



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

Art. 91. Körper mit ebenen Grenzflächen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

erhält also eigentlich zwei Lichtstufen für den Punkt, die auf demselben Durchmesser der Normalkugel liegen, also durch gleiche Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen ausgedrückt sind. In der That hat jeder Flächenpunkt zwei Lichtstufen, wenn die Fläche als papierdünne Schale gedacht wird, eine für die dem Licht zugewandte Seite und eine für die Rückseite. So ist im Innern eines regelmässigen Dodekaeders eine Fläche -3 , wenn sie aussen $+3$ ist, und umgekehrt; nur ist sie als $+3$ im Innern Schlagschatten, nicht Licht. Nimmt man als Beispiel einer gekrümmten Fläche etwa den Mantel eines elliptischen einmanteligen Hyperboloids, wie es in Figur 103b dargestellt ist, so muss zuvor ausgesprochen werden, ob die Lichtstufen für das Aeussere des Mantels oder für das Innere anzugeben sind. Die Lichtstufenlinien sind zwar durchaus dieselben für innen und aussen, aber im Innern ist -3 , was im Aeussern $+3$, und umgekehrt; auch kann im Innern ein Schlagschatten neben dem Licht vorhanden sein, wo am Aeussern eine Körperschattenfläche ununterbrochen sich ausdehnt, also die Schlagschattengrenze keine Bedeutung hat, und umgekehrt. In manchen Fällen bedarf es wohl der Aufmerksamkeit und Ueberlegung, ob die Berührungsebene an der Lichtseite der Kugel oder diejenige an der Schattenseite für die Lichtstufe eines Flächenpunktes massgebend ist; aber im allgemeinen ist die Entscheidung nicht schwer und unmittelbar mit Hilfe der Anschauung zu treffen. Ein Hilfsmittel in zweifelhaften Fällen ist das Schneiden der Ebene oder gekrümmten Fläche oder des Körpers durch die vertikale Ebene eines beliebigen Lichtstrahls; die entstehende Schnittlinie zeigt sofort, welche Seite der Ebene oder welche Flächenteile dem Lichte zugewendet sind und welche nicht.

91. Körper mit ebenen Grenzflächen.

Die dem Schattieren ebenbegrenzter Körper zu Grunde liegende Aufgabe ist die Bestimmung der Lichtstufe einer durch ihre beiden Projektionen gegebenen ebenen Figur.

Das in Figur 91a durch seine beiden Projektionen dargestellte Fünfeck $ABCDE$ sei eine Seitenfläche irgend eines Polyeders. Es ist die Lichtstufe seiner Ebene zu bestimmen, das heisst, es ist derjenige Punkt der Normalkugel zu suchen, der dieselbe Lichtstufe darbietet, indem eine in diesem Punkt an die Normalkugel gelegte Berührungsebene mit der Ebene der gegebenen Figur gleichgerichtet ist.

Die Neigung einer solchen Berührungsebene ist dieselbe wie die der Tangente am vertikalstehenden Meridian durch den Berührungspunkt, und denkt man sich die Ebene mit gleichbleibender Neigung auf der Normalkugel gedreht, so beschreibt der Berührungspunkt einen horizontalen Kreis, dessen Höhenlage sich bestimmt aus dem Berührungspunkt einer Tangente am Umriss des Kugelaufrißbildes, welche dieselbe Neigung hat wie die Ebene der gegebenen Figur. Die Gefällslinien aller Lagen der gedrehten Ebene bilden eine Kegelfläche, welche die Kugel längs des Kreises berührt und deren Spitze in der vertikalen Kugelhachse liegt. Diejenige Mantellinie dieser Kegel-

fläche, welche der Gefällslinie der gegebenen Ebene parallel ist, geht durch den gesuchten Kugelpunkt. Es ist also diese Gefällslinie nach Neigung und Richtung aufzusuchen.

