



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Schattenkonstruktion und Beleuchtungskunde

Göller, Adolf

Stuttgart, 1895

Art. 111. Lichtstufen auf beliebig gekrümmten Flächen, erstes Verfahren:
mit geometrischen Orten auf der Normalkugel

[urn:nbn:de:hbz:466:1-96402](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-96402)

die liegende Kathete vom rechteckigen Eckpunkt aus einteilen, so ist auch die Erzeugende im Grundriss vom Mittelpunkt aus durch die Lichtstufenpunkte einzuteilen. Die Durchführung des Verfahrens für eine genügende Zahl von Erzeugenden liefert wie in den früheren Lösungen eine genügende Zahl von Punkten für jede Lichtstufenlinie. Hierbei ist Gebrauch gemacht von der Tatsache, dass für jeden beliebigen Höhenabschnitt einer vertikalstehenden Wendelfläche die Grundrissbogenlängen der auf ihr liegenden Schraubenlinien deren Radien proportional sind. Jene geneigten Parallelen samt der zuerst gezeichneten Hypotenuse können unmittelbar als die Abwicklungen der Schraubenlinien der für die ausgewählte Erzeugende vorgestellten Hilswendelfläche aufgefasst werden, ebenso die Horizontalabschnitte als Verstreckungen der zugehörigen Grundrissbogenlängen.

Die Lösung hat sich verhältnismässig einfach gestaltet, weil es möglich war, jede Lage der Erzeugenden als Bestandteil der einfach zu schattierenden senkrecht stehenden Wendelfläche zu betrachten. Beim allgemeinen Fall des Konoids, wofür etwa das Kugelkonoid mit schrägstehender Geraden als Leitlinie und mit Gleiten der Erzeugenden an einer Kugel anstatt des Kreises in Figur 29b ein interessantes Beispiel wäre, fällt diese Erleichterung weg. Auch nicht als Schraubenfläche darf ein Stück der Fläche zwischen zwei einander naheliegenden Erzeugenden betrachtet werden, da die Winkel mit der festen Geraden sich ändern. Die Auffassung als Bestandteil eines windschiefen Vierecks (hyperbolischen Paraboloids) wäre berechtigt, führt aber zu keiner direkten Lösung. Daher dürfte wie bei der schiefen Kegelfläche nur eine Lösung mit punktweise konstruierten geometrischen Orten möglich sein, wie sie im folgenden in den Grundzügen gegeben ist.

Wie im zuerst betrachteten einfachen Fall und wie bei allen Regelflächen überhaupt besteht die Tatsache, dass die Lichtstufenpunkte für jede der Erzeugenden E auf einem Meridian ME der Normalkugel zu suchen sind, dessen Ebene normal steht zur Erzeugenden, also hier vertikal steht. Wenn noch für einen Punkt der Erzeugenden die Neigung der Tangente N an der Schnittlinie der Fläche mit der zur Erzeugenden normalen Ebene bekannt ist, so kann für diesen Punkt der zugehörige Normalkugelpunkt angegeben werden; es ist derjenige Punkt des Meridians ME , in welchem die Meridiantangente dieselbe Neigung hat wie die Tangente N .

Ein beliebiger Vertikalschnitt V der Fläche, der senkrecht zum Grundschnitt gerichtet sein mag, kann für jeden Punkt, in dem er eine Erzeugende E schneidet, diese Neigung liefern. Man zeichnet die Schnittkurve des Vertikalschnitts V und in jedem Punkt, in welchem er eine der ausgewählten Erzeugenden E schneidet, die Tangente S an der Vertikalschnittkurve. Diese Tangente S hat man rechtwinklig auf die zur Erzeugenden E normale Ebene zu projizieren, um in dieser die Normaltangente N zu erhalten.

Hienach lässt sich für jeden Schnittpunkt der Vertikalschnittkurve V mit einer Erzeugenden E der entsprechende Punkt P der Normalkugel bestimmen. Verbindet man auf

der Normalkugel alle zu einem Vertikalschnitt V gehörigen Punkte P durch eine Kurve, so ist diese der geometrische Ort der Lichtstufenpunkte für eine Vertikalschnittkurve V . Diese Raumkurve auf der Kugel schneide z. B. den Lichtstufenkreis $+3$ in einem bestimmten Punkt. Durch diesen Punkt legt man einen Vertikalschnitt der Normalkugel parallel zum Vertikalschnitt V , zieht an den Schnittpunkt eine Tangente im Punkt $+3$ und dazu eine parallele Tangente an die Vertikalschnittkurve V . Der Berührungspunkt auf dieser letzten ist der Lichtstufenpunkt $+3$ auf der Fläche.

Eine zweite Lösung, bei welcher der geometrische Ort nicht auf der Normalkugel, sondern auf der Fläche selber sich bildet, ist die folgende. Der zu einer Erzeugenden E gehörige vertikalstehende Kugelmeridian M schneide die Lichtstufenlinie $+3$ in einem Punkt R . Durch R legt man einen vertikalen Parallelkreis, dessen Ebene denjenigen der Vertikalschnitte $V_1 V_2 V_3 \dots$ der Fläche parallel ist, also nach der für diese getroffenen Wahl auch senkrecht zum Grundschnitt steht. In R zieht man eine Tangente an den Parallelkreis, dann an die getrennt herausgetragenen Schnittkurven $V_1 V_2 V_3 \dots$ parallele Tangenten. Die Berührungspunkte dieser letzten überträgt man in den Grundriss oder Aufriss und verbindet sie durch eine stätige Kurve. Wo diese die Erzeugende E schneidet, da ist der Lichtstufenpunkt $+3$ auf dieser. Selbstverständlich wird man die parallelen Tangenten nur an etwa vier Vertikalschnittkurven V ziehen, bei denen die Berührungspunkte in die Nähe der Schnittpunkte der Kurven mit der Erzeugenden fallen. Da diese Schnittpunkte zum Heraustragen der Kurven V dienen, also von Anfang auf ihnen vorhanden sind, so ist die Auswahl der vier Kurven leicht zu treffen (eine dritte Lösung s. Art. 111 am Schluss).

