



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

Art. 69. Die Flächen zweiter Ordnung

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

hiefür Punkt h angenommen. Man zieht $h o_1$ mit Verlängerung und macht $hn = R$. Die auf der Mitte von $o_3 n$ in k errichtete Senkrechte zu $o_3 n$ giebt als Durchschnitt mit hn den Punkt o_2 als Mittelpunkt des Uebergangskreises. — Wird Punkt i auf dem grösseren Krümmungskreis als Uebergangspunkt angenommen, so zieht man $i o_3$ und macht darauf $im = r$. Das Mittellot $l o_2$ von $m o_1$ liefert als Schnitt mit $i o_3$ den Mittelpunkt des Uebergangskreises o_2 . Für die praktische Verwertung der Konstruktion empfiehlt sich die Annahme des Uebergangspunktes auf dem kleinen Krümmungskreis am meisten. Die Annäherung an die Ellipse kann hiebei rascher erreicht werden als mit der Wahl eines Zwischenradius z und ist bei allen Konstruktionen um so vollständiger, je kleiner der Unterschied beider Halbachsen ist.

h) Eine Tangente an die Ellipse aus einem äusseren Punkt oder parallel zu einer andern Geraden ist durch Anlegen des Lineals an der Kurve mit Sicherheit genau zu ziehen; damit ist aber der Berührungspunkt noch nicht bestimmt. Man erhält ihn, wenn die Achsen bekannt sind, durch Betrachtung der Ellipse als der aus dem Kreis durch proportionale Verkürzung aller Ordinaten abgeleiteten Kurve. Die Tangenten in den Endpunkten aufeinanderfallender Ordinaten des Kreises und der aus ihm abgeleiteten Ellipse schneiden sich auf der Abscissenachse, das heisst auf der grossen Achse der Ellipse. Man beschreibt also über der grossen Achse der Ellipse einen Kreis, zieht aus dem Schnittpunkt der Ellipsentangente mit der grossen Achse eine Tangente an den Kreis, bestimmt deren Berührungspunkt und erhält dann den Berührungspunkt der Ellipsentangente als Schnitt mit der durch den Kreisberührungspunkt gezogenen Ordinate. Liegt der Berührungspunkt der grossen Achse näher, so wird besser der Kreis über der kleinen Achse mit dem Schnittpunkt der Tangente und der kleinen Achse benützt.

i) Ist die Tangente in einem gegebenen Punkt der Ellipse zu ziehen, so wird dieselbe Thatsache benützt, indem zuerst die Ordinate durch den Punkt für Ellipse und Kreis, dann die Kreistangente gezeichnet und aus ihrem Schnittpunkt mit der grossen Achse nach dem gegebenen Berührungspunkt gezogen wird. Dasselbe Problem lässt sich auch mit Hilfe der Brennpunkte lösen; die Tangente an der Ellipse steht senkrecht auf der Halbierungslinie des Winkels zwischen den beiden nach dem Berührungspunkt gezogenen Brennstrahlen.

k) Sind die Achsen der Ellipsen nicht bekannt und es ist der Berührungspunkt einer vorhandenen Tangente zu bestimmen, so zieht man zwei zur Tangente parallele Sehnen in thunlichst grosser Entfernung voneinander und mit möglichst sicherem Schnitt mit der Peripherie. Die gerade Verbindungslinie der Halbierungspunkte beider Sehnen ist der Durchmesser nach dem Berührungspunkt.

Die Konstruktion ist die Anwendung der folgenden, für alle Kurven möglichen, auf den besonderen Fall der Ellipse. Man zieht eine Anzahl zur Tangente paralleler Sehnen und halbiert sie; die Kurve, welche die Halbierungspunkte verbindet, führt zum Berührungspunkt. Bei den Linien zweiter Ordnung wird diese Kurve zur Geraden.

l) Ist in einem Punkt eines Ellipsenstücks mit unbekannten Achsen eine Tangente zu ziehen, so kann man zur thunlichst sicheren Bestimmung ihrer Richtung folgende, auch für alle andern Kurven brauchbare Konstruktion benützen, durch welche man einen zweiten Punkt der Tangente erhält. Man beschreibt um den Berührungspunkt einen Kreis, zieht verschiedene Radien, welche auch die Kurve schneiden und trägt von den Kreispunkten einer Seite aus auf den Radien die Sehnen der Kurve nach aussen und innen auf. Man erhält dann zwei Kurven, welche sich auf dem Kreis schneiden; der Schnittpunkt ist ein Tangentenpunkt. Nimmt man die Konstruktion zu beiden Seiten des Berührungspunktes vor, so erhält man zwei auf einem Durchmesser liegende Tangentenpunkte. An die Stelle des Kreises kann auch eine Gerade oder beliebig gezogene Kurve treten, welche von den Verlängerungen der zu beiden Seiten des Berührungspunktes liegenden Sehnen der gegebenen Kurve geschnitten wird.