Man zieht in der Vertikalprojektion der gegebenen Figur eine beliebige Horizontale $x'y'$, lotet die Punkte $x'y'$ in den Grundriss nach x und y , fällt aus d eine Senkrechte auf xy und lotet deren Fusspunkt z wieder hinauf in den Aufriss; DZ ist eine Gefällslinie oder Linie der grössten Neigung in der Ebene der gegebenen Figur. Von d fällt man noch das Lot $d'v'$ auf $x'y'$. Im Dreieck spq , das die Umklappung des Dreiecks DVZ darstellt, ist pq horizontal und $= dz$, sp vertikal und $= d'v'$; sq ist also die Umklappung der Gefällslinie in die Vertikalebene. Man zieht an den Aufriss der Normalkugel (Figur 91b rechts) eine Tangente $f'g'$ parallel zu sq , zeichnet den Horizontalkreis $k'g'$ durch den Berührungspunkt g' und zieht aus f' eine Parallele $f'l'$ zu $d'z'$. Wo diese Parallele den Horizontalkreis $k'g'$ schneidet, liegt der gesuchte Kugelpunkt l' , der mit der Ebene der gegebenen Figur gleiche Lichtstufe hat.

Im Grundplan der Normalkugel (Figur 91b links) würde der Lichtstufenpunkt unabhängig von jener Kegelfläche durch folgende Betrachtung gefunden. Man zeichnet als ersten geometrischen Ort des Punktes den Parallelkreis $k'g'$ im Grundriss als konzentrischen Kreis mit dem Radius $kg = k'g'$. Eine Horizontallinie durch den Berührungspunkt von Kugel und Ebene auf dieser letzten gezogen gedacht, ist Tangente an diesem Kreis. Für weitere Berührungsebenen mit gleicher Horizontalrichtung, aber anderen Neigungen, würden andere Parallelkreise erscheinen; doch wären die Richtungen der Tangenten an diesen Kreisen dieselben; die Berührungspunkte würden im Grundriss alle auf demselben Radius kn und im Raum auf einem vertikalen Grosskreis liegen, der sich in diesen Radius projiziert. Hienach ist für alle Ebenen gleicher Horizontalrichtung der geometrische Ort der Lichtstufenpunkte auf der Normalkugel ein vertikaler Grosskreis, dessen Ebene senkrecht steht auf der Horizontalrichtung der Ebenen und der sich im Grundriss der Normalkugel als ein Radius senkrecht zu dieser Horizontalrichtung projiziert.

Die Horizontalrichtung der gegebenen Ebene ist in der Linie xy schon vorhanden. Man hat also, um den Lichtstufenpunkt im Grundriss der Normalkugel zu erhalten, nur den Radius kn senkrecht zu xy oder parallel zu dz zu ziehen und auf diesem Radius $kl = k'g'$ aufzutragen; l ist der Lichtstufenpunkt im Grundriss. Um keinen Aufriss der Normalkugel beiziehen zu müssen, kann man sich den Radius $k'g'$ verschaffen, indem man für das Ziehen der Tangente $f'g'$ den Grundriss zeitweilig als Aufriss auffasst.

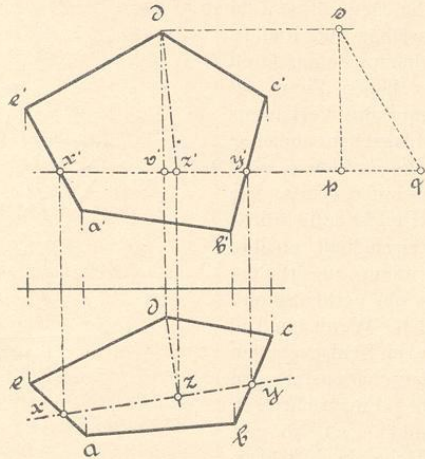
Fällt im Aufriss der Schnittpunkt f' von Tangente und Kugelhachse über das Blatt hinaus, so benützt man die im Grundriss gezeigte Konstruktion, indem man den Horizontalkreis $k'g'$ in die Vertikalebene umklappt und in der Umklappung $k'i'$ parallel zu dz oder senkrecht zu xy zieht. Das Zurückklappen des Punktes i' durch $i'l'$ senkrecht zu $k'g'$ liefert dann den Punkt l' unabhängig von f' .