Lichtstufen auf beliebig gekrümmten Flächen, 111.
erstes Verfahren: mit geometrischen Orten auf der Normalkugel.

Bei allen bisher beschriebenen gekrümmten Flächen ist das Verfahren zur Bestimmung der Lichtstufenlinien einem bestimmten Erzeugungsgesetz angepasst worden. Andere Flächen als die betrachteten dürften zwar selten mit Lichtstufen zu schattieren sein; doch ist vom rein wissenschaftlichen Standpunkt aus die Aufgabe der Beleuchtungskunde mit solcher Einzelkonstruktion noch nicht gelöst. Sie ist es offenbar erst dann, wenn alle Flächen in derselben Weise schattiert werden können wie die bisher betrachteten, das heisst wenn ein allgemein gültiges Verfahren für alle gekrümmten Flächen gefunden ist, ähnlich wie es für die Bestimmung der Schattengrenzen in Art. 28 vorliegt. Den im Früheren betrachteten Lösungen muss ein gemeinschaftlicher Grundgedanke zu eigen sein, dessen Durchführung sich in ihnen verhältnismässig einfach gestaltet hat, weil das Erzeugungsgesetz der Flächen ein einfaches war oder eine günstige Verwandtschaft mit dem der Kugel darbot. Diesen Grundgedanken auszuziehen und seine Verwertung ohne Eingehen auf ein bestimmtes Erzeugungsgesetz zu zeigen, ist im vorliegenden Artikel versucht.

Für jeden Punkt x einer gekrümmten Fläche ergeben sich unmittelbar aus dem Erzeugungsgesetz zwei in der Oberfläche liegende, im allgemeinen gewundene Linien, die durch den Punkt x gehen und in beiden Projektionen gezeichnet werden können. Eine dieser Linien ist eine Lage der erzeugenden Linie oder findet sich aus einer Lage der erzeugenden Fläche, die andere bestimmt sich aus deren Bewegung. Zieht man in dem betrachteten Punkt x die beiden Tangenten, so bestimmt deren Ebene den für x gültigen Lichtstufenpunkt auf der Normalkugel. Auf jeder beliebig gekrümmten Fläche lässt sich somit für jeden Punkt die Lichtstufe angeben. Damit ist aber das Problem der Beleuchtungskunde für die Fläche nicht gelöst, indem die gefundenen Lichtstufen beliebig ausgewählter Flächenpunkte im allgemeinen keine ganzzahligen sind, also das Zusammenfassen in Lichtstufenlinien nicht gestatten oder nur eine unsichere Schätzung über deren Verlauf ermöglichen. An die beiden unmittelbar gegebenen Flächenlinien eines Punktes ist keine allgemeingültige Lösung anzuknüpfen; eine solche erfordert ebene Kurven mit leicht festzuhaltender Lage ihrer Ebenen.

Ein erstes allgemeines Verfahren lässt sich als dasjenige „der geometrischen Orte auf der Normalkugel“ bezeichnen. Man zeichnet auf der gegebenen Fläche die Schnittlinie mit einer horizontalen Ebene, bestimmt für eine Anzahl von Punkten dieser Linie die Lichtstufenpunkte auf der Normalkugel in deren Grundriss und verbindet diese Kugelpunkte durch eine stetige Kurve. Diese ist der geometrische Ort, auf welchem auch alle andern Lichtstufenpunkte jener Schnittlinie zu suchen sind. Die Kugelkurve schneidet die Lichtstufenkreise der Kugel in bestimmten Punkten. Wenn man nun durch den Schnittpunkt der Kurve mit der Linie $+3$ den horizontalen Parallelkreis der Kugel legt und an diesen im Punkt $+3$ eine Tangente zieht, ferner an jene horizontale Schnittkurve auf der Fläche eine parallele Tangente zieht, so ist der Berührungspunkt dieser letzten ein Lichtstufenpunkt $+3$ auf der Fläche. (Anstatt der Tangente am Normalkugelkreis wird man nur den zugehörigen Radius ziehen und die Tangente der Flächenkurve senkrecht zu diesem Radius stellen, wie in Art. 99, 100 und 102, wo ebenfalls immer die Vorstellung paralleler Tangenten zu Grunde lag.)

Weitere Tangenten in weiteren ganzzahligen Punkten der Kugelkurve geben weitere ganzzahlige Lichtstufenpunkte auf der Horizontalkurve der Fläche, und weitere Horizontalschnitte der Fläche liefern weitere geometrische Orte auf der Kugel und damit weitere Gruppen von Lichtstufenpunkten auf der Fläche.

Dieses Verfahren ist schon im früheren bei der schiefen Kegelfläche in Art. 102 zur Anwendung gebracht worden. Dort war jedoch eine der beiden Flächenlinien eine Gerade und dadurch die Bestimmung der Lichtstufenpunkte vereinfacht. Im allgemeinen Fall ist es nötig, ausser den horizontalen Schnittebenen auch noch vertikale beliebiger Richtung einzuführen, die sich im Grundriss als gerade Linien projizieren und deren Schnittkurven am besten getrennt herausgetragen werden. Wenn eine solche vertikale Schnittkurve eine horizontale in einem Punkt x schneidet, so zieht man Tangenten an beide Schnittkurven

im Punkt x . Die Richtung der horizontalen bestimmt einen Grosskreis auf der Kugel, der sich im Grundriss als Radius senkrecht zu dieser Tangente projiziert (die „geographische Länge“ des Lichtstufenpunktes); die geneigte Tangente, rechtwinklig projiziert auf eine Ebene, die senkrecht zur Horizontaltangente steht, erscheint in dieser Projektion als Gefällslinie der Berührungsebene und bestimmt in bekannter Weise einen horizontalen Parallelkreis (als „geographische Breite“) im Grundriss der Normalkugel, dessen Schnitt mit jenem Radius den Lichtstufenpunkt für den Flächenpunkt x darstellt. Dieses Verfahren, für jeden Schnittpunkt x einer Horizontalkurve durchgeführt, liefert die Reihe der Lichtstufenpunkte und damit den geometrischen Ort für die Horizontalkurve.