IX. Schatten auf minder häufig verwerteten Flächen.

Die Flächen zweiter Ordnung.

69.

Soweit diese Flächen nicht zu den Drehungsflächen gehören und als solche schattiert werden, sind es die folgenden: das dreiachsige Ellipsoid, das elliptische Paraboloid, das zweimantelige elliptische Hyperboloid, das einmantelige elliptische Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid.

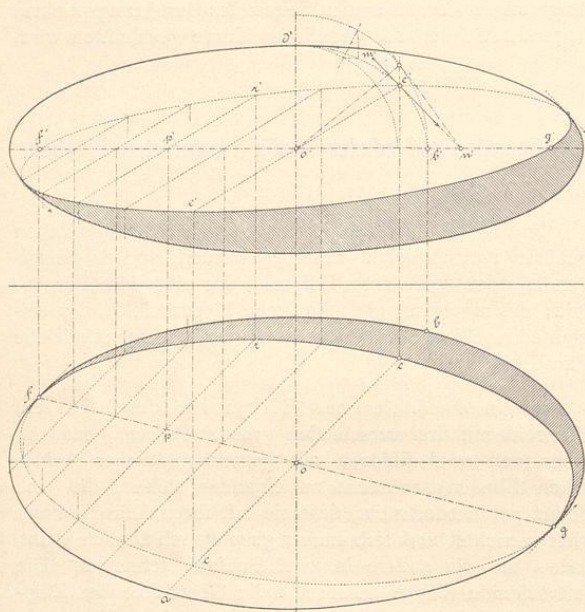
a) Ein dreiachsiges Ellipsoid, das heisst ein Ellipsoid mit drei verschiedenen grossen Achsen, entsteht, wenn von zwei Ellipsen mit gemeinschaftlicher Achse, deren Ebenen senkrecht zu einander stehen, die eine derart parallel fortrückt, dass sie mit ihren Achsen immer gleichgerichtet und sich immer geometrisch ähnlich bleibt, indem sie die andere in zwei Punkten schneidet. Die fortrückende Ellipse beschreibt die Oberfläche des Ellipsoids. (Wird sie ein Kreis, oder ist die feste Ellipse ein Kreis, so geht das dreiachsige Ellipsoid in ein Drehungsellipsoid über, das nach Kap. VII zu behandeln ist.)

Die Fläche hat die Eigenschaft, dass sie von parallelen Ebenen irgend welcher Richtung nach Ellipsen geschnitten wird, die unter sich geometrisch ähnlich sind. Wenn also in Anwendung der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen das Ellipsoid durch vertikale Lichtstrahlenebenen geschnitten und an die Schnittkurven die berührenden Tangenten gezogen werden, so sind alle diese Schnittkurven ähnliche Ellipsen, auf welchen auch die Berührungspunkte der Lichtstrahlen, das heisst die Körperschattengrenzpunkte, ähnlich liegen. Hierauf gründet sich folgende Konstruktion der Körperschattengrenze, wobei nach Figur 69a ein Ellipsoid mit senkrecht zu den drei Grundebenen stehenden Achsen als Beispiel gewählt sein mag.

Man zieht durch den Mittelpunkt o der Grundrissellipse einen Lichtstrahl ab und zeichnet im Aufriss die Ellipse $b' c' d'$, nach welcher die Vertikalebene dieses Lichtstrahls den Körper schneidet. (Für diese Ellipse ist die

vertikale Achse diejenige des Ellipsoids und die horizontale durch Hinaufloten der Endpunkte des Grundrissdurchmesserlichtstrahls ab erhältlich.) Man zieht an diese Schnittellipse einen berührenden Lichtstrahl $m'n'$, bestimmt dessen Berührungspunkt c' scharf nach Art. 68 und lotet ihn auf den Grundrissdurchmesser nach c hinunter. Hierauf zieht man genügend viele Sehnen der Grundrissellipse parallel zum Lichtstrahl und teilt sie in demselben Verhältnis ein, in welchem der Lichtstrahldurchmesser durch die beiden Punkte c und e eingeteilt ist ($oe = oc$). Die stetige Verbindung der erhaltenen Punkte liefert die Körperschattengrenze im Grundriss, die ihrer Entstehungsweise nach elliptisch sein muss.

Die Verbindungslinie gf der Halbierungspunkte der parallelen Sehnen ist ein horizontaler Durchmesser sowohl des Ellipsoids, als der Schattengrenzlinie auf ihm. Diese



Figur 69 a.