Die Thatfachen, durch deren Betrachtung der Punkt L sich gefunden hat, sind als wichtig für spätere Probleme

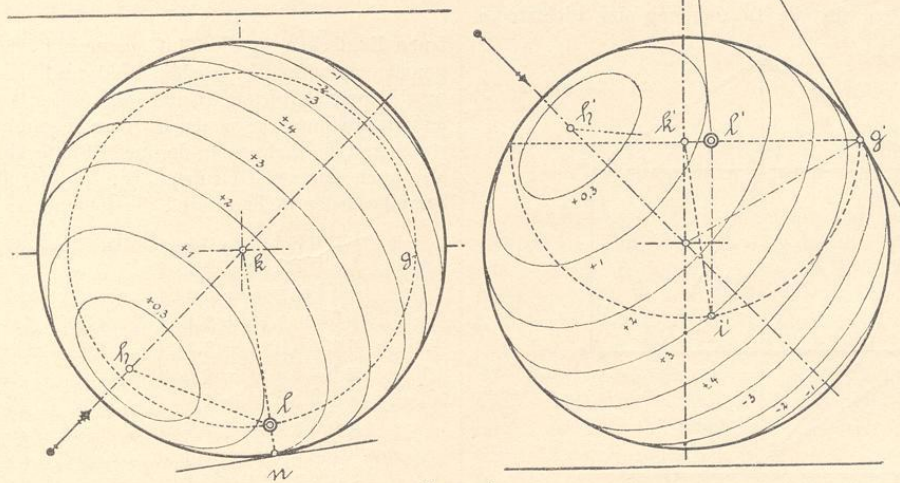
hervorzuheben und zusammenzufassen. Jede Ebene, die nicht ganz horizontal ist, hat eine Horizontalrichtung, die als Richtung der Schnittlinie mit einer beliebigen horizontalen Ebene erhalten wird, und eine dazu senkrechte Richtung der Gefällslinie oder grössten Neigung, die im Grundriss senkrecht zu jener Richtungslinie erscheint (Art. 8e). Die Horizontalrichtung bestimmt als ersten geometrischen Ort des Lichtstufenpunktes auf der Normalkugel einen Grosskreis, dessen vertikale Ebene senkrecht zu ihr gerichtet ist; sie bestimmt — um die Ortsbezeichnung auf der Erdkugel zu gebrauchen — die geographische Länge des Lichtstufenpunktes der Ebene. Die Gefällslinie bestimmt durch ihre Neigung als zweiten geometrischen Ort einen horizontalen Parallelkreis, an welchem jeder vertikale Grosskreis oder Meridian dieselbe Neigung hat wie die Ge-

Ist eine Ebene durch ihre Spuren gegeben, so giebt die Horizontalspur die Horizontalrichtung unmittelbar; die Gefällslinie erscheint im Grundriss senkrecht zur Horizontalspur.

Ist eine Ebene durch ihre Horizontalrichtung H und eine beliebige ihr zugehörige unter dem Winkel β geneigte Gerade N gegeben, so kann der Lichtstufenpunkt auch ohne Aufsuchen der Gefällslinie gefunden werden. Der geometrische Ort der Berührungspunkte aller Tangenten, welche parallel zu der geneigten Geraden N an die Normalkugel gezogen werden können, ist ein Grosskreis, dessen Ebene normal zu N steht; er projiziert sich im Grundriss der Normalkugel als eine Ellipse, deren grosse Achse senkrecht zur Horizontalprojektion von N gerichtet und deren kleine Achse gleich ist dem Normalkugeldurchmesser mal $\sin \beta$.



Figur 91 a.



Figur 91 b.

fällslinie; sie bestimmt hienach die geographische Breite oder den Polabstand des Lichtstufenpunktes.

Ist eine Ebene durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade gegeben, so bestimmt man die Horizontalrichtung ebenfalls als Verbindungslinie der Schnittpunkte der Geraden mit einer beliebigen horizontalen Schnittebene, und die Gefällslinie durch ihre im Grundriss zur Richtungslinie senkrechte Horizontalprojektion. Die Horizontalneigung der Gefällslinie findet sich wieder durch Umklappen oder getrenntes Herausragen ihrer horizontalprojizierenden Ebene.

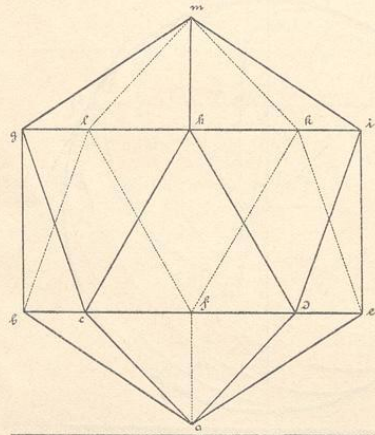
Der Schnittpunkt dieser Ellipse mit dem aus der Horizontalrichtung H erhaltenen Radius ist der Lichtstufenpunkt für die gegebene Ebene.