Als vertikale Schnittebenen wird man in erster Linie solche zu benützen suchen, welche der Lichtrichtung parallel stehen. Die mit ihnen erhaltenen Schnittkurven können nicht nur gleichzeitig zur Bestimmung von Schlagschattengrenzen dienen, sondern auch eine Probe für die Kurve ± 4 liefern; die Berührungspunkte dieser Kurven mit den Lichtstrahlen müssen ja Punkte der Kurve ± 4 sein.

In andern Fällen werden Vertikalschnitte senkrecht zum Grundschnitt, die auch im Aufriss geradlinig erscheinen, die meist geeigneten sein, in wieder andern Vertikalschnitte verschiedener Grundrissrichtungen, welche sich etwa den verschiedenen Lagen einer Erzeugenden anpassen.

Bei bestimmten Lagen der Flächen treten an die Stelle der in der voranstehenden Lösung als erste Kurvengruppe verlangten Horizontalschnitte solche parallel zur Vertikalebene, und an die Stelle der vertikalen Schnitte solche senkrecht zur Vertikalebene, entweder mit Richtung parallel zum Lichtstrahl oder senkrecht zum Grundschnitt oder irgend einer andern gleichbleibenden oder veränderlichen Aufrissrichtung. Die geometrischen Orte auf der Normalkugel sind dann für die zur Vertikalebene parallelen Schnittkurven aufzusuchen und werden im Aufriss der Normalkugel, anstatt im Grundriss gezeichnet. So können z. B. bei Regelflächen mit horizontalen Erzeugenden keine Tangenten an Horizontalschnittkurven gezogen werden, weil diese letzten zu geraden Linien geworden sind; hier müssen also notwendig andere Parallelschnitte, welche Kurven liefern, eingeführt werden.

In wieder andern Fällen ist die erste Schnittebenen-Gruppe, für deren Kurven die geometrischen Orte auf der Kugel zu suchen sind, parallel zur Seitenebene zu wählen, wie es für das Kugelkonoid in Art. 110 geschehen ist. Die horizontalen Schnitte waren aus dem eben angegebenen Grund ausgeschlossen; Schnitte parallel zur Vertikalebene wären wegen ihrer viel zu schiefen Winkel mit den Erzeugenden auch nicht zweckmässig gewesen.

Eine letzte Stellung, die für die erste Parallelschnittebenen-Gruppe zweckmässig sein kann, ist diejenige mit schiefem Winkel gegen zwei Grundebenen bei Richtung normal zur dritten; sie kann sich empfehlen, wenn sie dem Entstehungsgesetz und der Lage der Fläche in besonders hohem Mass entspricht und die Ableitung der andern Schnittkurven schwierig wäre. Doch wird hiebei für die Erleichterung in der einen Seite der Lösung weit

grösserer Arbeitsaufwand in der andern eingetauscht. Schiefgerichtete Schnittebenen, die nicht wenigstens senkrecht zu einer Grundebene stehen, dürften ausgeschlossen sein.

Das umständliche Projizieren der in den Vertikalschnittebenen der ursprünglichen Lösung gelegenen geneigten Tangenten auf die zu den Horizontaltangenten normalen Ebenen kann umgangen werden, indem man Gebrauch macht von der in Art. 91 angegebenen Lichtstufenbestimmung für eine Ebene, die gegeben ist durch ihre Horizontalrichtung und irgend eine ihr angehörige geneigte Gerade. Der geometrische Ort der Berührungspunkte aller Tangenten, die an die Normalkugel parallel zu einer der geneigten, in den Vertikalschnittebenen liegenden Flächentangenten N gezogen werden können, ist ein Grosskreis, dessen Ebene senkrecht zur Tangente steht; er projiziert sich im Grundriss als eine Ellipse E , deren grosse Achse senkrecht zum Grundriss der Vertikalschnitte V gerichtet und deren kleine Achse gleich ist dem Normalkugeldurchmesser mal dem Sinus des Neigungswinkels der Tangente. Wo diese Ellipse den Radius R schneidet, der im Grundriss der Normalkugel senkrecht zur zugehörigen Horizontaltangente H steht, da ist der Lichtstufenpunkt L . Bei dieser Abänderung des oben beschriebenen allgemeinen Verfahrens tritt also an die Stelle der Projektion der geneigten Tangente diese selbst und an die Stelle des Horizontalkreises die Grosskreisellipse.

Diese Thatsache lässt sich in folgender Weise zu einem mechanischen Hilfsmittel verwerten. Auf durchsichtigem Papier wird ein Kugelgrundriss ebensogross wie das Normalkugelbild, aber ohne Lichtstufenlinien, mit den elliptischen Projektionen von etwa 16 bis 32 zu einem Horizontaldurchmesser gehörigen Grosskreisen gezeichnet und über diesem vertikal dargestellten Durchmesser die Tangentenneigungen, die senkrecht zu den Ebenen der Grosskreise stehen, so beigefügt, dass durch Verbindungslinien die zu jeder Neigung gehörige Ellipse leicht herausgefunden werden kann. Dieses Blatt wird zuerst auf der Vertikalschnittkurve V mit immer vertikalbleibendem Durchmesser so verschoben, dass die Tangente N an dieser mit einer der Tangenten des Blattes zusammenfällt oder zwischen zwei Tangenten fällt und die zugehörige Ellipse E bezeichnet oder eingeschätzt werden kann. Dann wird das Blatt auf den Normalkugelgrundriss gelegt und dabei die ursprünglich vertikale grosse Ellipsenachse senkrecht zur Grundrissrichtung der Vertikalschnitte V gelegt, worauf der Schnittpunkt der eingeschätzten Ellipse E mit dem Radius R auf diesen durchgestochen werden kann; dieser Punkt ist der gesuchte Lichtstufenpunkt L . Das Hilfsblatt kann für alle Schnittpunkte von Horizontal- und Vertikalkurven in gleicher Weise benützt werden und für alle Arten von Flächen dieselben Dienste leisten, ohne die Genauigkeit des Resultats in ungünstiger Weise zu vermindern.