Linie erscheint im Aufriss als $f'g'$ horizontal und durch den Mittelpunkt gehend; die Halbierungspunkte p können also durch Hinaufloten auch im Aufriss erhalten werden. Durch diese Punkte p' sind im Aufriss Parallelen zu dem schrägen Durchmesser $o'c'$ jener ersten vertikalstehenden Schnittellipse zu ziehen und dann die Endpunkte der Sehnen r aus dem Grundriss in den Aufriss nach r' hinaufloten, um auch dort die Schattengrenzpunkte zu erhalten. Bei einem hohen Ellipsoid würden die Projektionslote schiefwinklige Durchschnitte ergeben; man bestimmt in diesem Fall die Aufrisspunkte besser aus der Proportionalität der Sehnen. Jede Aufrisssehne $p'r'$ verhält sich zu dem ihr parallelen Durchmesser $o'c'$ wie die zugehörige Grundrisssehne pr zu dem ihrigen oc . Zur Abnahme der Proportionalmasse für Grundriss und Aufriss kann dasselbe Strahlenbüschel dienen.

Die Körperschattengrenzlinie wird eine Ellipse, deren

Mittelpunkt mit dem des Körpers zusammenfällt, welche also die Oberfläche in zwei polarsymmetrische Hälften für Licht und Schatten zerlegt. In der Projektion des Körpers auf eine zur Richtung fg senkrecht stehende vertikale Ebene erscheint sie als gerade Linie.

Die an den beiden Körperumrissen tangierenden Lichtstrahlenprojektionen berühren in denselben Berührungspunkten auch die Projektionen der Schattengrenzlinie. Diese Thatsache gilt allgemein für gekrümmte Flächen, deren Umrisse in den beiden Projektionen nicht durch Kanten, sondern durch Auswölbung gebildet sind; sie ist eine notwendige Folgerung aus dem in Art. 34a ausgesprochenen Satz. Denkt man sich für eine solche etwa im Aufriss gezogene Lichtstrahl tangente die vertikalprojizierende Ebene, so berührt diese Ebene den Körper in einem Punkt, der der Körperschattengrenze angehört, weil er auf einem berührenden Lichtstrahl liegt. Diese Grenze kann aber über die Ebene offenbar nicht hinaus, da sie sonst aus der Körperoberfläche hinausgehen müsste; sie muss also umkehren und da sie bei stetiger Krümmung der Fläche keine Ecke bilden kann, muss sie mit Berührung umkehren, abgesehen von dem seltenen Fall, in welchem der sichtbare Teil mit dem unsichtbaren zusammenfällt. Vergl. Art. 63 a, Schattengrenzen auf Drehungsflächen. Weitere Beispiele für die beschriebene Thatsache bieten die Figuren 69b, 69c, 71, 74a, 74c.

Ein zweites Verfahren für die Schattenbestimmung auf dem Ellipsoid wäre das im folgenden für das elliptische Hyperboloid angewendete Behandeln jedes horizontalen Durchchnitts als eines niedrigen elliptischen Kegelumrisses.

b) Das elliptische Paraboloid (mit vertikaler Achse) entsteht, wenn an die Stelle der festen Ellipse, die bei Erzeugung des Ellipsoids vorausgesetzt wurde, eine Parabel (mit vertikaler Achse) tritt. Die Bestimmung der Körperschattengrenze, die selbst parabolisch und im Grundriss geradlinig wird, kann einen ähnlichen Weg verfolgen wie bei jenem, wenn an die Stelle der Grundrissellipse eine beliebige horizontale Schnittellipse des Paraboloids als Fussfläche gesetzt wird. Alle Vertikalschnitte werden parabolisch und nicht nur ähnlich, sondern kongruent. Auf kurzem Weg kann die geradlinige vertikale Projektion der Körperschattengrenze auf einer zu fg senkrechten Vertikalebene gefunden und zur Konstruktion jener benutzt werden.

