



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

Art. 105. Schraubenflächen, Wendelflächen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

stellt. Im Grundriss und Seitenriss erscheint die Projektion je als Strahlenbüschel mit Scheitelbüschel, durchschnitten von vertikalen, beziehungsweise horizontalen Linien.

Die Berührungsebene an der Fläche in einem ihrer Punkte ist bestimmt durch die beiden Erzeugenden H (die horizontale) und G (die geneigte), die durch den Punkt gehen. Denkt man sich den Punkt der Normalkugel, in dem sie von einer gleichgerichteten Ebene berührt wird, so findet sich, dass der horizontale Parallelkreis der Normalkugel in diesem Punkt eine Tangente parallel zur Linie H hat, und der senkrecht zum Grundriss stehende Parallelkreis in diesem Punkt eine Tangente parallel zur Linie G hat. Verschiedenen Punkten der Linie H entsprechen verschiedene horizontale, im Grundriss konzentrische Parallelkreise mit parallelen Tangenten, deren Berührungspunkte im Grundriss der Normalkugel auf einem zur Linie H senkrecht stehenden Radius erscheinen müssen, also im Raum auf einem vertikalen Meridian der Normalkugel liegen. Hieraus folgt: „Alle Lichtstufenpunkte für eine horizontale Erzeugende der windschiefen Fläche sind auf einem Meridian der Normalkugel zu suchen, dessen Vertikalebene senkrecht zu dieser Erzeugenden steht.“ In derselben Weise lässt sich ableiten, indem man sich die oben genannten vertikalen Parallelkreise in der Seitenansicht der Normalkugel gezeichnet denkt: „Alle Lichtstufenpunkte für eine geneigte Erzeugende der windschiefen Fläche liegen auf einem Grosskreis der Normalkugel, dessen Ebene normal steht zu der Erzeugenden.“ Man kann den einen oder andern Satz zur Konstruktion verwerten, im folgenden ist der erste gewählt.

Ein vertikalstehender Meridian, der in der vorherbeschriebenen Weise einer zu seiner Ebene senkrechten horizontalen Erzeugenden H der Fläche entspricht, schneidet die Lichtstufenlinien der Normalkugel in bestimmten Punkten. Durch jeden dieser Punkte ist ein vertikaler Parallelkreis der Kugel senkrecht zum Grundriss zu zeichnen; für jeden dieser Punkte ist ferner zu bestimmen, welche Neigung gegen die Horizontalebene die Tangente an diesem Parallelkreis in ihm darbietet. Sucht man die geneigte Mantellinie der windschiefen Fläche auf, welche mit dieser Tangente gleiche Neigung hat, so schneidet diese Mantellinie die ausgewählte horizontale Erzeugende H in einem Lichtstufenpunkt, der gleichnamig ist mit dem Punkt der Normalkugel, durch welchen der vertikale Parallelkreis gelegt worden ist.

Zur graphischen Durchführung der Konstruktion zeichnet man sich Aufriss und Seitenriss der Fläche mit vielen dichtstehenden geneigten Mantellinien bei wenigen horizontalen Erzeugenden, und fügt in der Seitenansicht zu jeder der ersteren eine Senkrechte, indem man diese Senkrechten gut getrennt hält und wie die Geneigten in der Vorderansicht numeriert. Die Meridiane zeichnet man nur im Grundriss der Normalkugel, wo sie als Radien erscheinen; die vertikalen Parallelkreise zeichnet man im Grundriss und in der Seitenansicht samt dem Lichtstufenpunkt, der auf jedem erscheint, indem man jedem Parallelkreis den Buchstaben der horizontalen Erzeugenden und die Nummer der Lichtstufe beifügt, zu welcher er gehört.

Dann sieht man zu, welche von jenen Senkrechten im Seitenriss der Fläche einem Radius nach einem Lichtstufenpunkt in einem Parallelkreis ganz oder annähernd parallel ist. Die zu der Senkrechten gehörige geneigte Erzeugende schneidet die zu dem Parallelkreis gehörige horizontale Erzeugende in einem Lichtstufenpunkt, der mit demjenigen auf dem Parallelkreis gleichnamig ist. Findet sich keine genau parallele Senkrechte für einen der Parallelkreisradien, so gestattet das Verfahren ein Einschätzen der Lichtstufenpunkte zwischen zweien der geneigten Mantellinien mit genügender Genauigkeit. Andernfalls hat man senkrecht zu diesem Radius eine Mantellinie der Fläche in deren Seitenriss zu ziehen und die Projektion dieser Mantellinie im Aufriss zu bestimmen.

