



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

Art. 68. Oft verwertbare Hilfskonstruktionen für die Ellipse und ihre
Tangenten

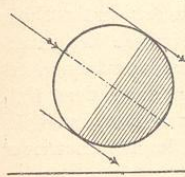
[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

biert noch den äussersten Teil, so sind die Ordinaten y in den Teilpunkten die folgenden, wenn die Länge der grossen Halbachse oder der Kugelhalbmesser = 1 gesetzt wird.

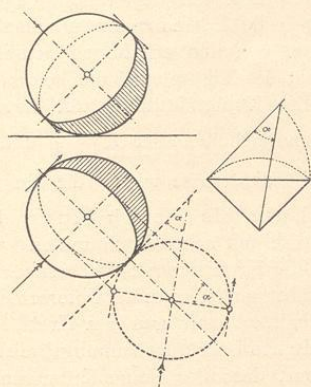
Im ersten Punkt $y_0 = 0,577$ rund 0,58 (kleine Halbachse);
 „ zweiten „ $y_1 = 0,559$ „ 0,56
 „ dritten „ $y_2 = 0,500$ „ 0,50
 „ vierten „ $y_3 = 0,382$ „ 0,38
 „ fünften „ $y_4 = 0,280$ „ 0,28
 „ Endpunkt $y_5 = 0$ „ 0.

Was für die Grundrissellipse des Kugelkörperschattens in Beziehung auf Richtung und Grösse gesagt ist, gilt völlig unverändert auch für die Aufrissellipse, wofür nur die Vertikalprojektion des Lichtstrahls an die Stelle seiner Horizontalprojektion gesetzt wird. Die Aufrissellipse ist kongruent der Grundrissellipse, und ihre grosse Achse steht ebenfalls senkrecht zur Lichtstrahlprojektion.

Zum raschen Aufzeichnen der Ellipsen bei Darstellungen in kleinerem Massstab genügt oft schon die Angabe der vier Krümmungskreise in den



Figur 66a.



Figur 66b.

Scheiteln, wobei die Radien nach der unten in Art. 68f angegebenen Konstruktion zu bestimmen sind und die zwischenliegenden Teile des Ellipsenumfangs nach Schätzung eingefügt werden.

67. Behandlung der Kugel als Drehungsfläche.

In manchen Fällen ist es zweckmässig, die Kugel- fläche als Drehungsfläche mit Achse senkrecht zu einer Grundebene aufzufassen und von der Eigenschaft ihrer zum Lichtstrahl parallelen Schnitte als Kreislinien keinen Gebrauch zu machen. Dies gilt besonders dann, wenn die in Art. 61 für Drehungsflächen beschriebene Lösung mit Parallelkreisschnitten und den kongruenten Schlag- schatten auf deren Ebenen Anwendung finden kann. So liesse sich z. B. auf dem in 65d gezeichneten Beispiel, ferner in dem als Höhenschnitt gezeichneten, oben kreis-

förmig offenen Kuppelgewölbe mit kugelförmiger Leibung in 65g die Selbstbeschattung mit solchen Parallelkreisschnitten bestimmen. Auch die Betrachtung der Parallelkreisschnitte der Kugel als niedriger Kegelschatten, wie bei den Drehungsflächen nach Art. 56, kann in manchen Fällen rascher zum Ziel führen als die Umklappung von Schnittebenen parallel zum Lichtstrahl, indem sie mit der ebengenannten Schlagschattenbestimmung verbunden die Körperschattengrenze liefert.

Oft verwertbare Hilfskonstruktionen für die 68. Ellipse und ihre Tangenten.

Da die Ellipse sowohl als Schattengrenzlinie auf Kugel- flächen, Cylinderflächen, Kegelflächen, wie auch als Kante und Hilfslinie bei den Schattenkonstruktionen auf diesen und anderen Körpern samt ihren Tangenten sehr häufig zu zeichnen ist, so sind im folgenden einige oft verwertbare Hilfskonstruktionen für die Linie selbst, wie für die scharfe Bestimmung von Tangenten und Berührungspunkten eingeschaltet. In der letzten Beziehung sind auch andere Kurven berücksichtigt.