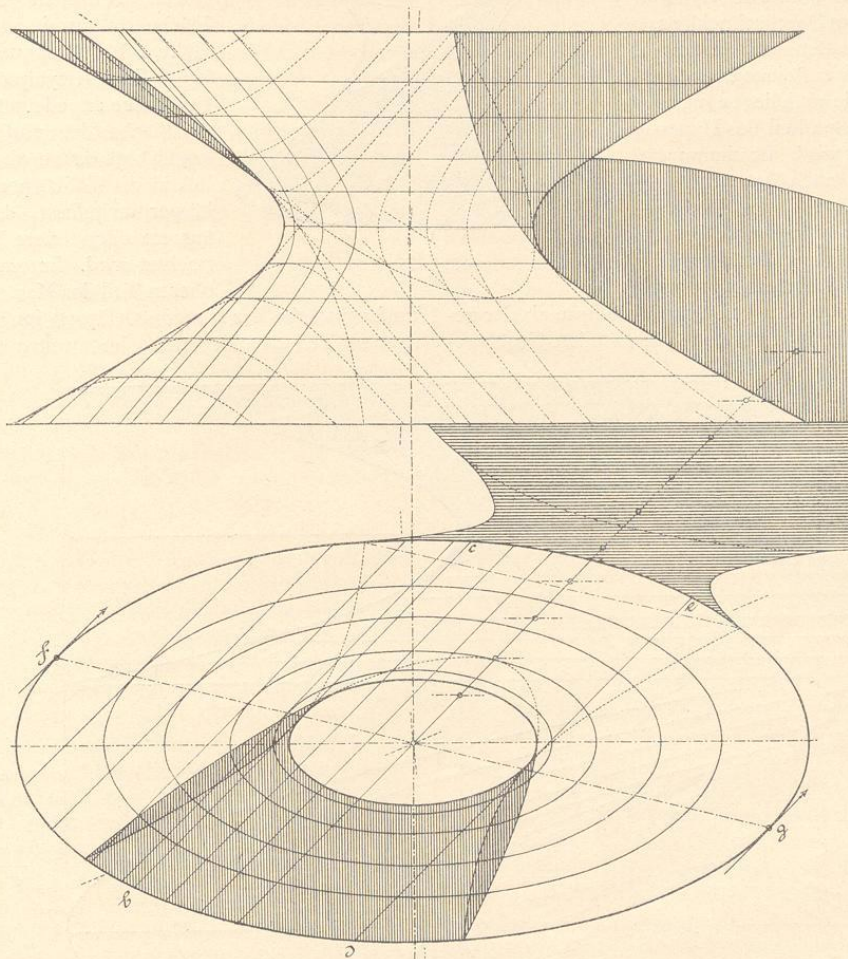
c) Ein zweimanteliges elliptisches Hyperboloid entsteht, wenn eine (am besten horizontal liegend gedachte) Ellipse, deren Ebene senkrecht zur wirklichen Achse einer Hyperbel steht, derart parallel forttrückt, dass sie mit ihrer Achse immer gleichgerichtet und sich immer geometrisch ähnlich bleibt, indem sie die Hyperbel immer in zwei Punkten schneidet. Die beiden Schnittpunkte mit der Hyperbel können Endpunkte einer Achse oder eines andern Ellipsendurchmessers sein. Die bewegliche Ellipse erzeugt zwei kongruente Mantelflächen, auf denen die hyperbolische Körperschattengrenze in ähnlicher Weise gefunden werden kann wie beim Ellipsoid und Paraboloid,

wenn eine beliebige Lage der beweglichen Ellipse als Grundrissellipse aufgefasst wird. Alle Vertikalabschnitte werden hyperbolisch und geometrisch ähnlich.

Zur Bestimmung von Schlagschattengrenzen auf allen drei Flächen wird, von besonderen Fällen abgesehen, nur das allgemeine Verfahren mit den Vertikalschnitten zur Verfügung stehen; doch bringt auch hiebei die Thatsache, dass alle Vertikalschnitte parallel zur Lichtrichtung geome-

beschattung; der Schlagschatten kann entweder auf die Aussenseite des Mantels oder auf die Innenfläche fallen, je nach der Neigung der Hyperbelzweige.

Die Schattenkonstruktion könnte auch bei dieser Fläche, ähnlich wie bei den drei vorhergehenden, Gebrauch machen von der Thatsache, dass alle Hyperbeln, nach welchen die Fläche durch vertikale Lichtstrahlenebenen geschnitten wird, geometrisch ähnlich sind, und es wäre



Figur 69b.

trisch ähnlich sind, eine Abkürzung, indem das Zeichnen konzentrischer Grundrissellipsen erspart werden kann.

d) Das einmantelige elliptische Hyperboloid entsteht durch das parallele Fortrücken einer (am besten horizontal liegend gedachten) Ellipse auf einer Hyperbel (mit vertikaler imaginärer Achse) in der Weise, dass 1) die Ebene der Ellipse immer senkrecht bleibt zur imaginären Achse der Hyperbel, 2) die Ellipse sich immer geometrisch ähnlich und gleichgerichtet bleibt. Die Fläche bietet neben der Körperschattengrenze auch eine Selbst-

dieser Weg der kürzeste. Diese Schnitthyperbeln projizieren sich auf eine zu fg (Figur 69b) senkrecht stehende vertikale Ebene als eine Hyperbelschar, deren Asymptoten dargestellt sind durch die Projektionen der zwei geraden Linien, nach welchen eine berührende Schnittebene bc oder de die Fläche schneidet. Von dieser Hyperbelschar wäre nur eine einzige Hyperbel (bei Annahme der Fläche nach Figur 69b ausserhalb bc und de liegend) zu zeichnen, um die gerade Linie zu erhalten, als welche die Körperschattengrenze sich auf die zu fg senkrecht gerichtete vertikale Ebene projiziert.

