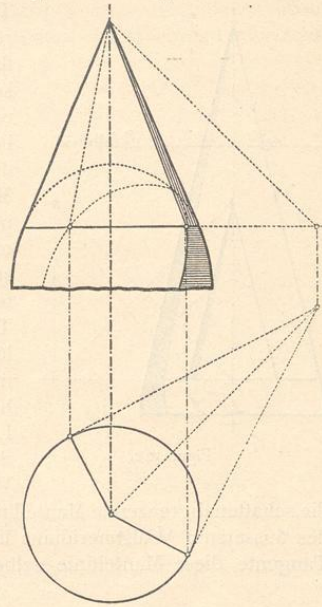
56. Zweites Verfahren für Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe von berührenden Kreiskegeln.

Wenn man sich (Figuren 56a u. 56b) an irgend einen Meridian einer Drehungsfläche eine Tangente gezogen denkt und diese mit dem Meridian um die Achse dreht, so beschreibt der Berührungspunkt einen Parallelkreis und die Tangente selber eine Kegelfläche, deren Spitze in der Drehachse liegt. Diese Kegelfläche hat eine unendlich niedere Zone gemeinschaftlich mit der Drehungsfläche, und wo die Schattengrenze auf dieser Zone als einem Bestandteil des Kegels liegt, da muss sie auch liegen, wenn man die Zone als Bestandteil der Drehungsfläche betrachtet. Wenn man also nach bekanntem Verfahren die Schattengrenze auf dem Kegel konstruiert und zusieht, wo die schattenabgrenzende Mantellinie den Par-

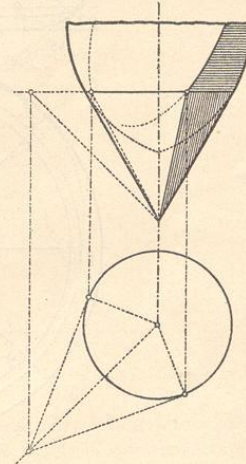
allekreis schneidet, so hat man im erhaltenen Schnittpunkt zugleich einen Punkt der Körperschattengrenze auf der Drehungsfläche. Wo die Tangente am Meridian parallel wird zur Achse, da geht die Kegelfläche in eine Cylinderfläche über, und es ist auch auf dieser die schattenabgrenzende Mantellinie in bekannter Weise zu suchen. Zu beachten ist, dass für die konvexen Drehungsflächen konvexe Kegel, für die hohlen Drehungsflächen Hohlkegel beizuziehen sind. Die Grenzlinien der Schatten sind zwar für beide Fälle dieselben; aber die Lichtfläche des einen Falls wird im andern zur Schattenfläche.

Bei Anwendung dieses Verfahrens findet sich, dass die Kegelspitzen und ihre Schatten meist in zu grosse Ferne und über das Zeichenblatt hinausfallen. Man kann aber in diesen Fällen die Konstruktion trotzdem durchführen, indem man die zu grossen Kegel auf die Hälfte oder einen anderen Bruchteil ihrer Basis verkleinert, dann den Schattenpunkt in diesem kleineren Massstab konstruiert und endlich den erhaltenen Abstand von der Drehachse im gleichen Verhältnis wieder vergrössert. Fig. 56c soll diese Hilfskonstruktion anschaulich machen. Die Mantellinien für den Kegelschatten sind nicht wirklich zu ziehen, da man ja nur ihren Fusspunkt braucht; andere umständlich mit Worten darzulegende Vereinfachungen der am besten neben der Hauptfigur nur in kleinem Massstab und mit einem einzigen Kreis als Basis für alle Kegel auszuführenden Hilfskonstruktion ergeben sich bei mehrmaliger Ausführung von selbst.