a) Ellipsenkonstruktion; gegeben beide Achsen. Man beschreibt um den Schnittpunkt beider Achsen zwei Kreise mit den Halbachsen als Radien. Man zieht eine Anzahl beliebiger gemeinschaftlicher Radien beider Kreise. Für jeden solchen Halbmesser zieht man durch seinen Endpunkt auf dem grösseren Kreis eine Parallele zur kleinen Achse und durch seinen Punkt auf dem kleineren Kreis eine Parallele zur grossen Achse. Der Schnittpunkt je zweier zu demselben Halbmesser gehöriger Parallelen ist ein Ellipsenpunkt. — Da sich bei dieser Konstruktion alle zu benützenden Punkte aus einem rechtwinkligen Schnitt zweier Linien ergeben, so liefert sie die Ellipsenpunkte mit grosser Sicherheit.

b) Ellipsenkonstruktion; gegeben beide Achsen. Man trägt auf einem Papierstreifen von einem Punkt p aus die grosse Halbachse pa und in derselben Richtung die kleine Halbachse pb auf, so dass in dem Stück ab die Differenz beider Halbachsen erscheint. Man legt nun in verschiedenen Richtungen nacheinander den Papierstreifen so an, dass der Punkt a auf eine kleine Halbachse, der Punkt b auf eine grosse fällt. In jeder solchen Lage giebt der Punkt p einen Ellipsenpunkt an. Diese Konstruktion liefert die Ellipsenpunkte zwar rascher, aber weit weniger zuverlässig als die erste, letzteres besonders bei geringem Unterschied beider Halbachsen. Immerhin ist sie zum praktischen Schattenkonstruieren meist ausreichend, wenn nicht andere Resultate aus der Ellipse abzuleiten sind.

c) Ellipsenkonstruktion; gegeben beide Achsen. Man durchschneidet die grosse Achse von den Endpunkten der kleinen Achse aus mit Kreisbögen, deren Halbmesser gleich der grossen Halbachse ist. Die zwei Schnittpunkte sind die Brennpunkte der Ellipse. Man beschreibt nun aus dem einen Brennpunkt einen Kreisbogen mit einem beliebigen Bruchteil der grossen Achse, aus dem andern einen Kreisbogen mit dem Rest der grossen Achse; beide Kreisbögen schneiden sich in einem Ellipsen-

hiefür Punkt h angenommen. Man zieht $h o_1$ mit Verlängerung und macht $hn = R$. Die auf der Mitte von $o_3 n$ in k errichtete Senkrechte zu $o_3 n$ giebt als Durchschnitt mit hn den Punkt o_2 als Mittelpunkt des Uebergangskreises. — Wird Punkt i auf dem grösseren Krümmungskreis als Uebergangspunkt angenommen, so zieht man $i o_3$ und macht darauf $im = r$. Das Mittellot $l o_2$ von $m o_1$ liefert als Schnitt mit $i o_3$ den Mittelpunkt des Uebergangskreises o_2 . Für die praktische Verwertung der Konstruktion empfiehlt sich die Annahme des Uebergangspunktes auf dem kleinen Krümmungskreis am meisten. Die Annäherung an die Ellipse kann hiebei rascher erreicht werden als mit der Wahl eines Zwischenradius z und ist bei allen Konstruktionen um so vollständiger, je kleiner der Unterschied beider Halbachsen ist.

h) Eine Tangente an die Ellipse aus einem äusseren Punkt oder parallel zu einer andern Geraden ist durch Anlegen des Lineals an der Kurve mit Sicherheit genau zu ziehen; damit ist aber der Berührungspunkt noch nicht bestimmt. Man erhält ihn, wenn die Achsen bekannt sind, durch Betrachtung der Ellipse als der aus dem Kreis durch proportionale Verkürzung aller Ordinaten abgeleiteten Kurve. Die Tangenten in den Endpunkten aufeinanderfallender Ordinaten des Kreises und der aus ihm abgeleiteten Ellipse schneiden sich auf der Abscissenachse, das heisst auf der grossen Achse der Ellipse. Man beschreibt also über der grossen Achse der Ellipse einen Kreis, zieht aus dem Schnittpunkt der Ellipsentangente mit der grossen Achse eine Tangente an den Kreis, bestimmt deren Berührungspunkt und erhält dann den Berührungspunkt der Ellipsentangente als Schnitt mit der durch den Kreisberührungspunkt gezogenen Ordinate. Liegt der Berührungspunkt der grossen Achse näher, so wird besser der Kreis über der kleinen Achse mit dem Schnittpunkt der Tangente und der kleinen Achse benützt.