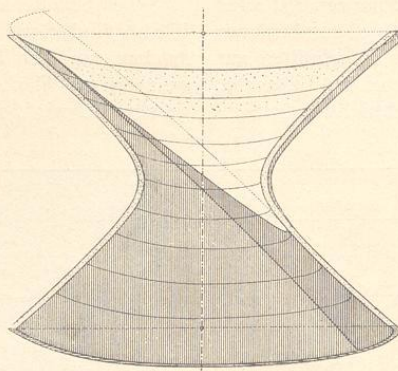
Die an Figur 69b und c durchgeführte Lösung für die Körperschattengrenzlinie eines vertikalstehenden Hyperboloids ist eine andere und zwar die folgende. Jeder horizontale Durchschnitt des Körpers liefert eine Ellipse, welche betrachtet werden kann als sehr niedriger Abschnitt eines elliptischen Kegels, dessen äusserste Mantellinie dieselbe Neigung hat wie die Tangente der Hyperbel an der Stelle des Durchschneidens. Wo die Körperschattengrenze auf dieser Ellipse liegt als auf einer Zone des Kegels, da muss sie auch liegen, wenn die Ellipse als Bestandteil des Hyperboloids aufgefasst wird. Bestimmung der Kegelschatten nach Art. 41.

Zur Durchführung des Verfahrens ist nicht nötig, die Schnittellipsen im Grundriss zu zeichnen, sondern die Bestimmung der Kegelschattenmantellinien kann mit einer einzigen Grundrissellipse als der gemeinschaftlichen Basis der verschieden steilen Kegel ge-

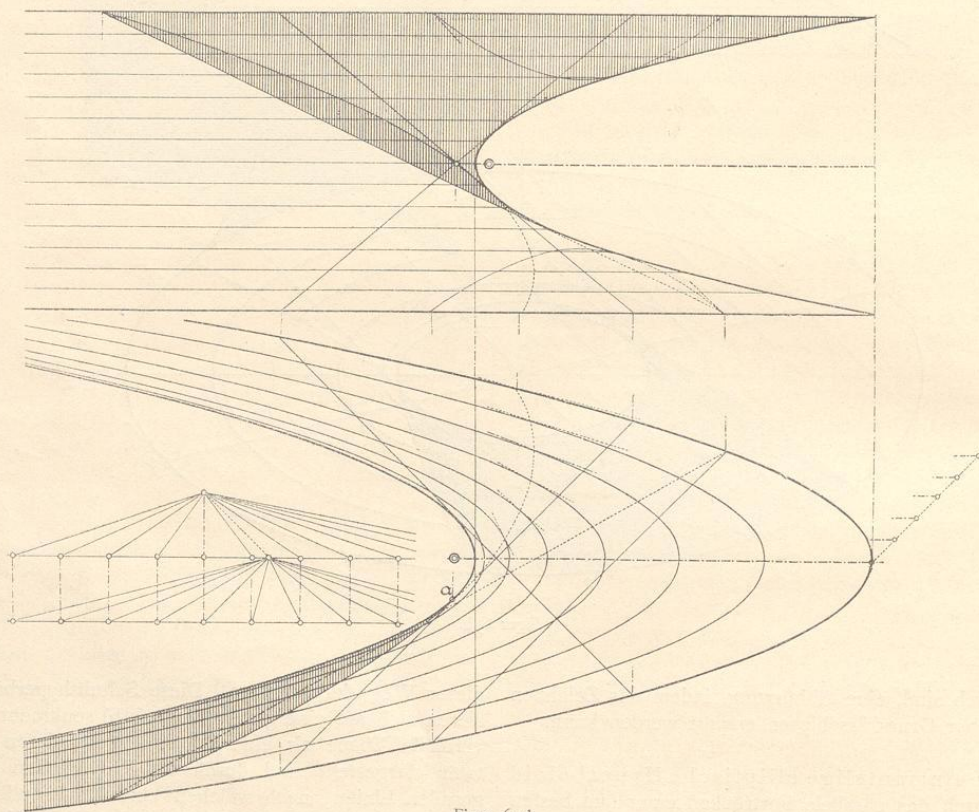
ellipte. Scharfe Bestimmung der Berührungspunkte auf der Ellipse nach Art. 68; scharfe Bestimmung der Tangenten an der Hyperbel in den für die Horizontalschnitte ausgewählten Punkten als der Halbierungslinien des Brennstrahlenwinkels.

Die Körperschattengrenze wird eine Hyperbel, die sich auf eine zur Richtung fg senkrechte vertikale Ebene als Gerade projiziert und die Fläche in zwei polarsymmetrische Hälften für Licht und Schatten zerlegt. Ihre Asymptoten sind durch Endstücke angedeutet. Welche Hälfte der Fläche Licht und welche Schatten hat, hängt davon ab, ob das Hyperboloid als Vollkörper oder als Hohlkörper aufgefasst, das heisst ob die äussere oder innere Mantelfläche betrachtet wird. Im ersten Fall sind am oberen Teil des Mantels die grösseren

Umfangsstücke der Horizontalellipsen im Schatten und am unteren Teil die kleineren; im zweiten Fall ist es um-



Figur 69c.