Nach dem vorbeschriebenen Verfahren lassen sich für alle Drehungsflächen, besonders aber für solche mit kreisförmigen Meridianstücken, rasch einige wichtige Punkte der Schattenkurve konstruieren, welche die Lage und Form dieser Kurve schon für viele Fälle genügend einzeichnen gestatten. Bei einem Wulst mit vertikaler Drehachse (Figur 56d) lassen sich z. B. 8 Punkte ohne eingehende Konstruktion leicht auffinden. Denkt man

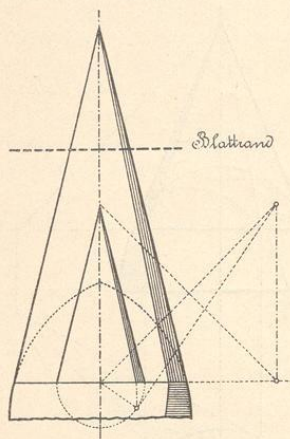


Figur 56a.



Figur 56b.

sich eine Tangente, gegen oben die Achse schneidend, unter 45° an den äussersten Meridian rechts gezogen, so ist der Berührungspunkt a' der Endpunkt des sichtbaren Teils der Körperschattenkurve. Denn der mit dieser



Figur 56 c.

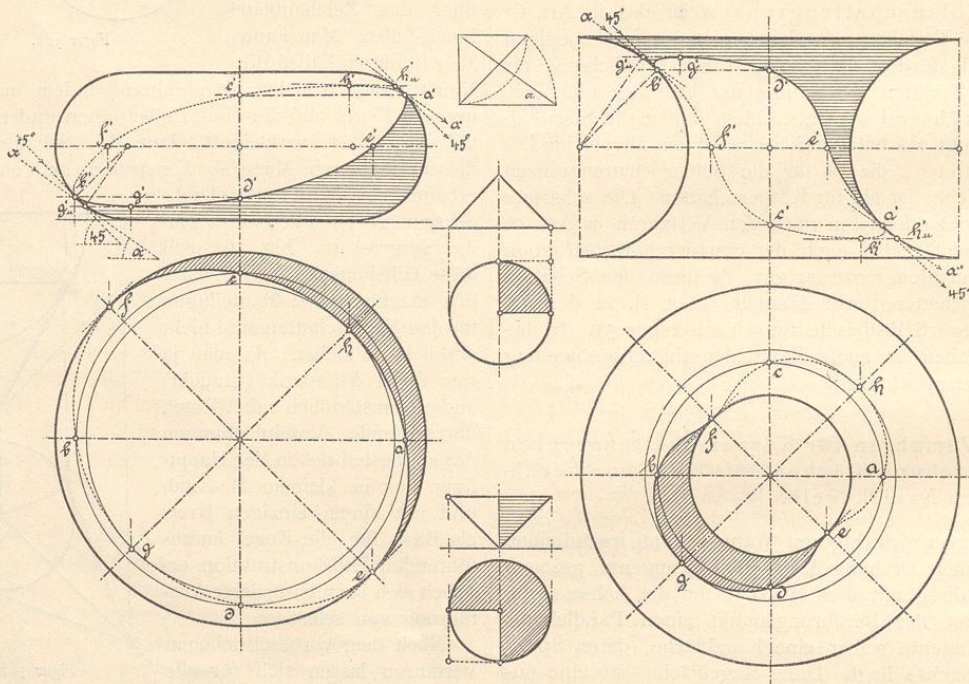
Tangente gedachte Berührungskegel der Wulstfläche ist ein Drehungskegel, dessen Mantellinien unter 45° geneigt sind, und bei einem solchen liegen die schattenabgrenzenden Mantellinien im Grundriss parallel zum Grundriss und senkrecht zum Grundriss, so dass die Schattenfläche genau der vierte Teil des Mantels ist. Dies leuchtet sofort ein, wenn man den Kegel für sich herauszeichnet und die Lage des Schattens seiner Spitze betrachtet (Fig. 56 e).

Weil nun auf dem Kegel die schattenabgrenzende Mantellinie in der vertikalen Ebene des äussersten Wulstmeridians liegt, so ist die gezogene Tangente diese Mantellinie selber, und ihr Berührungspunkt

b' liefert (Figur 56 f zeigt den Hilfskegel für sich). Da ferner auf dem Wulst alle Schattierung symmetrisch zu der vertikalen Ebene sein muss, die durch die Achse unter 45° zum Grundriss gelegt und die „Hauptmeridianebene“ genannt wird, so finden sich leicht die weiteren Punkte c' und d' gleichhoch liegend mit a' und b' auf der vertikalen Mittelachse der Figur. Im Grundriss müssen $a b c d$ auf demselben Parallelkreis liegen.