Für die beschriebene Erzeugung der Fläche wird die Kurve $+4$ im Aufriss eine zum Lichtstrahl normale Gerade, im Grundriss eine Parabel, also im Raum eine Parabel, wie bei der andern Erzeugungsweise nach Art. 69e. Nach einem oberflächlichen Versuch scheint auch die Linie $+1,7$ im Aufriss eine Parabel zu werden, deren Scheitel gegen jene Gerade gerichtet ist; die Linien zwischen $+1,7$ und $+4$ scheinen im Aufriss Hyperbeln zu sein, zwischen beiden zuvorgenannten Linien gelegen, mit Scheitel gegen die Gerade und um so flacher werdend, je mehr sie sich ihr nähern. Zwischen dem hellsten Punkt und $+1,7$ dürften sich Ellipsen bilden, mit der grossen Achse senkrecht zur Geraden $+4$, und jenseits dieser Geraden für $-3,5 - 3$ und $-2,5$ u. s. f. wieder Hyperbeln mit Scheiteln gegen die Gerade; doch fällt die Linie $-1,7$ schon ganz ins Unendliche. Das ganze Lichtstufensystem hat im Aufriss eine Symmetralachse senkrecht zu $+4$, also in der Richtung der Lichtstrahlprojektion.

Der allgemeine Fall der windschiefen Fläche, bei welchem die zweite Richtebene nicht senkrecht zur Horizontalebene als der ersten Richtebene steht, wenn sie auch noch normal zur Vertikalebene bleibt, erfordert anstatt der Seitenprojektion der Fläche und der Parallelkreise eine Projektion beider auf die Richtebene, auf welcher sich die Parallelkreise wieder als Kreise darstellen; im übrigen ändert sich der Gang der Lösung nicht.

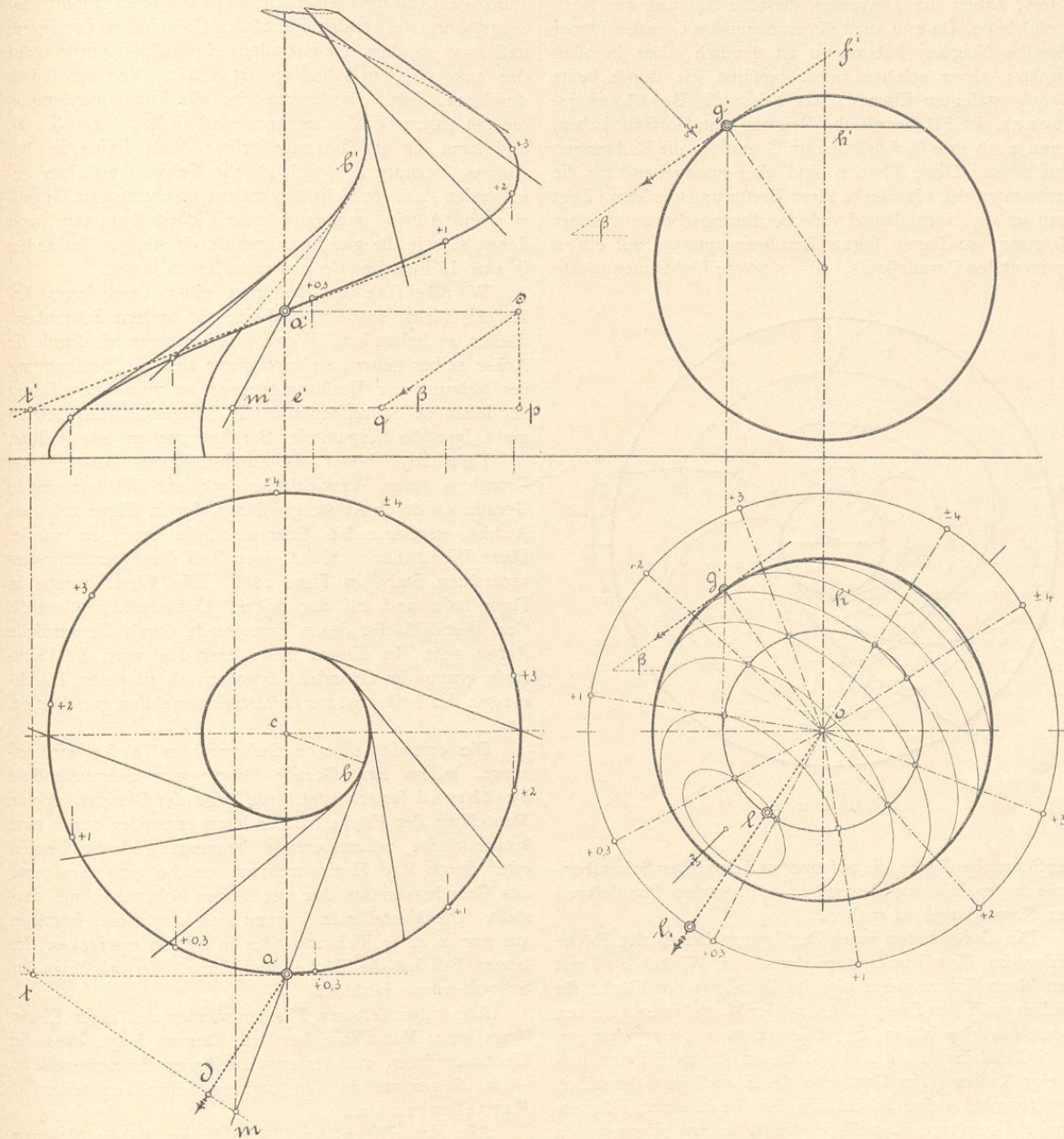
Schraubenflächen, Wendelflächen.