Figur 69d.

schehen, wenn immer der Radius nach dem Berührungspunkt der Tangente, den das Verfahren liefert, im selben Verhältnis vergrössert oder verkleinert wird, in welchem die Schnittellipse grösser oder kleiner wäre als die Grundriss-

gekehrt. In der Figur ist der Aufriss als Ansicht der Aussenfläche, der Grundriss als Oberansicht der Innenfläche aufgefasst, weshalb die Lichtflächen der Vertikalprojektion im Grundriss als Schattenflächen auftreten.

Die Schlagschattengrenze der Selbstbeschattung ist ähnlich erhalten wie in Art. 61 bei Drehungsflächen. Es wurden die Ellipsen einiger Horizontalschnitte im Grundriss gezeichnet und auf den Ebenen dieser Schnitte der Schatten der oberen Randellipse angegeben, der eine kongruente, aber in der Lichtrichtung verschobene Ellipse ist. Zu diesem Zweck wurde die Randellipse auf Pauspapier gezeichnet und im Grundriss nacheinander in der Richtung des Lichtstrahls je um soviel fortgeschoben, als die Länge des Lichtstrahls bis zur Schnittebene angab (die Mittelpunkte der fortgeschobenen Lagen sind bezeichnet). In jeder Lage wurden die zwei Schnittpunkte zwischen Schattenellipse und Schnittellipse als Schlagschattenpunkte durchgestochen und bezeichnet. Fast ebenso rasch, aber mit minder sicherer Bestimmung der Körperschattengrenze, würde das allgemeine Verfahren zum Ziel geführt haben. Einige Schnittebenen und Schnittkurven hierfür sind eingezeichnet.

Nur im Innern des Mantels erscheint der Schlagschatten, und zwar umfasst er am oberen Teil die beiden spitzwinkligen Zwickel als Ausläufer des unter dem Hals von den gekrümmten Linien gebildeten Vierecks mit dem kleineren Abschnitt der Fussellipse. Die Parallelperspektive Figur 69c (Schnitt nach der durch die Achse gehenden Lichtstrahlenebene) soll die Verteilung der Innenfläche an Licht, Körperschatten und Schlagschatten besser zur Anschauung bringen, als es die geometrische Darstellung vermag.

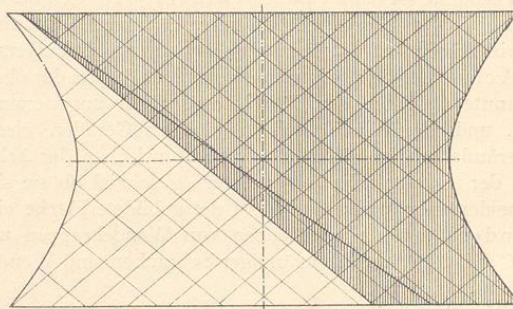
e) Das hyperbolische Paraboloid, bei Abgrenzung durch vier gerade Ränder auch das „windschiefe Viereck“ genannt, lässt sich auf verschiedene Weise erzeugen; in Figur 69d ist diejenige als „Rückungsfläche“ aus der Bewegung einer Parabel gewählt. Zwei Parabeln haben Scheitel und Achse gemein; die erste, festgedachte, liegt in einer Vertikalebene und erstreckt sich rechts ins Unendliche; die zweite liegt in einer Horizontalebene und erstreckt sich links ins Unendliche; sie rückt parallel und unveränderlich auf der ersten fort, mit dem Scheitelpunkt auf ihr bleibend. Beide Parabeln können ihre Eigenschaft als fest und beweglich vertauschen, ohne dass die Fläche sich ändert.

Dieser Erzeugungsweise entsprechend kann jeder Horizontalschnitt der Fläche aufgefasst werden als ein sehr niedriger schiefer Cylinder parallel zur Vertikalebene, dessen horizontale Basis die bewegliche Parabel ist und dessen Mantellinien gleich geneigt sind wie die Tangente der festen Parabel an der Stelle des Durchschneidens. Wo die Körperschattengrenze auf der horizontalen Parabel liegt als auf einer Zone des Cylinders, da muss sie auch für das Paraboloid liegen. Die Bestimmung der Körperschattengrenze auf dem Cylinder geschieht nach Art. 49. In einfacher Weise ergeben sich aus einer und derselben Hilfsfigur, die innerhalb des Grundplans gezeichnet ist, die Richtungen der Tangenten, welche an die horizontalen Schnittparabeln zu ziehen sind, und deren Berührungspunkte die Körperschattengrenze bilden. Diese wird eine Parabel, die sich in der Seitenprojektion als gerade Linie projiziert, also wie bei 69b auch auf kürzerem Weg gefunden werden kann.