i) Ist die Tangente in einem gegebenen Punkt der Ellipse zu ziehen, so wird dieselbe Thatsache benützt, indem zuerst die Ordinate durch den Punkt für Ellipse und Kreis, dann die Kreistangente gezeichnet und aus ihrem Schnittpunkt mit der grossen Achse nach dem gegebenen Berührungspunkt gezogen wird. Dasselbe Problem lässt sich auch mit Hilfe der Brennpunkte lösen; die Tangente an der Ellipse steht senkrecht auf der Halbierungslinie des Winkels zwischen den beiden nach dem Berührungspunkt gezogenen Brennstrahlen.

k) Sind die Achsen der Ellipsen nicht bekannt und es ist der Berührungspunkt einer vorhandenen Tangente zu bestimmen, so zieht man zwei zur Tangente parallele Sehnen in thunlichst grosser Entfernung voneinander und mit möglichst sicherem Schnitt mit der Peripherie. Die gerade Verbindungslinie der Halbierungspunkte beider Sehnen ist der Durchmesser nach dem Berührungspunkt.

Die Konstruktion ist die Anwendung der folgenden, für alle Kurven möglichen, auf den besonderen Fall der Ellipse. Man zieht eine Anzahl zur Tangente paralleler Sehnen und halbiert sie; die Kurve, welche die Halbierungspunkte verbindet, führt zum Berührungspunkt. Bei den Linien zweiter Ordnung wird diese Kurve zur Geraden.

l) Ist in einem Punkt eines Ellipsenstücks mit unbekannten Achsen eine Tangente zu ziehen, so kann man zur thunlichst sicheren Bestimmung ihrer Richtung folgende, auch für alle andern Kurven brauchbare Konstruktion benützen, durch welche man einen zweiten Punkt der Tangente erhält. Man beschreibt um den Berührungspunkt einen Kreis, zieht verschiedene Radien, welche auch die Kurve schneiden und trägt von den Kreispunkten einer Seite aus auf den Radien die Sehnen der Kurve nach aussen und innen auf. Man erhält dann zwei Kurven, welche sich auf dem Kreis schneiden; der Schnittpunkt ist ein Tangentenpunkt. Nimmt man die Konstruktion zu beiden Seiten des Berührungspunktes vor, so erhält man zwei auf einem Durchmesser liegende Tangentenpunkte. An die Stelle des Kreises kann auch eine Gerade oder beliebig gezogene Kurve treten, welche von den Verlängerungen der zu beiden Seiten des Berührungspunktes liegenden Sehnen der gegebenen Kurve geschnitten wird.

IX. Schatten auf minder häufig verwerteten Flächen.

Die Flächen zweiter Ordnung.

69.

Soweit diese Flächen nicht zu den Drehungsflächen gehören und als solche schattiert werden, sind es die folgenden: das dreiachsige Ellipsoid, das elliptische Paraboloid, das zweimantelige elliptische Hyperboloid, das einmantelige elliptische Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid.

a) Ein dreiachsiges Ellipsoid, das heisst ein Ellipsoid mit drei verschieden grossen Achsen, entsteht, wenn von zwei Ellipsen mit gemeinschaftlicher Achse, deren Ebenen senkrecht zu einander stehen, die eine derart parallel fortrückt, dass sie mit ihren Achsen immer gleichgerichtet und sich immer geometrisch ähnlich bleibt, indem sie die andere in zwei Punkten schneidet. Die fortrückende Ellipse beschreibt die Oberfläche des Ellipsoids. (Wird sie ein Kreis, oder ist die feste Ellipse ein Kreis, so geht das dreiachsige Ellipsoid in ein Drehungsellipsoid über, das nach Kap. VII zu behandeln ist.)

Die Fläche hat die Eigenschaft, dass sie von parallelen Ebenen irgend welcher Richtung nach Ellipsen geschnitten wird, die unter sich geometrisch ähnlich sind. Wenn also in Anwendung der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen das Ellipsoid durch vertikale Lichtstrahlenebenen geschnitten und an die Schnittkurven die berührenden Tangenten gezogen werden, so sind alle diese Schnittkurven ähnliche Ellipsen, auf welchen auch die Berührungspunkte der Lichtstrahlen, das heisst die Körperschattengrenzpunkte, ähnlich liegen. Hierauf gründet sich folgende Konstruktion der Körperschattengrenze, wobei nach Figur 69a ein Ellipsoid mit senkrecht zu den drei Grundebenen stehenden Achsen als Beispiel gewählt sein mag.

Man zieht durch den Mittelpunkt o der Grundrissellipse einen Lichtstrahl ab und zeichnet im Aufriss die Ellipse $b' c' d'$, nach welcher die Vertikalebene dieses Lichtstrahls den Körper schneidet. (Für diese Ellipse ist die