105.

Schrauben- und Wendelflächen sind in Art. 70 nach ihrer Entstehungsweise erklärt und als Gegenstände der Schattenkonstruktion behandelt. Zum Zweck enger Begrenzung der Anschauung mögen auch hier die Achsen der leitenden Schraubenlinien und also der Flächen selber vertikal gedacht werden (Figur 105a). Alle Arten von Schraubenflächen haben das Gemeinsame, dass sie von konzentrischen Kreiscylindern, deren Achsen mit denen der gegebenen Schraubenlinien zusammenfallen, nach Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe, aber verschiedenen Neigungen geschnitten werden. In einem beliebigen Punkt aa einer solchen Fläche ist die Berührungsebene bestimmt einerseits durch die erzeugende Gerade $abab'$, die durch den Punkt geht, andererseits durch die Tangente $ata't'$ an der Schraubenlinie, welche der durch den Punkt gelegte konzentrische Kreiscylinder als Schnitt mit der Fläche liefert.

Es ist also, sobald für einen beliebigen Punkt der Fläche die Projektionen dieser beiden Geraden bekannt sind, nur noch das Problem zu lösen: „Die Lichtstufe einer Ebene zu bestimmen, die durch die Projektionen

zonale Richtungslinie der Berührungsebene und die dazu Senkrechte ad der Grundriss der Gefällslinie. Im Dreieck spq ist $qp = ad$, $sp = a'e'$, also β der Neigungswinkel der Gefällslinie oder Berührungsebene. An den



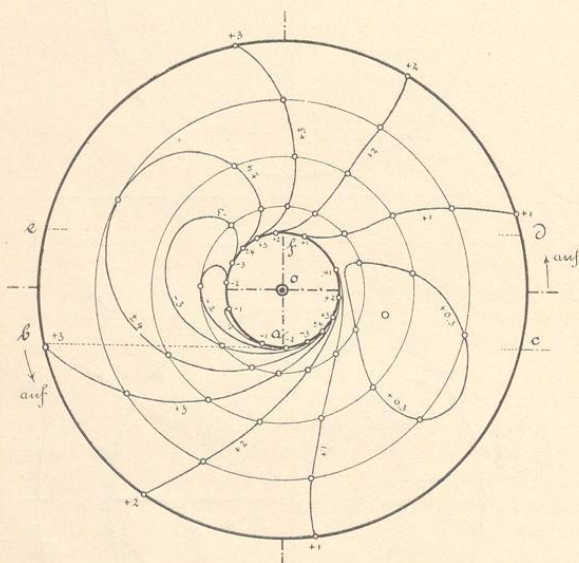
Figur 105a.