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

(Bestimmung der Tangenten in den ausgewählten Punkten der festen Parabel und ebenso der Berührungspunkte der Tangenten an der beweglichen Parabel nach dem Satz, dass jede Tangente der Parabel senkrecht und in der Mitte steht auf der Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Fusspunkt des Lotes, das vom Berührungspunkt auf die Direktrix gefällt wird.)

Zur Bestimmung der Schlagschattengrenze ist dasselbe Verfahren gewählt wie oben für das elliptische Hyperboloid; das heisst, die obere Randparabel wurde auf Pauspapier gezeichnet und in der Lichtstrahlrichtung parallel verschoben. Im gezeichneten Fall wurde die Schlagschattengrenze zufällig nahezu geradlinig, was mit der geringen Krümmung des schattenwerfenden Randstücks zusammenhängt; eine strenge gerade Linie kann aber nicht entstehen. Denn wenn die Schlagschattengrenze wirklich eine Gerade wäre, so würden die Lichtstrahlen, welche sie erzeugen, eine Ebene bilden, und eine solche müsste die horizontale Ebene des oberen Randes nach einer geraden Linie schneiden; das heisst, der obere



Figur 69c.

Rand der Fläche müsste, soweit er den Schatten wirft, selbst geradlinig, anstatt parabolisch mit geringer Krümmung sein.

Figur 69c zeigt die Seitenansicht von rechts mit Angabe der Schattenflächen und Beifügung einiger Lagen der Geraden, welche entstehen, wenn man die Fläche durch Vertikalebenen schneidet, welche die ursprüngliche Lage der horizontalen Parabel berühren. Eine wichtige Ebene dieser Art ist die Vertikalebene parallel zur Lichtrichtung; sie liefert den Durchgangspunkt a , in welchem die Körperschattengrenze jene horizontale Parabel schneidet.

Der Schlagschatten erscheint an der Aussenseite des Mantels; würde der Parameter der festen Parabel genügend vergrößert, so würde nur auf der Innenseite Selbstbeschattung stattfinden. Zwischen beiden Fällen liegt ein Grenzfall, in welchem gar kein Schlagschatten erscheint; er ist geboten, wenn die zwei Geraden, nach welchen die Fläche von einer tangierenden vertikalen Lichtstrahlenebene geschnitten wird, im Aufriss unter 45° stehen und beide gegebene Parabeln kongruent sind. Für die Schlagschattenbestimmung hätten auch Schnitte parallel zur Vertikalebene, die ebenfalls alle kongruent sind, verwertet werden können.

Das allgemeine Verfahren ist durch Einzeichnen der mit einer vertikalen Lichtstrahlenebene erhaltenen Schnittkurve angedeutet.

70. Schraubenflächen, Wendelflächen. Die Schrauben und die schraubenförmig verdrehten Stabformen.

Eine Schraubenfläche im weitesten Sinne entsteht, wenn eine Gerade auf einer Schraubenlinie derart fortschreitet, dass sie ihre Richtung gegenüber der Schraubenlinie nicht ändert, das heisst, dass sie einen Kreiscylinder, der die Achse mit der Schraubenlinie gemeinschaftlich hat, fortwährend berührt und mit den Mantellinien dieses Cylinders immer denselben Winkel einschliesst. Auch die Berührung dieses Cylinders findet nach einer Schraubenlinie statt, und zwar hat diese dieselbe Ganghöhe wie die als Leitlinie dienende.

Ein erster besonderer Fall ist geboten, wenn die bewegliche Gerade die Tangente der Schraubenlinie bildet; die Fläche heisst dann eine „entwickelbare“ Schraubenfläche. Ein zweiter, bei den scharfgängigen Schrauben verwirklichter Fall ist der, dass die erzeugende Gerade die Achse der Schraubenlinie schneidet (wobei der oben genannte Cylinder den Durchmesser Null angenommen hat), und der Winkel zwischen beiden Geraden wieder unveränderlich ist. Wird der Winkel zwischen der Achse und der Erzeugenden ein rechter (gleichviel ob sie sich schneiden oder nicht), so heisst die gebildete Fläche eine Wendelfläche. Unterflächen von Wendeltreppen und die Gewindeflächen flachgängiger Schrauben sind Wendelflächen.