Die Zahlenbenennung des für eine Ebene gefundenen Berührungspunktes L auf der Normalkugel findet sich meist schon durch Schätzung für das praktische Schattieren genügend, indem man sich die Lichtstufenellipse durch den Punkt gezogen denkt und ihre Abstände von den Nachbar-ellipsen abwägt. Zu einer genauen Benennung führt jedoch diese Schätzung nicht; sie kann um so stärker irren, je näher der Berührungspunkt den Punkten $+0$

und $-o$ gelegen ist. Schärfere Bestimmung ist dadurch erreichbar, dass man die Verbindungslinie des Lichtstufenspunktes mit dem hellsten Punkt in beiden Projektionen zeichnet und durch Umklappung einer projizierenden Ebene dieser Linie deren wahre Grösse bestimmt. Diese wahre Grösse in ein nach Figur 82 gezeichnetes Normalkugelbild vom hellsten Punkt aus als Sehne eingetragen und auf den Lichtstrahldurchmesser projiziert, liefert in ihrem inneren Endpunkt die genaue Lichtstufenzahl. Denn diese Zahl verhält sich zu vier, wie die Projektionslänge zum Radius.

Die Anwendung der Lichtstufenbestimmung einer durch ihre beiden Projektionen gegebenen ebenen Figur auf ganze Körper ist nur die Wiederholung des Verfahrens für jede einzelne Grenzebene. Die Schlagschattenumrisse auf denjenigen Grenzebenen, die solche darbieten, sind unabhängig hievon in bekannter Weise aufzusuchen. Die Körperschattengrenze zu bestimmen, ist meist entbehrlich; für die meisten Grenzebenen ist nicht zweifelhaft, ob ihre Lichtstufe das Vorzeichen plus oder minus zu erhalten hat; wo Zweifel bestehen können, muss ein Vertikalschnitt mit einer Lichtstrahlenebene entscheiden. Wenn ein Teil einer Grenzebene im Licht, der andere im Schlagschatten ist, so ist nach dem früheren die Schlagschattenstufe von gleicher Benennung wie die Lichtstufe. Entspricht z. B. einer Grenzfläche ein Normalkugelpunkt $+2,2$, so entspricht der Schlagschatten auf dieser Fläche einem Schlagschattenpunkt $+2,2$ der Normalkugel.

Das regelmässige Ikosaeder, Figur 91 c, ist ein nahe-
liegendes Problem für die Bestimmung der Lichtstufen.



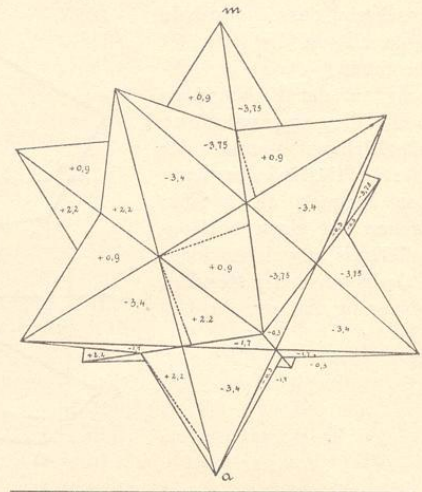
Figur 91 c.

Vier horizontale Parallelkreise der Normalkugel entsprechen den hier auftretenden Neigungswinkeln der Grenzebenen, und zehn Tangenten oder Radien im Grundriss der Normalkugel deren Horizontalrichtungen. Die Lichtstufen wurden für die angegebene Stellung etwa bestimmt wie folgt:

$a c d = -3,5$	$c d h = +2,2$	$k f l = -2,2$	$g h m = +2,5$
$a d e = -1,2$	$d h i = +3,1$	$f l b = -3,1$	$h i m = +1,85$
$a e f = -0,25$	$d i e = -2,1$	$l b g = +2,1$	$i k m = +4$
$a f b = -1,85$	$e i k = -1,65$	$b g c = +1,65$	$k l m = +3,5$
$a b c = +4$	$e k f = -0,5$	$g c h = +0,5$	$l g m = +1,2$

Die Parallelrichtung der Flächenpaare ist aus der Gleichheit je zweier Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen zu erkennen.

Je fünf der dreiseitigen Grenzflächen des Ikosaeders bilden eine Pyramide. Betrachtet man die Diagonalen der zwölf fünfseitigen Grundflächen dieser Pyramiden als Kanten eines neuen Körpers, so entsteht das in Figur 91 d perspektivisch dargestellte Sternikosaeder, in welchem von



Figur 91 d.