Noch auf einem andern Weg lassen sich die Parallelkreise der Lichtstufenpunkte mit Umgehung jenes Projizierens schräggeneigter Tangenten erhalten, und es dürfte sogar, wenn keine Schlagschattengrenzen mitzubestimmen sind, dieser letzte Weg für die meisten Flächen der kür-

zeste sein. Man zeichnet im Grundriss der Fläche über deren Horizontalkurvensystem weg und nur nach Schätzung weitere Kurven, welche alle Horizontalkurven rechtwinklig durchschneiden, sogenannte „Trajektorien“ und betrachtet sie als Grundrisse von Linien auf der Fläche. Jede Tangente an einer solchen Flächenkurve im Raum ist zugleich die Gefällslinie der Berührungsebene der Fläche in demselben Berührungspunkt, so dass die im allgemeinen gewundene Kurve eine „Gefällskurve“ der Fläche heissen kann, womit ausgedrückt ist, dass sie in jedem ihrer Punkte nach Horizontalrichtung und Neigung die grösste Horizontalneigung der Fläche verwirklicht. (Ein Punkt auf der Fläche, der nur der Schwerkraft folgen würde, müsste sich auf einer „Gefällskurve“ bewegen.) Durch Verstreckung ihres projizierenden Cylinders herausgetragen, giebt eine solche Linie in jedem Schnittpunkt mit einer der Horizontallinien unmittelbar die Neigung der Fläche in diesem Punkt und damit durch ihre Tangente in diesem Punkt den Parallelkreis der „geographischen Breite“ des zugehörigen Lichtstufenpunktes auf der Normalkugel. Es genügt, die „Trajektorien“ ganz oder als beliebig lange Bruchstücke nur nach Schätzung zu zeichnen, da der Neigungswinkel, den sie allein liefern sollen, auch bei ziemlich stark unrichtiger Schätzung noch ebenso genau richtig erhalten wird, als die übrigen Resultate der Konstruktion erhalten werden können. Diese Thatsache beruht darauf, dass eine gerade Strecke, rechtwinklig auf eine andere Gerade sehr wenig verschiedener Richtung projiziert, in der Projektion fast unverändert lang auftritt.

Handelt es sich nur um die Bestimmung der Lichtstufe eines einzelnen Flächenpunktes, so wird man ein Bruchstück der Trajektorie durch den Punkt nur etwa über zwei oder drei Horizontalkurven weg zu beiden Seiten des Punktes zeichnen; sollen die geometrischen Orte für viele Horizontalkurven zugleich gesucht werden, so wird man die meisten Trajektorien so weit als möglich durchführen. Sie vereinigen sich im höchsten Punkt der Fläche.

Bei allen beschriebenen Konstruktionen zur Bestimmung des geometrischen Ortes auf der Normalkugel wird man das oft sich wiederholende Auftragen geradliniger Reihen von Punkten mit einem Papierstreifen vornehmen.

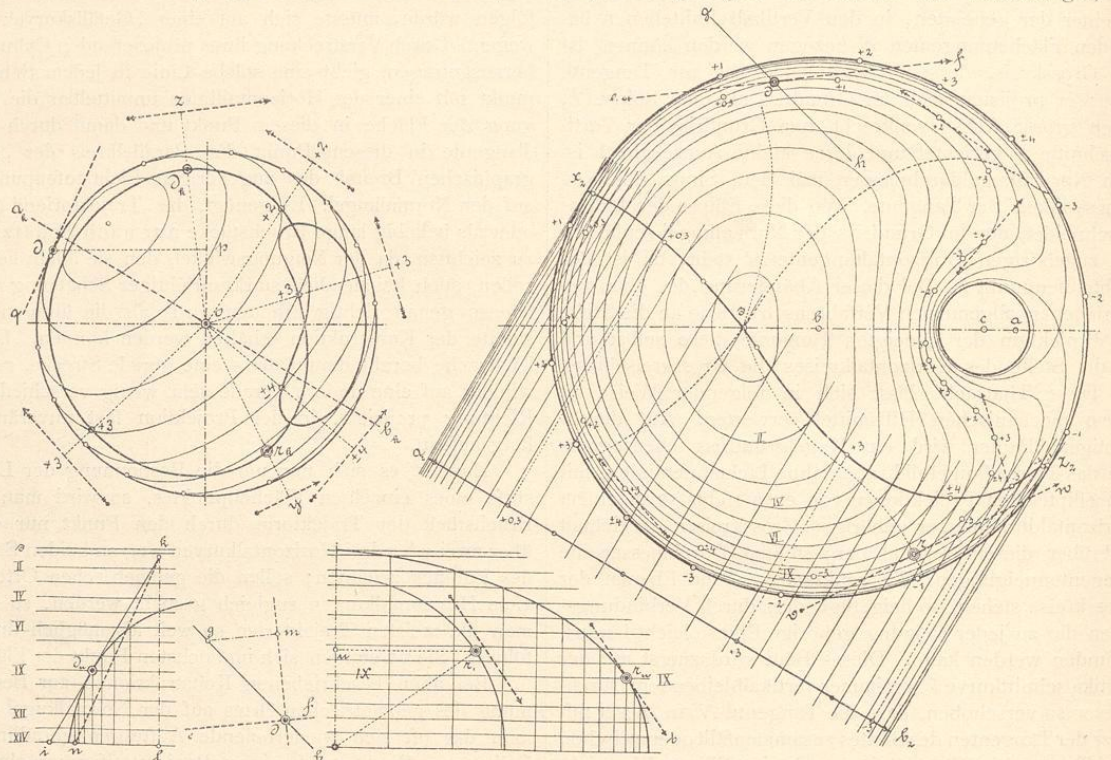
In Figur 111a–c ist ein Beispiel für die beschriebene allgemeine Lösung gezeichnet; Figur 111a rechts zeigt das gewählte Gebilde, das sich als „exzentrische Wulstfläche“ benennen liesse, im Aufriss. In einer zur Vertikalebene parallelen Ebene liegt ein Kreis mit dem Mittelpunkt b , der einen andern, nicht konzentrischen, mit dem Mittelpunkt c einschliesst; die Fläche erzeugt sich durch einen beweglichen veränderlichen Kreis, dessen Ebene immer senkrecht zu derjenigen der festliegenden Kreise steht und dessen Durchmesser die zwischen beiden gelegene Strecke auf dem verlängerten Halbmesser des kleineren Kreises ist. (Richtiger wäre es, den Durchmesser auf einer Sehne durch den in beiden Kreisen geometrisch ähnlich liegenden Punkt a anzunehmen; es wäre dann keiner der beiden festen Kreise bevorzugt. Doch würde sich hiedurch die Fläche nur wenig ändern.)