zweier sich schneidender Geraden gegeben ist.“ Diese Aufgabe ist in Art. 91 behandelt. Wenn in der Vertikalprojektion die beiden Geraden durch eine beliebige Horizontallinie $m'l'$ geschnitten und die Punkte $m'l'$ in den Grundriss nach mt gelotet werden, so ist mt die hori-

Aufriss der Normalkugel (oder an den zeitweilig als Aufriss aufgefassten Grundriss) ist eine Tangente $f'g'$ parallel zu sq zu ziehen, woraus der Radius $h'g'$ für den horizontalen Parallelkreis des Lichtstufpunktes erhalten wird. Der im Grundriss in diesem Kreis parallel zu ad gezogene

Radius ol liefert den Lichtstufenpunkt l , der dem Flächenpunkt a entspricht.

In allen Punkten einer Schraubenlinie, die ein bestimmter Schnittcylinder der obengenannten Stellung liefert, haben die Tangenten dieselbe Neigung zur Horizontalebene. Da nun auch die erzeugenden Geraden immer dieselbe Neigung haben, so ist deutlich, dass in allen Punkten einer solchen Schraubenlinie die durch beide Gerade gelegten Ebenen, das heisst die Berührungsebenen der Fläche gleiche Neigung zum Horizont haben, wenn auch ihre Gefällslinien im Grundriss alle Richtungen annehmen. Diese Ebenen sind aber massgebend für die Lichtstufen der Flächen in ihren Berührungspunkten. Legt man an die Normalkugel viele Berührungsebenen gleicher Neigung, so liegen deren Berührungspunkte auf einem horizontalen Parallelkreis. Also sind die Lichtstufenpunkte



Figur 105 b.

der Schraubenfläche, die auf einer und derselben Schraubenlinie liegen, alle auf demselben horizontalen Parallelkreis der Normalkugel zu suchen.

Die Gefällslinien jener Berührungsebenen der Fläche bilden im Grundriss immer denselben Winkel dab mit den Mantellinien; wenn also im Grundriss der Fläche die Radien nach den Fusspunkten zweier Mantellinien ca einen Centriwinkel γ bilden, so schliessen auch die zugehörigen zwei Gefällslinien ad und mit diesen die zwei ihnen parallelen Radien ol im Grundriss der Normalkugel denselben Centriwinkel γ ein. Soviel sich also die zu einem Flächenpunkt a gehörige Mantellinie dreht, um zu einem neuen Flächenpunkt zu gelangen, soviel dreht sich auch im Grundriss der Normalkugel der Radius nach dem zu a gehörigen Lichtstufenpunkt, um zum Lichtstufenpunkt des neuen Flächenpunktes zu gelangen.

Aus beiden Betrachtungen ergibt sich der Grundgedanke der Konstruktion wie folgt: Wenn einer der obengenannten Schnittcylinder im Grundriss gezeichnet

und für einen Punkt aa' des Cylinders nach der zuvor gegebenen Vorschrift der gleichhelle Punkt l der Normalkugel in deren Grundriss bestimmt ist, so hat man nur den horizontalen Normalkugelparallelkreis, der durch diesen Punkt geht, mit allen seinen Lichtstufenpunkten proportional vergrössert oder verkleinert auf den Cylinderkreis zu legen, und zwar so, dass der gefundene Normalkugelpunkt l_1 auf den ausgewählten Cylinderpunkt a fällt. Man erhält hiedurch auf dem Cylindergrundriss alle Lichtstufenpunkte, die mit ganzen Zahlen benannt sind (z. B. $a + 2 = l_1 + 2$), und kann sie auf die zugehörigen Mantellinien in den Aufriss übertragen. Durch gleiche Behandlung einer genügenden Zahl von Schnittcylindern erscheinen im Grundriss und Aufriss genügend viele Lichtstufenpunkte, von denen sich je die gleichnamigen durch stetiges Verbinden in eine Lichtstufenlinie zusammenfassen lassen.

Wendelflächen bedürfen einer besonderen Erklärung nicht, sondern sind wie die andern Schraubenflächen zu behandeln. Wenn ihre Erzeugenden durch die Achse selber gehen, so vereinfacht sich die Bestimmung der Neigung der Berührungsebene im vordersten Punkt der leitenden Schraubenlinie; die Tangente dieser letzteren giebt dann die Neigung der Berührungsebene unmittelbar.