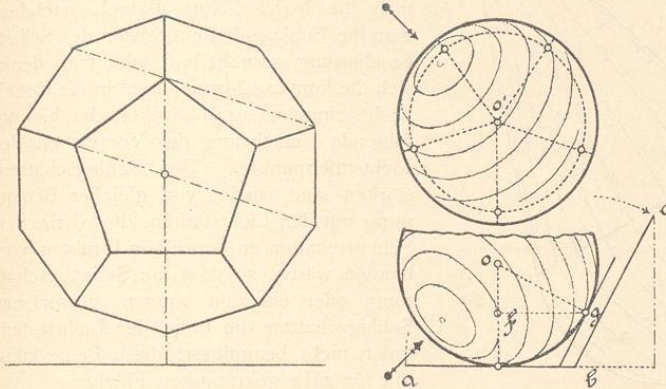
jenen Fünfecken je die fünf äusseren Dreiecke des Diagonalenpentagramms erhalten sind und das eine Selbstbeschattung darbietet. Unter der Voraussetzung unveränderter Stellung des neuen Körpers gegenüber dem Lichtstrahl sind die Lichtstufen der zwölf Fünfecke in Figur 91 c, also auch der zwölf Gruppen von je fünf Dreiecken am Sternikosaeder in Figur 91 d die folgenden:

$b c h m l = +0,3$	(Basis zur Spitze g)
$f e i m l = -2,2$	(" " " k)
$c d i m g = +0,9$	(" " " h)
$b f k m g = +3,4$	(" " " l)
$d e k m h = -3,75$	(" " " i)
$g h i k l = +1,7$	(" " " m)
$k i d a f = -0,3$	(" " " e)
$g h d a b = +2,2$	(" " " c)
$k l b a e = -0,9$	(" " " f)
$i h c a e = -3,4$	(" " " d)
$g l f a c = +3,75$	(" " " b)
$b c d e f = -1,7$	(" " " a)

Auf der ersten Lichtdrucktafel ist das Sternikosaeder mit durchgeführten Lichtstufen dargestellt, ebenso ein Gussstück (Fuss einer quadratischen Eisensäule mit Vertikalrippen), das vertikale und geneigte Flächen verschiedener Richtungen darbietet.

In bestimmten Fällen liegt es näher, anstatt der Horizontalrichtung der gegebenen Ebene ihre zur Vertikalebene parallele Richtungsline zu benützen, ebenso anstatt der Horizontalneigung den mit der Vertikalebene gebildeten Winkel. In Figur 91 e ist ein regelmässiges Zwölf-

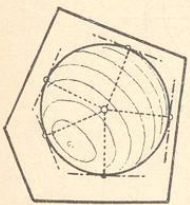
flach, das mit der Vorderfläche parallel zur Vertikalebene gerichtet ist, in dieser Weise behandelt, und es führt diese Lösung schneller zum Ziel, weil die fünf Nebenseiten gleiche Winkel mit der Vorderfläche, also auch mit der Vertikalebene bilden, so dass sie ihre Lichtstufenpunkte auf demselben mit



Figur 91 e.

der Vertikalebene gleichgerichteten Parallelkreis der Kugel finden. Aus der Verkürzung der Höhenlote der Nebenseiten ist der Winkel zwischen Vorderseite und Nebenseite abc abgeleitet, aus diesem der Berührungspunkt g einer vertikal gedachten Nebenseite mit der Normalkugel in deren Grundriss. Im Aufriss der Normalkugel ist mit einem Radius gleich fg ein konzentrischer Kreis beschrieben; die Schnittpunkte dieses Kreises mit Radien, die senkrecht zu den Seiten der Vorderfläche des Körpers gezogen wurden, sind die Lichtstufenpunkte der fünf Nebenseiten. Die Vorderfläche entspricht dem Mittelpunkt im Aufriss der Normalkugel, also der Lichtstufe $+1,7$; die fünf Nebenseiten haben etwa die Lichtstufen $+0,15 + 2,4 - 2,4 - 3 + 1,6$. Auf dem ersten Lichtdruckblatt ist der Körper schattiert.

