



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde**

**Göller, Adolf**

**Stuttgart, 1895**

Art. 104. Das windschiefe Viereck oder hyperbolische Paraboloid

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

eine Tangente  $xy$  gezogen und von der Spitze des Kegels aus eine Senkrechte im Raum auf diese Tangente gefällt gedacht. Diese Senkrechte, die auch im Grundriss als eine Senkrechte  $cv$  auf der Tangente erscheint, ist die Gefällsline der Berührungsebene, die durch den (unbestimmten) Basispunkt  $p$  an die Kegelfläche gelegt wird und diese längs der Mantellinie dieses Basispunktes berührt. Die Horizontalneigung dieses Lotes ergibt sich als spitzer Winkel am Fuss eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen horizontale Kathete  $cu$ ,  $vu$  die Senkrechte  $cv$  aus dem Grundriss und dessen Höhe gleich der Höhe des Kegels ist. An den Aufriss der Normalkugel zieht man eine Tangente parallel zur Hypotenuse  $c'u$  dieses Dreiecks und bestimmt den Horizontalabstand  $d'b'$  des Berührungspunktes  $b'$  von der vertikalen Achse der Normalkugel. Im Grundriss der Normalkugel wird ein Radius  $om$  parallel zu jener Senkrechten  $cv$  gezogen und auf diesem Radius vom Mittelpunkt aus jener Horizontalabstand  $d'b' = og$  aufgetragen. Der Endpunkt  $g$  ist der Berührungspunkt zwischen der Normalkugel und einer Ebene, die der Berührungsebene am Kegel parallel ist; dieser Punkt giebt also an, welche Lichtstufe die Mantellinie des Kegels im ausgewählten Basispunkt  $p$  darbietet. Wendet man dieses Verfahren auf weitere Basispunkte  $p$  an, so finden sich im Grundriss der Normalkugel weitere Berührungspunkte  $g$ , welche in einer Kurve zusammengefasst den anfangs genannten geometrischen Ort ergeben. In Figur 102 ist diese Kurve auch im Aufriss bestimmt, wo sie nicht verwertet wird. Ein Aufriss der Normalkugel ist ganz entbehrlich, wenn die Tangente an den Grundriss gezogen wird.

Die Kurve schneide die Lichtstufenlinie + 3 im Grundriss der Normalkugel in einem Punkt  $n$ . An die Kegelsbasis zieht man eine Tangente normal zu dem Radius  $on$  und erhält im Berührungspunkt  $f$  dieser Tangente den Lichtstufenpunkt + 3 auf der Kegelsbasis. (Scharfe Bestimmung von  $f$  durch eine zur Tangente parallele Sehne und den Halbmesser der Ellipse nach dem Halbierungspunkt der Sehne.)

Die Konstruktion beruht darauf, dass jede Berührungsebene des Kegelmantels in irgend einem Punkt der auf der Kugel gefundenen Kurve eine parallele Berührungsebene der Kugel finden muss, und dass die zu einem Punkt  $f$  des Kegels gehörige Berührungsebene der Kugel nur diejenige sein kann, welche die gleiche Horizontalrichtung hat, wie die Berührungsebene des Kegels in  $f$ .

### 103. Das dreiachsige Ellipsoid, das elliptische Paraboloid und das einmantelige elliptische Hyperboloid.

Auch auf diesen Körpern lassen sich die Lichtstufenlinien auf kürzestem Weg mit Hilfe des in Art. 101 beschriebenen Drehungsellipsoids mit Achse senkrecht zur Vertikalebene erhalten, indem man jede horizontale Schnittellipse der Körper als einen sehr niedrigen Kegelmantel auffasst und auf diesem die Lichtstufenpunkte bestimmt wie für den elliptischen Kegel gezeigt worden ist. Uebrigens verlohnt es sich hier mehr, auch den Aufriss des Drehungsellipsoids mit den Lichtstufenlinien zu zeichnen und dann

zu benützen wie den Aufriss der Normalkugel bei Drehungsflächen mit vertikaler Achse nach Art. 93. Die Figur 103 a (Seite 107) zeigt das benützte Drehungsellipsoid, 103 b das elliptische Hyperboloid; die Schattierung beider Körper ist durchgeführt auf der ersten Lichtdrucktafel.

### Das windschiefe Viereck oder hyperbolische Paraboloid.

Das hyperbolische Paraboloid ist als Gegenstand der Schattenkonstruktion in Art. 69e behandelt, und zwar ist es dort als Rückungsfläche aufgefasst, entstanden durch die Parallelbewegung einer horizontal liegenden Parabel längs einer andern vertikal stehenden mit entgegengesetzter Achsenrichtung. Auch für die Bestimmung der Lichtstufenlinien ist diese Auffassung die nächstliegende und einfachste. Wie nach Art. 69e für die Körperschattenbestimmung, so ist auch für das neue Problem jeder Horizontalschnitt der Fläche zu erklären als eine niedrige Zone eines schiefen Cylinders, dessen Basis die bewegliche Parabel ist und dessen Mantellinienrichtung durch die Tangente an der festen Parabel im Punkte des Horizontalschnitts dargestellt wird. Wo die Lichtstufen auf der horizontalen Parabel als auf der Basis des Cylinders liegen, da liegen sie auch für das Paraboloid. Die Bestimmung der Lichtstufenpunkte auf dem Cylinder ist in Art. 100 erklärt, vereinfacht sich aber dem dort behandelten allgemeinen Fall gegenüber dadurch, dass die Mantellinien parallel zur Vertikalebene liegen.