Auf dem grössten Horizontalkreis des Wulstes müssen die Schattenpunkte da liegen, wo die schattenabgrenzenden Mantellinien eines vertikalen Cylinders mit diesem Kreis als Basis liegen würden. So finden sich durch einen unter 45° geneigten Durchmesser dieses Kreises die Schattenpunkte ee' und ff' .

Noch zwei weitere Punkte, und zwar der tiefstliegende und höchstliegende Punkt, ergeben sich durch Betrachtung der vertikalen Ebene, die durch die Achse unter 45° zum Grundriss gelegt wird. Diese Lichtstrahlen-ebene schneidet den Wulst nach Meridianen; wo der Lichtstrahl diese Meridiane berührt, da liegen die gesuchten Punkte. Denkt man sich diese Ebene um die Achse gedreht, bis sie parallel zur Vertikalebene steht, so erscheinen die Grenzlinien der Figur als Umklappung der Meridiane. Es sind also nur an die äussersten Meridiane zwei Tangenten mit derjenigen Richtung zu ziehen, welche der Lichtstrahl in seiner eigenen Vertikalebene



Figur 56 d, e, f, g.

punkt mit dem Meridian ein Punkt der Schattenkurve. Aus a' findet sich leicht der zugehörige Grundrisspunkt a .

Ganz dieselbe Betrachtung ergibt, dass eine an den linken äussersten Meridian unter 45° gezogene nach unten gerichtete Tangente den linken Endpunkt der Kurve

darbietet. Diese Richtung ist flacher als 45° ; sie findet sich nach Art. 38 ausgedrückt durch den Winkel $\alpha = 35^\circ 15,9'$ oder durch die Richtung der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen vertikale Kathete gleich einem beliebigen Mass a und dessen horizontale Kathete

gleich $a\sqrt{2}$, das heisst gleich der Diagonale eines Quadrats über a . Die Berührungspunkte dieser zwei Tangenten seien g'_n und h'_n ; durch das Zurückklappen dieser Punkte in ihre ursprüngliche Meridianebene findet sich die Lage der Körperschattengrenzpunkte gg' und hh' , die um so wichtiger sind, als die horizontalen Parallelkreise im Aufriss, die zum Zurückklappen dienen, zugleich Tangenten an der Grenzkurve in diesen Punkten darstellen. In den Grundrisspunkten g und h hat die Grenzkurve im Grundriss eine kurze Symmetralachse, wogegen der senkrechte Durchmesser ef eine grosse Symmetralachse darstellt.

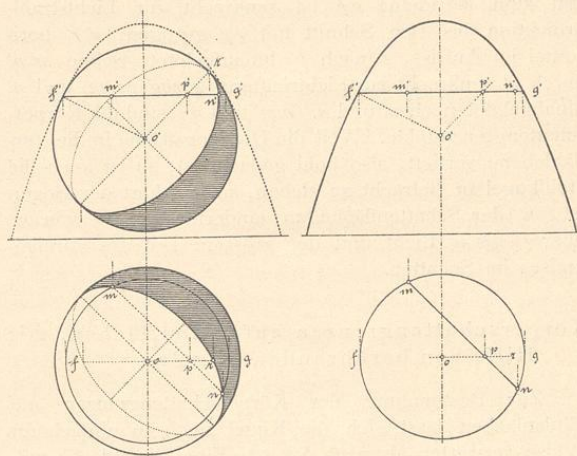
Ganz dieselbe Betrachtung führt zu den 8 Punkten der Wulstfläche mit konkavem Meridian, Fig. 56g. Wie bei diesen Wulstflächen, so lassen sich für alle anderen Drehungsflächen die wichtigsten Punkte der Körperschattengrenze rasch bestimmen. Auch für die Schlag-schattengrenze, die bei Drehungsflächen mit Selbstbeschattung hintritt, führt die Betrachtung der vertikalen Lichtstrahlenebene, die durch die Achse geht, und die Erwägung der Symmetrie der ganzen Schattierung in Beziehung auf diese Ebene zu einigen Schlüssen, so dass sich im Zusammenhang mit Art. 34 über den Verlauf der Schattengrenzen auf Drehungsflächen mit vertikaler Achse die in Art. 63 gegebenen Sätze zusammenstellen lassen. Die Anpassung dieser Sätze an die Lagen der Drehungsachsen senkrecht zur Vertikalebene und parallel zum Grundriss bedarf keiner Erklärung.