Figur 105b bietet als durchgeführtes Beispiel den Grundriss einer Wendelfläche, wie sie die horizontale Gerade ab durch Aufsteigen längs der in Figur 106a als Aufriss erscheinenden Schraubenlinie erzeugen würde. Diese Wendelfläche bildet einen Teil der Oberfläche des verdrehten Stabs in Figur 106a. Die Wendeltreppe in Figur 106c und auf der dritten Lichtdrucktafel enthält eine Wendelfläche, deren Erzeugende durch die vertikale Achse geht. In diesem besonderen Fall wird die Lichtstufengruppe im Grundriss symmetrisch zu einem Durchmesser, der senkrecht zur Lichtstrahlprojektion gerichtet ist.

Die entwickelbare Schraubenfläche wird erzeugt, indem eine Gerade längs einer Schraubenlinie berührend fortschreitet. Jede Lage der Geraden ist eine Mantellinie der Fläche. Diese kann entweder durch eine konzentrische Schraubenlinie begrenzt gedacht werden oder durch ihre Horizontalspur, welche eine Evolvente des Grundrisskreises der gegebenen Schraubenlinie darstellt. Die Mantellinien können sich von dieser letzteren aus nur in einer Richtung oder in beiden erstrecken; im letzteren Fall hat die Fläche zwei Mäntel, die sich längs der Schraubenlinie berühren.

Alle entwickelbaren Flächen werden von einer Ebene längs einer Mantellinie berührt. Daraus folgt, dass die Lichtstufenlinien auf der entwickelbaren Schraubenfläche — im Gegensatz zu den übrigen Schraubenflächen — Mantellinien sind.

Alle Mantellinien der Fläche haben gleiche Neigung gegen die Horizontalebene und stehen im Grundriss normal zu der Evolvente, welche die Horizontalspur der Fläche darstellt. Daraus folgt, dass sich jede Mantellinie als ein sehr schmaler Ausschnitt des Mantels eines geraden vertikalen Kreiskegels auffassen lässt, dessen Mantellinien gleiche Neigung haben wie diejenigen der Schraubenfläche, und wie sich eine solche Mantellinie schattiert als

Bestandteil ihres Kegels, so schattiert sie sich auch als Bestandteil der Schraubenfläche.

Die Neigung der Mantellinien erscheint unmittelbar in den äussersten Mantellinien der Fläche im Aufriss; aus dieser Neigung ergibt sich der horizontale Parallelkreis der Normalkugel, auf welchem die Lichtstufenpunkte zu suchen sind. Zeichnet man den geraden vertikalen Kreiskegel, der die Normalkugel längs dieses Parallelkreises berührt, samt den Mantellinien dieses Kegels nach den Lichtstufenpunkten des Parallelkreises, so hat man nur im Aufriss der Schraubenfläche die gleichgerichteten Mantellinien zu ziehen, um in ihnen die gleichnamigen Lichtstufenlinien der Fläche zu erhalten. Will man sie zuerst oder nur im Grundriss haben, so zieht man im Grundriss der Normalkugel die Radien des Parallelkreises nach dessen Lichtstufenpunkten und dann die dazu parallelen Mantellinien der Fläche in deren Grundriss. Bei der Fläche mit zwei Mänteln ist eine Lichtstufenlinie des unteren nicht auch eine gleichnamige Linie des oberen, weil bei jenem die Spitze des Hilfskegels nach oben, bei diesem nach unten gerichtet ist.

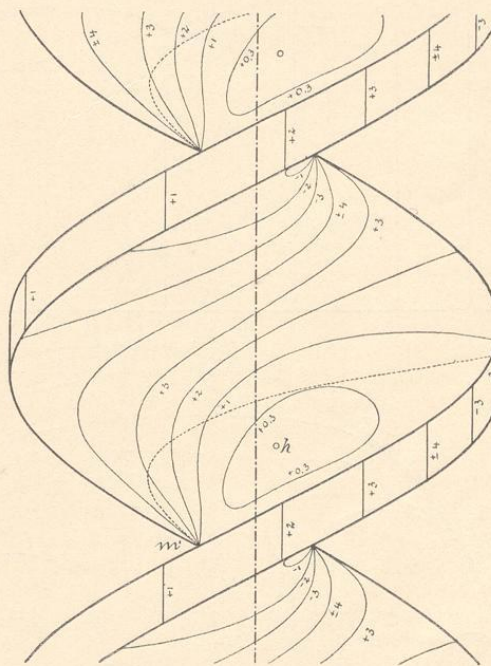
106. Stabformen mit drehend fortschreitendem Querschnitt oder Achsenschnitt. Ringförmig steigendes Tonnengewölbe.