Hier empfiehlt sich als erste Schnittkurvengruppe

offenbar eine solche parallel zur Vertikalebene; sie ist mit der Hilfsfigur 112a links rasch erhältlich. In dieser Figur sind 14 Lagen des erzeugenden Kreises konzentrisch gezeichnet und durch 15 Horizontallinien, welche die Schnittebenen bedeuten, durchschnitten. Der höchste Punkt jedes Kreises erscheint im Aufriss der Fläche als Halbierungspunkt des Sehnenstücks, in welchem sich der Kreis projiziert; die Abstände der Schnittpunkte des Kreises mit jeder der Horizontallinien vom vertikalen Radius der Hilfsfigur sind dieser zu entnehmen und auf dem Sehnenstück von jenem Halbierungspunkt aus nach rechts und links aufzutragen. (Da die Ebene der festen Kreise und die erste Schnittebenengruppe nicht horizontal sind, so

Tangente in einem gegebenen Punkt genau richtig gezogen werden, an jene andern Schnittkurven nicht. Um dem allgemeinen Fall der gekrümmten Fläche möglichst nahe zu bleiben, ist die Einfachheit der Kreislinie nicht ausgenützt und die zweite zur Vertikalebene senkrechte Schnittebenengruppe parallel zur Lichtrichtung angenommen.

Zur Darstellung der Konstruktion des geometrischen Ortes auf der Kugel und der ganzzahligen Lichtstufpunkte auf der Fläche ist die Schnittkurve IX ausgewählt. In einem beliebigen Punkt d dieser Kurve ist deren Tangente ef und die Schnittlinie gh parallel zur Lichtstrahlprojektion gezogen. Im Aufriss der Normalkugel, Fi-



Figur 111a.

erscheint die Lösung nicht ganz in der ursprünglich beschriebenen Gestalt; doch wäre es leicht, die gegebene Figur mit allen im folgenden darauf erscheinenden Linien als Grundriss aufzufassen, indem man sie um 90° gedreht vorstellt.)

Da eine Selbstbeschattung stattfindet, so liegt ein Grund vor, die zweite, zur Vertikalebene senkrechte Schnittebenengruppe parallel zur Lichtrichtung einzuführen, um die Schnittkurven zugleich zur Schlagschattenbestimmung und zur Probe für die Kurve ± 4 benützen zu können. Aber auch die Benützung der Ebenen des erzeugenden Kreises als der zweiten Schnittebenengruppe hätte einen grossen Vorzug; diese Kreise sind schon in der Hilfsfigur 112a links vorhanden, wogegen jene andern Schnittkurven neu abzuleiten sind, und an einen Kreis kann die

Figur 111a links, erscheint als erster geometrischer Ort des zu d gehörigen Lichtstufpunktes der Radius oz senkrecht zu ef . Die Ebene gh , welche zum Zweck der Schlagschattenkonstruktion und Verwertung bei andern Vertikalschnittkurven durch die ganze Fläche zu führen wäre, liefert die in Figur 111a links unten herausgetragene Schnittkurve durch Auftragen der Abscissen und Ordinaten; ik ist die Tangente dieser Kurve im Punkt d , der in dieser Hilfsfigur den Flächenpunkt d darstellt. Der rechts hievon beigezeichnete Aufriss zeigt in gh und ef die Richtungen gh und ef aus dem Flächenaufriss wiederholt; dm ist senkrecht zu ef , kl eine Vertikale an beliebiger Stelle, $dg = li$, gm senkrecht zu dm , $ln = dm$; kn ist die Projektion der in der Ebene dg liegenden Flächentangente ki auf die Ebene dm , das heisst auf eine

Schnittebene der Fläche, die senkrecht zu ef gerichtet ist, also die Neigungslinie der Berührungsebene der Fläche im Punkt d in Beziehung auf die Vertikalebene. An einem Normalkugelumriss ist die Tangente qd_1 parallel nk gezogen, deren Berührungspunkt d_1 bestimmt und im Aufriss der Normalkugel auf dem zuvor bestimmten Radius $od_k = pd_1$ aufgetragen; d_k ist der Lichtstufenpunkt auf der Kugel für den Flächenpunkt d . Durch Annahme weiterer Punkte d auf der Kurve IX erhält man die im Aufriss der Kugel gezeichnete Kurve als geometrischen Ort der Berührungspunkte aller Tangentialebenen, welche den längs der Kurve IX an die Fläche gelegten Tangentialebenen parallel sind. Wegen der Symmetrie der Fläche und der Kurve IX zu der Ebene sbc wird auch die Kugelkurve symmetrisch zu einer gleichgerichteten Grosskreisebene.