Hier sei die Lichtstufenbestimmung auch für eine zweite Auffassung der Fläche, für diejenige als Regel-fläche betrachtet, nach welcher sie, abgegrenzt durch vier gerade Linien, auch das „windschiefe Viereck“ genannt wird. Ein solches erzeugt sich, indem eine Gerade gleitet an zwei andern, räumlich getrennten, nicht parallelen Geraden und dabei immer einer bestimmten Ebene, der „Richtebene“ parallel bleibt. Neben dieser ersten Gruppe von Erzeugenden, welche die verschiedenen Lagen der beweglichen Geraden bilden, giebt es noch eine zweite Gruppe gerader Mantellinien auf der Fläche, dadurch bestimmt, dass die zwei ursprünglichen Leitlinien selber auf zwei beliebigen Erzeugenden der ersten Gruppe derart gleiten, dass sie immer einer zweiten Richtebene parallel bleiben, nämlich derjenigen, welcher jene beiden Leitlinien gemeinschaftlich parallel sind.

Die Fläche findet in der Technik höchst selten Verwertung, in der Baukunst etwa als windschiefe Dachfläche zwischen zwei gleich hohen, aber verschieden breiten Giebeln eines Hauses, wobei die erste Gruppe von Erzeugenden dargestellt ist durch die geneigten Dachsparren, die zweite durch die horizontalen Pfetten und Dachlatten, so dass ein solches Dach, obgleich eine gekrümmte Fläche, doch durchaus aus geraden Hölzern hergestellt werden kann. Hierin erscheint der besondere Fall, dass die beiden Richtebenen senkrecht zu einander stehen. Anlehnend an dieses Beispiel sei hier eine Fläche gewählt, deren Richtebenen die horizontale Grundebene und die Seitenprojektionsebene bilden, die also im Aufriss als ein rechtwinkliges Netz von Horizontalen und Vertikalen sich dar-

stellt. Im Grundriss und Seitenriss erscheint die Projektion je als Strahlenbüschel mit Scheitelbüschel, durchschnitten von vertikalen, beziehungsweise horizontalen Linien.

Die Berührungsebene an der Fläche in einem ihrer Punkte ist bestimmt durch die beiden Erzeugenden  $H$  (die horizontale) und  $G$  (die geneigte), die durch den Punkt gehen. Denkt man sich den Punkt der Normalkugel, in dem sie von einer gleichgerichteten Ebene berührt wird, so findet sich, dass der horizontale Parallelkreis der Normalkugel in diesem Punkt eine Tangente parallel zur Linie  $H$  hat, und der senkrecht zum Grundriss stehende Parallelkreis in diesem Punkt eine Tangente parallel zur Linie  $G$  hat. Verschiedenen Punkten der Linie  $H$  entsprechen verschiedene horizontale, im Grundriss konzentrische Parallelkreise mit parallelen Tangenten, deren Berührungspunkte im Grundriss der Normalkugel auf einem zur Linie  $H$  senkrecht stehenden Radius erscheinen müssen, also im Raum auf einem vertikalen Meridian der Normalkugel liegen. Hieraus folgt: „Alle Lichtstufenpunkte für eine horizontale Erzeugende der windschiefen Fläche sind auf einem Meridian der Normalkugel zu suchen, dessen Vertikalebene senkrecht zu dieser Erzeugenden steht.“ In derselben Weise lässt sich ableiten, indem man sich die oben genannten vertikalen Parallelkreise in der Seitenansicht der Normalkugel gezeichnet denkt: „Alle Lichtstufenpunkte für eine geneigte Erzeugende der windschiefen Fläche liegen auf einem Grosskreis der Normalkugel, dessen Ebene normal steht zu der Erzeugenden.“ Man kann den einen oder andern Satz zur Konstruktion verwerten, im folgenden ist der erste gewählt.

Ein vertikalstehender Meridian, der in der vorherbeschriebenen Weise einer zu seiner Ebene senkrechten horizontalen Erzeugenden  $H$  der Fläche entspricht, schneidet die Lichtstufenlinien der Normalkugel in bestimmten Punkten. Durch jeden dieser Punkte ist ein vertikaler Parallelkreis der Kugel senkrecht zum Grundriss zu zeichnen; für jeden dieser Punkte ist ferner zu bestimmen, welche Neigung gegen die Horizontalebene die Tangente an diesem Parallelkreis in ihm darbietet. Sucht man die geneigte Mantellinie der windschiefen Fläche auf, welche mit dieser Tangente gleiche Neigung hat, so schneidet diese Mantellinie die ausgewählte horizontale Erzeugende  $H$  in einem Lichtstufenpunkt, der gleichnamig ist mit dem Punkt der Normalkugel, durch welchen der vertikale Parallelkreis gelegt worden ist.