Die Anwendung der allgemeinen Lösung für gekrümmte Flächen auf die Schraubenflächen aller Art gestaltet sich ganz wie in Art. 27 für „Regelflächen“ überhaupt beschrieben (Figur 70a). Man zeichnet eine genügende Zahl von Mantellinien in Grundriss und Aufriss, indem man den Umfang des Grundrisskreises und die Ganghöhe der Schraubenlinie je in 8 oder 12 oder 16 gleiche Teile teilt und Gebrauch macht von der Thatsache, dass bei einem Fortschreiten der Erzeugenden im Grundriss von einem Teilpunkt zum andern ihre beiden Endpunkte um denselben Bruchteil der Ganghöhe höher rücken. Die Schnittkurve einer jeden vertikalstehenden Lichtstrahlenebene mit der Fläche ergibt sich nun daraus, dass man die Schnittpunkte dieser Ebene mit den verschiedenen Mantellinien, die im Grundriss vorhanden sind, sobald die Lichtstrahlprojektion gezogen ist, hinaufletet in die Aufrisse der Mantellinie und die erhaltenen Punkte verbindet. Im übrigen gelangt die allgemeine Lösung aus Art. 27 ohne weitere Hilfsmittel zur Verwertung; für den unteren Teil der Fläche sind die Schnittkurven eingezeichnet.

Dieses allgemeine Verfahren liefert zwar die Schlagschattengrenzen rasch und genügend scharf, leidet aber in Beziehung auf die Körperschatten an dem Mangel, dass die Berührungspunkte der Tangenten innerhalb weiter Grenzen unsicher sind. Eine genauere Bestimmung ist möglich nach Art. 105; die dort genannte Lichtstufenlinie ± 4 , die mit dem Werkzeug der Beleuchtungskunde,

der „Normalkugel“ erhalten wird, ist nichts anderes als die Körperschattengrenze der Fläche.

Eine weitere Konstruktion für die Schlagschattengrenzen, ebenfalls in Figur 70a zur Anschauung gebracht, ist die folgende. Man sucht auf einer beliebigen Horizontalebene (hier der Grundebene) die Schlagschatten einer Anzahl von Mantellinien, ferner den Schlagschatten derjenigen Linie, deren Schlagschatten auf der Schraubenfläche zu suchen ist, sei nun diese Linie eine Randlinie der Fläche selbst, wie bei der Selbstbeschattung in Figur 70a, oder sei sie die Selbstschattengrenze eines anderen Körpers. Wo der Schlagschatten t_{6u6} einer Mantellinie o geschnitten wird vom Schlagschatten dieser Grenzlinie (das heisst des nächstoberen Flächenrandes), da ist der gemeinschaftliche Schlagschatten r_6 derjenigen zwei Punkte s und x beider Linien, die einander in Schatten setzen. Dieser Schlagschattenpunkt liegt auf demselben Lichtstrahl mit den zwei Punkten, so dass ein durch ihn rückwärts bis zur Mantellinie gezogener Lichtstrahl zum Schlagschattenpunkt ss' auf der Fläche führt. Selbstverständlich ist der erhaltene Punkt nur dann ein wirklicher Schattengrenzpunkt, wenn die Mantellinie nicht selbst im Körperschatten ist; denn andernfalls kann sie keinen Schatten aufnehmen. Man erhält auf diesem Weg die Schlagschattengrenze rasch und genügend scharf.

Auch zur Bestimmung der Körperschattengrenze kann dieses Verfahren dienen, wenigstens der Theorie nach. Man sucht auf derselben Horizontalebene die Schlagschatten einiger Mantellinien aus demjenigen Teil der Fläche, auf welchem die Schattengrenze zu vermuten ist, zeichnet die Umhüllungskurve dieser Schlagschattenlinien und bestimmt möglichst scharf den Berührungspunkt zwischen der Kurve und jeder Mantellinie. Der durch einen solchen Berührungspunkt rückwärts gezogene Lichtstrahl führt zu dem Körperschattengrenzpunkt auf der zugehörigen Mantellinie. Wo der Durchschnitt unsicher wird, da ist zu beachten, dass die Mantellinie selbst durch den Körperschattenpunkt im gleichen Verhältnis eingeteilt wird wie die Schlagschattenlinie durch den Berührungspunkt. An die Stelle der horizontalen Ebene kann bei diesem Verfahren auch die vertikale Grundebene oder eine dazu parallele Ebene treten. Leider stösst es bei der praktischen Ausführung gewöhnlich auf unüberwindliche Hindernisse, indem es um so schwieriger ist, die Berührungspunkte auf den Schatten der Erzeugenden zu bestimmen, je mehr sich die Schraubenfläche einer entwickelbaren nähert.

Wenn die erzeugende Gerade der Schraubenfläche horizontal wird, so entsteht die Wendelfläche. Die Bestimmung der Schattengrenzen bleibt dabei völlig unverändert.

In Figur 70b ist der zweite für die Schraubenfläche beschriebene Weg der Schlagschattenbestimmung in seiner Anwendung auf eine Wendelfläche perspektivisch zur Anschauung gebracht. Auf der horizontalen Grundebene ist links der Grundriss eines schattenwerfenden horizontalen Kreises und einer beschatteten Wendelfläche mit sieben Mantellinien perspektivisch gezeichnet, darüber die beiden Raumgebilde selbst. Auf dem gewöhnlichen