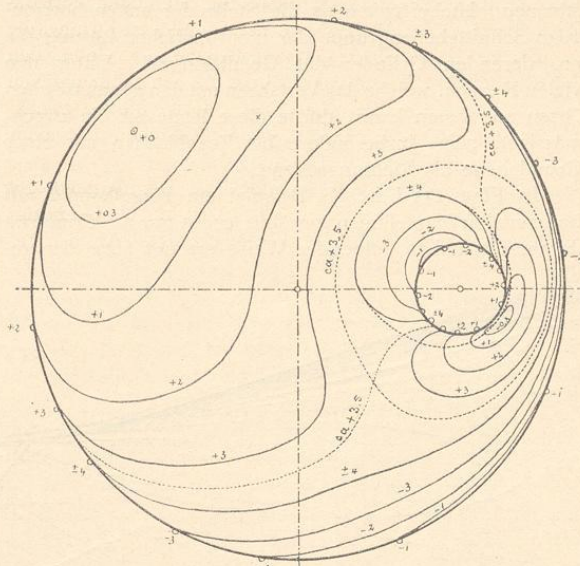
Auf der Flächenkurve IX ist ein zweiter Punkt r ausgewählt, um die oben beschriebene Verwertung der Trajektorien zu zeigen. Die punktierte Kurve sr ist die nur nach Schätzung eingetragene Trajektorie oder, räumlich aufgefasst, „Maximalneigungskurve“ für die Vertikalebene, fortgesetzt bis zum Flächenscheitel s . In Figur III a rechts unten ist die Verstreckung dieser Kurve und ihres projizierenden Cylinders ganz herausgetragen, obwohl zum Ziehen der Tangente tr_u nur ein kleines Stück nötig gewesen wäre. Punkt r_1 am Kugelbild entsteht durch hr_1 senkrecht zu tr_u . Im Aufriss der Normalkugel ist der Radius oy senkrecht zur Tangente vw gezogen und $or_k = ur_1$ aufgetragen; r_k ist der zu r gehörige Lichtstufenpunkt.

Ist in dieser oder der erstbeschriebenen Weise die Kurve des geometrischen Ortes für die Berührungsebenen längs der Flächenlinie IX bestimmt, so zieht man die Radien nach den Schnittpunkten dieser Kurve mit den Lichtstufenellipsen des Kugelbildes. In der Figur sind zur Darstellung dieses Teils der Konstruktion die Schnittpunkte mit den Ellipsen $+2 + 3 + 4$ ausgewählt. Eine Tangente an die Flächenlinie IX senkrecht zu dem nach dem Schnittpunkt $+2$ gezogenen Radius liefert als Berührungspunkt einen Lichtstufenpunkt $+2$ der Fläche. Die drei zu den Kugelpunkten gehörigen Tangenten sind durch Querstriche hinter den Pfeilen unterschieden. (Nicht an jeder Stelle der Flächenlinie, an welcher eine solche Tangente möglich ist, darf sie gezogen werden. Wenn etwa die Kugelkurve eine Lichtstufenellipse $+3$ viermal schneidet, wie im vorliegenden Fall, so ist wohl zu untersuchen, zu welchem Teil der Flächenkurve jeder Schnittpunkt gehört.)

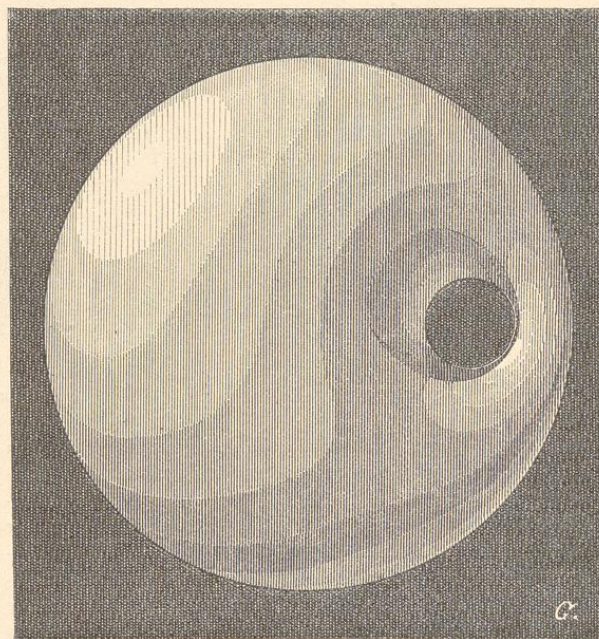
Zur Durchführung des Verfahrens würde man noch etwa die Vertikalschnittkurven II , IV , VI auszuwählen und für jede ein eigenes Kugelbild mit dem geometrischen Ort wie für die Linie IX zu zeichnen haben; weitere zur Konstruktion gehörige Bemerkungen sind in Art. 113 ausgesprochen. Figur III b zeigt die Lichtstufenlinien und Schlagschattengrenzen des betrachteten Gebildes; in Figur III c erscheint es mit durchgeführter Schattierung.

Ausser der schon anfangs erwähnten schiefen Kreiskegelfläche und Kegelfläche mit beliebiger Basis war das Kugelkonoid in Art. 110 ein Beispiel für diese erste allgemeine Lösung. Nur erschien sie dort mit der Umkeh-

rung, dass die zweiten Schnittebenen auf der Kugel, anstatt auf der Fläche und die geometrischen Orte auf der Fläche, anstatt auf der Kugel gesucht wurden. Diese Umkehrung ist bei allen Regelflächen mit Richtebenen für



Figur III b.