Die Konstruktion des Lichtstufenpunktes einer Ebene in dieser oder der ursprünglichen Gestalt vereinfacht sich wesentlich bei Ebenen, die senkrecht zu einer Grundebene stehen und im Zusammenhang damit die Lichtstufenbestimmung bei prismatisch gestalteten Körpern dieser Richtung. Figur 91 f deutet an, wie z. B. für ein vertikalstehendes Prisma die Lichtstufenpunkte für die Seitenflächen aus dem Grundriss der Normalkugel als Berührungspunkte von Tangenten parallel den Seiten der Grundfläche erhalten werden. In gleicher Weise wäre der Aufriss der Normalkugel für ein zur Vertikalebene senkrechtes Prisma zu benützen.



Figur 91 f.

Die Grundebenen selbst und alle gleichgerichteten Ebenen haben ihre Lichtstufenpunkte in den Endpunkten von drei Durchmessern der Normalkugel, die senkrecht zu den drei Grundebenen stehen. Die Zahlenbenennung dieser Punkte ist fast genau $+1,7$. Die genaue Zahl ist $4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1,6908$.

Göller, Schattenkonstruktionslehre und Beleuchtungskunde.

Schiefgerichtete, aber einer Grundebene parallele Prismen verwerten die Thatsache, dass in Beziehung auf diese Grundebene die Richtungslinien ihrer Seitenflächen dieselben sind, also die Lichtstufenpunkte dieser Seitenflächen denselben Grosskreis als ersten geometrischen Ort haben. Für ein zur Vertikalebene paralleles Prisma liegen die Lichtstufenpunkte auf einem Grosskreis, der im Aufriss der Normalkugel als Durchmesser senkrecht zu den Kanten des Prismas erscheint. Die Ebene dieses Kreises ist samt seinen Lichtstufenpunkten und dem Normalschnitt des Prismas in die Vertikalebene umzuklappen. In der Umklappung wird wieder eine Tangente parallel zu jeder Seite des Normalschnittpolygons an den Kreis gezogen; der Berührungspunkt dieser Tangente ist der Lichtstufenpunkt für die zu der Polygonseite gehörige Grenzfläche des Prismas.

Wird das Prisma parallel zum Grundschnitt, so stellt sich die Ebene des Grosskreises senkrecht zum Grundschnitt; im übrigen bleibt die Konstruktion unverändert.

Die Anwendung der Konstruktion auf horizontale Prismen bedarf keiner Erklärung.

Auch für beliebig schief gerichtete Prismen von vielen Seiten ergibt sich oft noch eine Abkürzung der Arbeit gegenüber dem für beliebige eben begrenzte Körper gezeigten Verfahren, wenn der Grosskreis der Normalkugel aufgesucht wird, dessen Ebene senkrecht zu den Prismenkanten gerichtet ist. Die Bestimmung dieses Grosskreises geschieht wie bei den beliebig schief gerichteten Cylinderflächen in Art. 100.

Gerade Kreiskegel und Kreiscylinder mit Achse 92. parallel zu einer Grundebene.

Längs einer jeden Mantellinie eines Kegels oder Cylinders ist der Winkel des Lichtstrahls mit der Normalen auf der Fläche derselbe; also ist jede Mantellinie eine Linie gleichbleibender Lichtstärke. Für einen geraden Kreiskegel finden sich die Lichtstufen dadurch, dass man sich den Kegel unter Beibehaltung seiner Richtung über die Normalkugel hergestülpt denkt (Figur 92 a). Er hat dann einen Kreis als unendlich niedrige Zone mit ihr gemein, und wie die Lichtstärken auf dieser Zone als auf einem Bestandteil der Kugel erscheinen, so gelten sie auch für die Zone des Kegels; man hat also nur die Mantellinien durch die Lichtstufenpunkte auf diesem Kreis zu ziehen, um die Lichtstufenlinien auf dem Kegel zu erhalten. Am einfachsten gestaltet sich die Uebertragung der Lichtstufen bei demjenigen geraden Kegel, dessen Achse parallel zur Vertikalebene steht, sei sie nun lotrecht oder wagrecht oder schief gerichtet. Man zieht eine Tangente an den Aufriss der Normalkugel parallel zur umrissbildenden Mantellinie des Kegels und durch den Berührungspunkt eine Sehne senkrecht zur Achse des Kegels; diese Sehne stellt den Parallelkreis der Berührung von Kegel und Kugel dar. Wo die Sehne die Lichtstufenlinien der Kugel schneidet, da liegen die Lichtstufenpunkte