Zur graphischen Durchführung der Konstruktion zeichnet man sich Aufriss und Seitenriss der Fläche mit vielen dichtstehenden geneigten Mantellinien bei wenigen horizontalen Erzeugenden, und fügt in der Seitenansicht zu jeder der ersteren eine Senkrechte, indem man diese Senkrechten gut getrennt hält und wie die Geneigten in der Vorderansicht numeriert. Die Meridiane zeichnet man nur im Grundriss der Normalkugel, wo sie als Radien erscheinen; die vertikalen Parallelkreise zeichnet man im Grundriss und in der Seitenansicht samt dem Lichtstufenpunkt, der auf jedem erscheint, indem man jedem Parallelkreis den Buchstaben der horizontalen Erzeugenden und die Nummer der Lichtstufe beifügt, zu welcher er gehört.

Dann sieht man zu, welche von jenen Senkrechten im Seitenriss der Fläche einem Radius nach einem Lichtstufenpunkt in einem Parallelkreis ganz oder annähernd parallel ist. Die zu der Senkrechten gehörige geneigte Erzeugende schneidet die zu dem Parallelkreis gehörige horizontale Erzeugende in einem Lichtstufenpunkt, der mit demjenigen auf dem Parallelkreis gleichnamig ist. Findet sich keine genau parallele Senkrechte für einen der Parallelkreisradien, so gestattet das Verfahren ein Einschätzen der Lichtstufenpunkte zwischen zweien der geneigten Mantellinien mit genügender Genauigkeit. Andernfalls hat man senkrecht zu diesem Radius eine Mantellinie der Fläche in deren Seitenriss zu ziehen und die Projektion dieser Mantellinie im Aufriss zu bestimmen.

Für die beschriebene Erzeugung der Fläche wird die Kurve  $+4$  im Aufriss eine zum Lichtstrahl normale Gerade, im Grundriss eine Parabel, also im Raum eine Parabel, wie bei der andern Erzeugungsweise nach Art. 69e. Nach einem oberflächlichen Versuch scheint auch die Linie  $+1,7$  im Aufriss eine Parabel zu werden, deren Scheitel gegen jene Gerade gerichtet ist; die Linien zwischen  $+1,7$  und  $+4$  scheinen im Aufriss Hyperbeln zu sein, zwischen beiden zuvorgenannten Linien gelegen, mit Scheitel gegen die Gerade und um so flacher werdend, je mehr sie sich ihr nähern. Zwischen dem hellsten Punkt und  $+1,7$  dürften sich Ellipsen bilden, mit der grossen Achse senkrecht zur Geraden  $+4$ , und jenseits dieser Geraden für  $-3,5 - 3$  und  $-2,5$  u. s. f. wieder Hyperbeln mit Scheiteln gegen die Gerade; doch fällt die Linie  $-1,7$  schon ganz ins Unendliche. Das ganze Lichtstufensystem hat im Aufriss eine Symmetralachse senkrecht zu  $+4$ , also in der Richtung der Lichtstrahlprojektion.

Der allgemeine Fall der windschiefen Fläche, bei welchem die zweite Richtebene nicht senkrecht zur Horizontalebene als der ersten Richtebene steht, wenn sie auch noch normal zur Vertikalebene bleibt, erfordert anstatt der Seitenprojektion der Fläche und der Parallelkreise eine Projektion beider auf die Richtebene, auf welcher sich die Parallelkreise wieder als Kreise darstellen; im übrigen ändert sich der Gang der Lösung nicht.

#### Schraubenflächen, Wendelflächen.

105.

Schrauben- und Wendelflächen sind in Art. 70 nach ihrer Entstehungsweise erklärt und als Gegenstände der Schattenkonstruktion behandelt. Zum Zweck enger Begrenzung der Anschauung mögen auch hier die Achsen der leitenden Schraubenlinien und also der Flächen selber vertikal gedacht werden (Figur 105a). Alle Arten von Schraubenflächen haben das Gemeinsame, dass sie von konzentrischen Kreiscylindern, deren Achsen mit denen der gegebenen Schraubenlinien zusammenfallen, nach Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe, aber verschiedenen Neigungen geschnitten werden. In einem beliebigen Punkt  $aa$  einer solchen Fläche ist die Berührungsebene bestimmt einerseits durch die erzeugende Gerade  $aba'b'$ , die durch den Punkt geht, andererseits durch die Tangente  $ata't'$  an der Schraubenlinie, welche der durch den Punkt gelegte konzentrische Kreiscylinder als Schnitt mit der Fläche liefert.