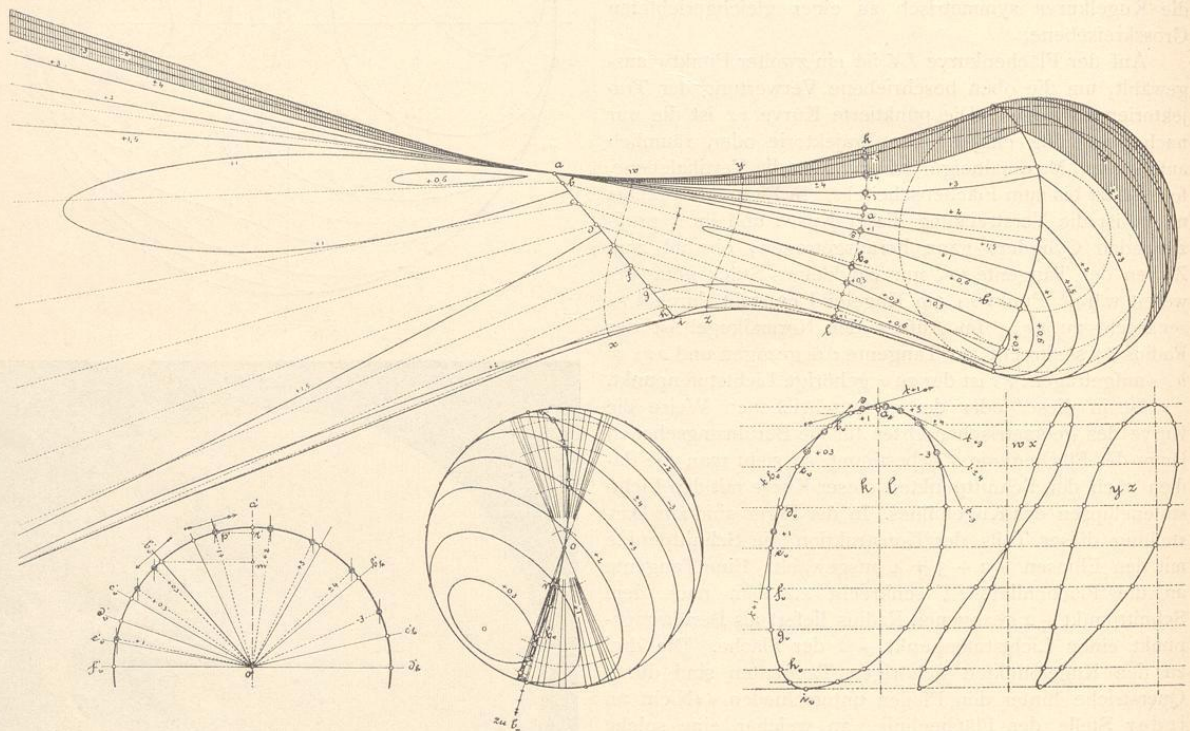
Figur III c.

die Erzeugenden möglich, aber auch nur bei diesen Flächen.

Eine letzte Variante der beschriebenen allgemeinen Lösung erscheint, wenn die Trajektorien nicht nur als

Hilfsmittel zum Aufsuchen der geometrischen Orte für andere Schnittkurven dienen, sondern für sich selber, oder vielmehr für die Gefällskurven, deren Projektionen sie darstellen, die geometrischen Orte auf der Kugel bestimmen. Hierbei treten an die Stelle der ersten horizontalen Schnittebenengruppe der ursprünglichen Lösung die projizierenden Cylinder der Gefällskurven. Unter den vielen Formen, welche das Verfahren mit den geometrischen Orten annehmen kann, dürfte diese letzte oft die zweckmässigste sein, insbesondere bei Regelflächen mit einer Grundebene als Richtungsebene.

In Figur III d ist als Beispiel ein Kugelkonoid mit horizontalen Mantellinien gewählt; es ist nur als Grundriss dargestellt und in folgender Weise erzeugt. An der ge-



Figur III d.

zeichneten Kugel einerseits und der geneigten Geraden ai andererseits gleitet eine horizontale Gerade; die höchstliegende Tangente der Kugel geht durch a , die tiefstliegende durch i ; von den sieben andern Punkten der Linie ai sind als Mantellinien der Fläche je zwei Tangenten an einen gleich hoch liegenden horizontalen Parallelkreis der Kugel gezogen. Die an der Vorderseite der Kugel berührende, durch b gezogene Mantellinie ist mit b_v bezeichnet. (Zwei weitere benützte Punkte der Linie ai sind nur in den Hilfsfiguren eingetragen.) Nur die von oben sichtbaren Mantellinien sind im Flächengrundriss gezeichnet und zwar punktiert, um sie von den Lichtstufenlinien zu unterscheiden.

Für jede horizontale Mantellinie liegen die Lichtstufenpunkte auf einem vertikalen Grosskreis, dessen Ebene

normal zur Mantellinie gerichtet ist, und der im Grundriss der Normalkugel (zweite Hilfsfigur unten) als Radius erscheint. Hieraus ergeben sich die zwei Strahlenbüschel, welche sämtliche Lichtstufenpunkte der Kugel, die denen der Fläche entsprechen, in sich schliessen müssen. Im Grundriss der Fläche ist die Trajektorie kl gezogen, welche alle von oben sichtbaren Mantellinien ganz oder annähernd rechtwinklig schneidet. Aus der Verstreckung ihrer zwischen den Mantellinien liegenden Stücke und aus der Höhenlage der Mantellinien ergab sich die in der dritten Hilfsfigur gezeichnete Linie als „abgewinkelte Gefällskurve $k'l'$ “ der Fläche (zwei weitere solche Kurven sind beigelegt). Im Schnittpunkt b_v dieser Kurve, der der Höhenlage der Mantellinie b_v entspricht, ist eine Tangente tb_v

gezo-gen und im Aufriss der Normalkugel (erste Hilfsfigur) ein Radius $o'b_v$ senkrecht zu dieser Tangente. Im Grundriss der Normalkugel ist auf dem zur Mantellinie b_v normalen Radius das Mass ob_v gleich dem im Aufriss erhaltenen Horizontalmass $m'b_v$ aufgetragen und dadurch der Punkt b_v des geometrischen Ortes auf der Normalkugel bestimmt, welcher der Flächenkurve kl entspricht. Die Figuren lassen auch die Bestimmung weiterer Punkte des geometrischen Ortes verfolgen.

Die für diesen erhaltene Kurve schneidet die Lichtstufenlinie $+1$ in einem Punkt n . Im Aufriss der Normalkugel ist Punkt p' bestimmt durch $r'p' = on$. An die Kurve kl ist eine Tangente $t+1$ normal zum Radius $o'p'$ gezogen; der Berührungspunkt s dieser Tangente ist der Lichtstufenpunkt $+1$ in der abgewinkelten Gefällskurve.