Ein (wagrecht gedachtes) regelmässiges oder unregelmässiges Vieleck, oder ein Rechteck, oder ein Vieleck, dessen gerade Seiten durch bogenförmige konkave oder konvexe Linien ersetzt sind, rückt auf einer senkrecht zu seiner Ebene stehenden Achse derart parallel fort, dass seine Ecken Schraubenlinien beschreiben. Derartige Gebilde sind in der spätgotischen und späromanischen Architektur, ferner in den Arbeiten des Drehers und Kunstschlossers, endlich im Maschinenbau verwirklicht. Für konkave schraubend fortschreitende Linien können etwa Säulen mit gewundener Kannellierung als Beispiele dienen.

Sind die Seiten der beweglichen Figur gerade, so beschreiben sie Wendelflächen, und die Lichtstufenlinien lassen sich dann konstruieren wie oben in Art. 105 beschrieben, sobald eine genügende Zahl von Punkten (worunter der Halbierungspunkt) auf der Polygonseite angenommen und die Neigungen der von diesen Punkten beschriebenen Schraubenlinien bestimmt worden sind. Für die Halbierungspunkte werden die Berührungsebenen vertikal, und die Lichtstufenpunkte finden sich auf dem horizontalen Grosskreis der Normalkugel ganz wie für einen Cylinder vom gleichen Durchmesser wie die von den Halbierungspunkten beschriebene Schraubenlinie.

In Figur 106a erscheinen die Lichtstufenlinien einer Stabform, welche entsteht, wenn das in Figur 105b dargestellte Rechteck $b c d e$ mit zwei geraden und zwei bogenförmigen Seiten sich schraubend um die vertikale Achse o dreht. Die geraden Seiten beschreiben Wendelflächen, die bogenförmigen eine Cylinderfläche mit vertikalen Lichtstufenlinien. Da der Grundriss Figur 105b nur die vom Arm $a b$ beschriebene Wendelfläche darstellt, so gilt dieser Grundriss nur für diejenige Hälfte der im Aufriss

sichtbaren Wendelfläche, die links von der durch den Punkt a beschriebenen Schraubenlinie liegt und im Aufriss als Unterfläche auftritt. Die vom Arm $a c$ beschriebene, von oben sichtbare Hälfte der im Aufriss erscheinenden Wendelfläche folgt einem zweiten Grundriss, der aus Figur 105b durch deren Umlegen um einen zur Lichtstrahlprojektion senkrechten Durchmesser abgeleitet werden kann. Der von oben sichtbare Teil der von $a b$ beschriebenen Fläche ist im Aufriss immer durch die von $a c$ erzeugte Fläche verdeckt, ebenso der von unten sichtbare Teil der von $a c$ beschriebenen Fläche durch die von $a b$ erzeugte. Auf der zweiten Lichtdrucktafel erscheint das Gebilde mit Lichtstufen schattiert.



Figur 106a.

Für diejenigen Stabformen, deren Horizontalschnitte bogenförmig konkave oder konvexe Seiten haben, kann folgende Betrachtung den Weg weisen. Zieht man durch einen Punkt eines (etwa konkav gedachten) Bogens in irgend einem Horizontalschnitt eine Tangente, so ist die Berührungsebene der schraubenförmigen Hohlkehlenfläche in diesem Punkt einerseits bestimmt durch diese horizontale Tangente, andererseits durch die geneigte Tangente an der Schraubenlinie, die der ausgewählte Punkt beschreibt. Bei der Bewegung des Punktes erzeugt die horizontale Tangente eine Wendelfläche. Wie nun auf der Schraubenlinie die Lichtstufenpunkte erscheinen als auf einem Bestandteil dieser Wendelfläche, so erscheinen sie auch, wenn die Schraubenlinie als Bestandteil der schraubenförmigen Hohlkehle aufgefasst wird.

Die Lichtstufenpunkte auf einer solchen Schraubenlinie sind also wie bei den früher betrachteten Schraubenflächen alle auf demselben horizontalen Parallelkreis der