57. Drittes Verfahren für Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, mit Hilfe von berührenden Kugeln.

Der Anschauung vielleicht minder leicht zugänglich, aber in der Ausführung einfacher und raumsparender ist ein drittes Verfahren zur Bestimmung der Körperschattengrenzen auf Drehungsflächen, nämlich dasjenige mit berührenden Kugeln. Jede Drehungsfläche kann aufgefasst werden als umhüllt von Kugeln verschiedener Grösse, deren Mittelpunkte auf der Achse der Drehungsfläche liegen und von denen jede die Fläche nach einem Parallelkreis berührt, längs welchem jeder Kugelradius normal zum zugehörigen Meridian der Fläche gerichtet ist. Einen solchen Parallelkreis ($f'g'$ in Figur 57a) kann man ebenso als eine sehr niedrige Zone der Kugel wie der Drehungsfläche auffassen, und wo die Schattengrenze darauf erscheint als auf einer Zone der Kugel, da muss sie auch liegen als Bestandteil der Schattengrenze der Drehungsfläche.

Hier ist voranzunehmen, was erst später (in Art. 66) ausgeführt wird, aber eines Beweises nicht bedarf, nämlich dass die Körperschattengrenze auf der Vollkugel ein Grosskreis senkrecht zur Lichtrichtung ist. Im Grundriss und Aufriss der Kugel (Figur 57a) projiziert sich dieser Grosskreis als eine Ellipse, deren grosse Achse ein Durchmesser der Kugelprojektion senkrecht zur Lichtstrahlprojektion ist. Die grosse Achse der einen Projektion projiziert sich in der andern Projektion horizontal. Wo diese Ellipse im Grundriss oder Aufriss geschnitten wird

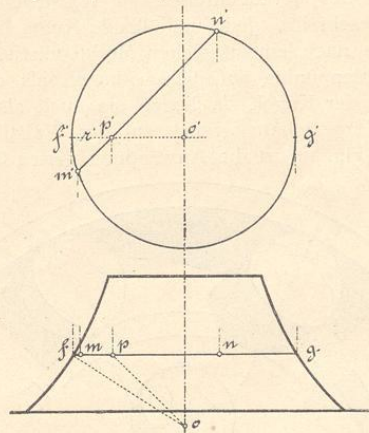
von der Projektion eines der zuvor genannten Parallelkreise $f'g'$, da ist ein Schattenpunkt auch für die Drehungsfläche. Die Grosskreisebene schneidet — wenn die Drehachse vertikal vorausgesetzt wird — die horizontale Parallelkreisebene nach einer gemeinschaftlichen Sehne mn , die wie die Grosskreisebene selbst normal zur Licht-



Figur 57 a, b.

richtung steht, also im Grundriss normal zur Lichtstrahlprojektion erscheint.

Sobald der Parallelkreis $f'g'$ in Aufriss und Grundriss der Drehungsfläche gezeichnet und die Normale der Meridianlinie $f'o'$ (als Kugelradius gedacht) gezogen ist,



Figur 57 c.

lassen sich nun die auf dem Parallelkreis liegenden Körperschattengrenzpunkte m und n rasch bestimmen, ohne dass die Kugelprojektionen und die Ellipsen gezeichnet werden müssten. Man zieht (Figur 57b) im Aufriss $o'p'$ senkrecht zur Lichtstrahlprojektion und im Grundriss den Radius or horizontal, lotet p' in den Grundriss auf or nach p , zieht durch p die Sehne senkrecht zur Lichtstrahlprojektion, erhält dadurch auf dem Parallelkreis m und n und lotet diese Punkte hinauf nach m' und n' . mm' und nn' sind Körperschattengrenzpunkte der Drehungsfläche.