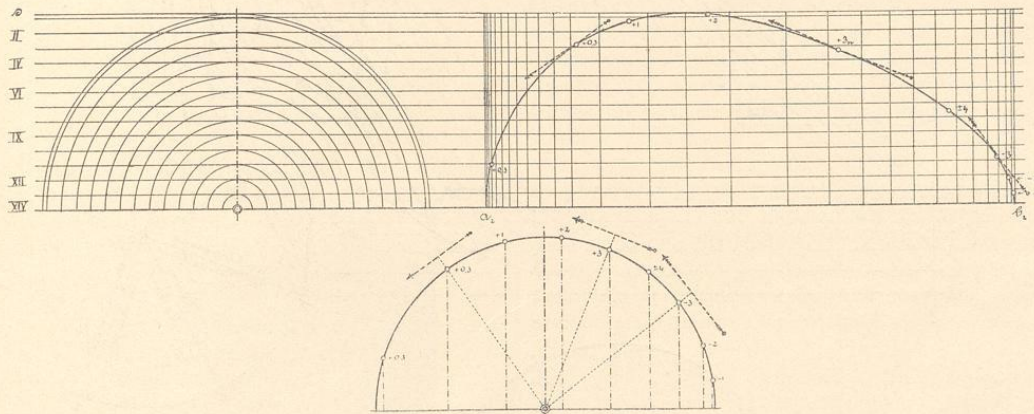
Er wird in den Grundriss der Fläche übertragen, indem dort das Bogenmass $s a$ gleich dem Horizontalmass $s a_e$ in der Abwicklung gemacht wird.

119. Lichtstufen auf beliebig gekrümmten Flächen, zweites Verfahren: mit berührenden Cylinderflächen. Gebilde durch Höhenkurven gegeben.

Ein zweites allgemeines Verfahren zum Bestimmen der Lichtstufenlinien auf gekrümmten Flächen ist das folgende. Man zeichnet wie beim ersten Verfahren die Schnittkurven beliebiger Horizontalebene mit der Fläche. Im allgemeinen wird man die Abstände der Horizontalschnitte gleich gross anzunehmen suchen, in welchem Fall sie nach dem Vorgang der topographischen Flächendarstellung als „Höhenkurven“ bezeichnet werden können. Zieht man an die im Grundriss gezeichneten Horizontalschnittkurven parallele Tangenten einer beliebigen Rich-

kurvensystem nur einmal zeichnen und jede Tangenten-Gruppe samt der zugehörigen Berührungskurve auf einem eigenen Blatt durchsichtigen Papiers davon abnehmen, wobei die Horizontalkurven auf dem Pausblatt und die Berührungskurven auf dem Horizontalkurvenblatt wegbleiben. Wenn später auf dem Pausblatt die Lichtstufpunkte der Berührungskurve konstruiert sind, werden sie auf das Reinblatt für die zu schattierende Flächendarstellung durchgestochen, wobei für die richtige Lage des Pausblattes Merkmale vorgesehen sein müssen. Die Benützung des Papierstreifens zum Auftragen geradliniger Punktreihen ist auch hier ein schätzbare Förderungsmittel.

Dieses zweite allgemeine Verfahren, das als dasjenige „mit berührenden Cylinderflächen“ bezeichnet werden kann, wird meist erheblich rascher zum Ziel führen, als das erste. Nur werden die Berührungskurven, die alle durch den höchsten Flächenpunkt laufen, sich in dessen Nähe häufen und anderwärts grössere leere Flächen



Figur 112a.

tung und verbindet deren Berührungspunkte durch eine stetige Kurve, so bilden die Tangenten die Mantellinien einer horizontalen Cylinderfläche, welche die gegebene Fläche nach dieser Kurve berührt. Wo die ganzzahligen Lichtstufpunkte dieser Kurve liegen als auf einer Linie in der Cylinderfläche, da liegen sie auch für die gegebene Fläche. Der Normalschnitt der Cylinderfläche ist leicht getrennt herauszuzeichnen, da die Mantellinien nach Grundriss und Höhenlage bekannt sind. Die Bestimmung der Lichtstufenlinien auf der Cylinderfläche ist in Art. 99 gezeigt. Wo eine ganzzahlige Lichtstufenmantellinie, z. B. + 3, jene Berührungskurve schneidet, da ist ein Lichtstufpunkt + 3 auf der gegebenen Fläche. Weitere Richtungen der horizontalen Tangentengruppen geben weitere Berührungslinien und auf diesen weitere ganzzahlige Lichtstufpunkte.

Da es schwierig oder unmöglich ist, auf derselben Figur über ein System von vielen Horizontalkurven weg, die sich ja zuweilen auch überschneiden können, viele Paralleltangentengruppen verschiedener Richtung zu legen und getrennt aufzufassen, so wird man das Horizontal-

zwischen sich übrig lassen. In solche leere Stellen wird man kleinere Gruppen von Paralleltangenten einschalten, welche nur kurze Stücke von Berührungskurven liefern; auch kann wohl oft ein Hereinziehen des ersten Verfahrens für bestimmte Teile der Horizontalkurvengruppe zweckmässig sein.

Wie beim ersten allgemeinen Verfahren, so sind auch bei diesem zweiten die Horizontalschnitte oft zu ersetzen durch solche, die der Vertikalebene parallel oder senkrecht zum Grundschnitt gerichtet oder schiefgerichtet, wenn auch senkrecht zu einer Grundebene sind.

Zur Darstellung der Konstruktion ist als erstes Beispiel die in Figur 111a gezeichnete exzentrische Wulstfläche mit denselben früher beschriebenen zur Vertikalebene parallelen Schnittebenen wiedergewählt. Mit einer beliebigen Richtung sind parallele Tangenten an die Schnittkurven gelegt und deren Berührungspunkte stetig verbunden worden; hiedurch ist die Kurve $x_2 s z_2$ entstanden, nach welcher die mit den Tangenten vorgestellte Cylinderfläche die Wulstfläche berührt. $a_2 b_2$ ist ein Normalschnitt der Cylinderfläche; durch Auftragen der